數學傳播 45卷4期, pp. 81-87

由一類定值條件確定的圓錐曲線

鍾文體

下面的練習很適合給正在學習解析幾何的中學生做:

練習 1: 給定平面上的 n 個點 $A_1, A_2, \ldots, A_n$。若點 P 到這 n 個點的距離的平方和爲定值, 求 P 的軌跡。

選擇適當的座標系能極大地減少計算量。設給定的 n 個點的重心爲 G。以 G 爲座標原點, 建立平面直角座標系。設點 A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 的座標爲 (x_i, y_i), 則有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 0. \tag{1}$$

設定值爲 K, P 的座標爲 (x, y), 由距離公式, 有

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right] = K.$$

再根據 (1) 式, 得

$$nx^2 + ny^2 = K - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

上述步驟可逆, 故所求的軌跡是以給定的 n 個點的重心爲圓心的圓。

以下是練習 1 的對偶。

練習 2: 給定平面上的 n 個點 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 設這些點的重心爲 G。考慮以 G 爲圓心的圓, 則圓周上的任意一點到這給定的 n 個點的距離的平方和爲定值。

《數學通報》2020 年第 3 期的一篇文章 (見文獻 [1]) 將練習 2 作了如下推廣:

定理 A: 給定平面上的 n 個點 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 設這些點的重心爲 G。考慮以 G 爲中心的橢圓, 則橢圓上的任意一點到 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的距離的平方和與該點到橢圓的兩個焦點的距離的乘積的 n 倍之和爲定值。

上面這段文字的後半部分有點拗口, 乾脆跳過不看也沒關係, 我們直接看下文。具體地說, 取 n 個固定的點 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 設 G 爲它們的重心。以 G 爲原點建立平面直角座標系。設有一橢圓, 其方程爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 左右焦點分別爲 F_1, F_2。P 爲此橢圓上的任意一點, 則

$$\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2+n|PF_1|\cdot|PF_2|$$

恆等於定值

$$\sum_{i=1}^{n}|GA_i|^2+na^2+nb^2.$$

特別地, 當 F_1 與 F_2 重合時, 橢圓退化爲圓。此時, $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 等於半徑的平方, 爲定值。故 $\sum\limits_{i=1}^{n}|PA_i|^2$ 爲定值, 這是練習 2 的結論。

我們很自然地考慮上述結論的對偶。爲了方便, 先介紹一些術語。

對固定的 $n+2$ 個點 $A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2$ 及任意點 P, 稱 $\sum\limits_{i=1}^{n}|PA_i|^2+n|PF_1|\cdot|PF_2|$ 爲點 P (關於點 $A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2$) 的第一類目標值; $\sum\limits_{i=1}^{n}|PA_i|^2-n|PF_1|\cdot|PF_2|$ 爲點 P (關於點 $A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2$) 的第二類目標值。先給一個引理。

引理: 給定平面上的 $n+2$ 個點 $A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2$。設點 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的重心與點 F_1, F_2 的重心重合, 記爲 G。考慮平面上任意一點 P。

(a) 當且僅當 P 落在線段 F_1F_2 上時, 它的第一類目標值最小。最小的第一類目標值爲

$$\sum_{i=1}^{n}|GA_i|^2+n|GF_1||GF_2|.$$

(b) 設 F_1 和 F_2 不重合。在直線 F_1F_2 中挖去線段 F_1F_2 (不包括端點), 得到兩條射線, 都記爲 l。則當且僅當 P 落在 l 上時, 它的第二類目標值取最大值

$$\sum_{i=1}^{n}|GA_i|^2+n|GF_1||GF_2|;$$

當且僅當 P 落線上段 F_1F_2 的垂直平分線上時, 它的第二類目標值取最小值

$$\sum_{i=1}^{n}|GA_i|^2-n|GF_1||GF_2|.$$

證明: 以 G 爲原點建立平面直角座標系, 使 F_1 和 F_2 落在 x 軸上。不妨設 F_1, F_2 的座標分

別爲 $(-c,0),(c,0)$, 其中 $c\geq 0$。設點 A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 的座標爲 (x_i,y_i), 則有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n} y_i=0. \tag{2}$$

設 P 的座標爲 (x,y), 根據距離公式, 得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2+n|PF_1|\cdot|PF_2|\\&\qquad=\sum_{i=1}^{n}\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]+n\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}.\end{aligned}$$

再根據 (2) 式, 整理得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2+n|PF_1|\cdot|PF_2|\\&\qquad=nx^2+ny^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2+n\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}.\end{aligned}$$

因 $\sum\limits_{i=1}^{n}|GA_i|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2$ 且 $|GF_1||GF_2|=c^2$, 故只需證明

$$x^2+y^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}\geq c^2, \tag{3}$$

且等號成立當且僅當 $-c\leq x\leq c$, $y=0$。

以下證明 (3) 式。當 $|x|>c$ 時顯然成立, 下設 $|x|\leq c$, 此時,

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow y^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}\geq c^2-x^2\\&\Leftrightarrow \left(y^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}\right)^2\geq (c^2-x^2)^2\\&\Leftrightarrow y^4+2y^2\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}+(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2\\&\qquad\geq (c^2-x^2)^2\\&\Leftrightarrow y^2\left(x^2+y^2+c^2+\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}\right)\geq 0.\end{aligned}$$

於是 (3) 式成立, 且等號成立當且僅當 $-c\leq x\leq c, y=0$, 故 (a) 成立。

下設 F_1 和 F_2 不重合。類似地, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}|PA_i|^2-n|PF_1|\cdot|PF_2|\\&\qquad=nx^2+ny^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}.\end{aligned}$$

故只需證

$$-c^2 \le x^2+y^2-\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)} \le c^2, \tag{4}$$

且左邊等號成立當且僅當 $x=0$, 右邊等號成立當且僅當 $y=0$, $x\le -c$ 或 $x\ge c$。以下證明這個不等式。首先,

$$\begin{aligned}
&-c^2 \le x^2+y^2-\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2+c^2 \ge \sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}\\
&\Leftrightarrow (x^2+y^2+c^2)^2 \ge (x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)\\
&\Leftrightarrow (x^2+y^2+c^2)^2 \ge (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2 \Leftrightarrow 4c^2x^2\ge 0,
\end{aligned}$$

故 (4) 式左邊成立。又由 F_1 和 F_2 不重合可知 $c\ne 0$, 故等號成立當且僅當 $x=0$。以下考慮不等式的另一邊。

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2-\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)} \le c^2\\
&\Leftrightarrow x^2-c^2+y^2 \le \sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}\\
&\Leftrightarrow (x-c)(x+c)+y^2 \le \sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}.
\end{aligned}$$

當 $x-c$ 和 $x+c$ 異號時, 顯然有 $(x-c)(x+c)+y^2<y^2<\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, 故此時 (4) 式右邊成立。下設 $(x-c)(x+c)\ge 0$, 則

$$\begin{aligned}
&(x-c)(x+c)+y^2 \le \sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow \left[(x-c)(x+c)+y^2\right]^2 \le \left[(x-c)^2+y^2\right]\left[(x+c)^2+y^2\right]\\
&\Leftrightarrow 2(x-c)(x+c)y^2 \le (x-c)^2y^2+(x+c)^2y^2\\
&\Leftrightarrow \left[(x-c)y-(x+c)y\right]^2\ge 0 \Leftrightarrow c^2y^2\ge 0,
\end{aligned}$$

故 (4) 式右邊成立, 且等號成立當且僅當 $y=0$ 且 $(x-c)(x+c)\ge 0$。於是 (b) 成立。

定理1: 給定平面上的 $n+2$ 個點 $A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2$。設點 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的重心與點 F_1, F_2 的重心重合, 記爲 G。則關於 $A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2$ 的第一類目標值爲定值 K $\Big(K \ge \sum\limits_{i=1}^{n}|GA_i|^2+n|GF_1||GF_2|\Big)$ 的點的軌跡是某個以 G 爲中心, F_1, F_2 爲焦點的橢圓。當 $K=\sum\limits_{i=1}^{n}|GA_i|^2+n|GF_1||GF_2|$ 時, 軌跡退化爲線段 F_1F_2。

證明: 由引理可知, 當 $K=\sum\limits_{i=1}^{n}|GA_i|^2+n|GF_1||GF_2|$ 時, 軌跡爲線段 F_1F_2, 以下只考慮 $K>\sum\limits_{i=1}^{n}|GA_i|^2+n|GF_1||GF_2|$ 的情形。

以 G 爲原點建立平面直角座標系, 使 F_1 和 F_2 落在 x 軸上。不妨設 F_1, F_2 的座標分別爲 $(-c, 0), (c, 0)$, 其中 $c \geq 0$。設點 A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 的座標爲 (x_i, y_i), 則有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 0. \tag{5}$$

由條件, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n} |PA_i|^2 + n|PF_1| \cdot |PF_2| = K$。設 P 的座標爲 (x, y), 再根據距離公式, 得

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right] + n\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = K.$$

根據 (5) 式, 整理得

$$nx^2 + ny^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - K = -n\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)}. \tag{6}$$

兩邊平方, 得

$$\begin{aligned}
& n^2x^4 + n^2y^4 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2 + K^2 \\
& + 2n^2x^2y^2 + 2nx^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2nx^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2nKx^2 \\
& + 2ny^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2ny^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2nKy^2 \\
& + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - 2K\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
& - 2K\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
& = n^2\left(x^4 + y^4 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2x^2 + 2c^2y^2 - 4c^2x^2\right).
\end{aligned}$$

整理, 得

$$\begin{aligned}
2nx^2 & \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - K + nc^2\right) + 2ny^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - K - nc^2\right) \\
& = n^2c^4 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - K\right)^2.
\end{aligned}$$

因 $K>\sum\limits_{i=1}^{n}|GA_i|^2+n|GF_1||GF_2|=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2+nc^2$, 故 $nc^2+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-K<0$, $nc^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2\right)+K>0$。從而 $n^2c^4-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-K\right)^2\neq 0$, 兩邊同時除以 $n^2c^4-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-K\right)^2$, 得

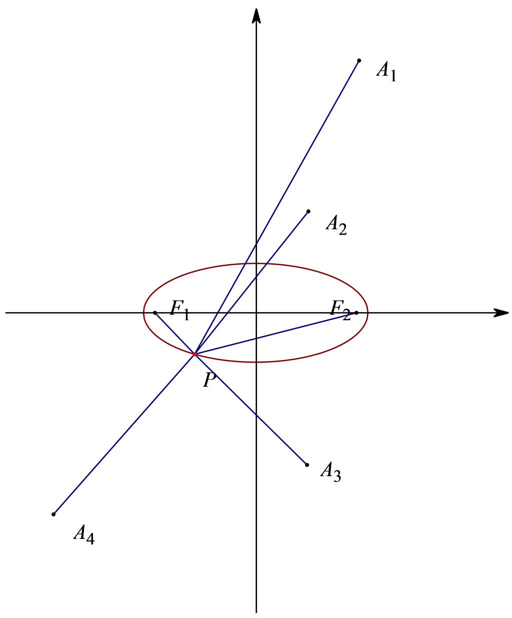
$$\frac{x^2}{\frac{K-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)+nc^2}{2n}}+\frac{y^2}{\frac{K-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)-nc^2}{2n}}=1. \tag{7}$$

這是一個橢圓方程。容易看到這個橢圓的半焦距恰好爲 c。設 Q 爲此橢圓上的任一點, 根據定理 A, $\sum\limits_{i=1}^{n}|QA_i|^2+n|QF_1|\cdot|QF_2|$ 等於定值

$$\sum_{i=1}^{n}|GA_i|^2+n\cdot\frac{K-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2\right)+nc^2}{2n}+n\cdot\frac{K-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2\right)-nc^2}{2n},$$

上式化簡之後恰好爲 K。於是, 滿足定理 1 條件的點 P 的軌跡爲橢圓。

下面給一個例子。取點 $A_1(2,5)$, $A_2(1,2)$, $A_3(1,-3)$, $A_4(-4,-4)$ 及 $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$。再取 $K=100$, 則軌跡方程爲 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$, 見下圖。



文 [1] 還證明了下述結論。

定理B: 給定平面上的 n 個點 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 設這些點的重心爲 G。則以 G 爲中心的雙曲線上的任意一點到 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的距離的平方和與該點到雙曲線的兩個焦點的距離的乘積的 n 倍之差爲定值。

類似地可以證明上述結論的對偶。

定理2: 給定平面上的 $n+2$ 個點 $A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2$, 且 F_1 和 F_2 不重合。設點 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的重心與點 F_1, F_2 的重心重合, 記爲 G。則關於 $A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2$ 的第二類目標值爲定值 K $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|GA_i|^2 - n|GF_1||GF_2| \le K \le \sum\limits_{i=1}^{n}|GA_i|^2 + n|GF_1||GF_2|\right)$ 的點的軌跡是某個以 G 爲中心, F_1, F_2 爲焦點的雙曲線。當 $K = \sum\limits_{i=1}^{n}|GA_i|^2 + n|GF_1||GF_2|$ 時, 軌跡退化爲從直線 F_1F_2 挖去線段 F_1F_2 (不包括端點) 得到的兩條射線。當 $K = \sum\limits_{i=1}^{n}|GA_i|^2 - n|GF_1||GF_2|$ 時, 軌跡退化爲線段 F_1F_2 的垂直平分線。

其證明與定理 1 類似, 只需將 (6) 式改爲

$$nx^2 + ny^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - K = n\sqrt{(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2+2cx)}.$$

上式仍然可整理成 (7) 的形式, 此時它是雙曲線方程。具體細節留給讀者。

参考文獻

1. 何重飛。一類定值問題在圓錐曲線中的推廣。數學通報, 59(3), 61-63, 2020。

—本文作者任教於中國廣東省深圳市教育科學研究院附屬外國語學校—