數學傳播　45卷4期, pp. 77-80

平面向量內積概念的一種引入方式

周伯欣

1. 前言

我國的高中數學課程, 近十年來, 無論是 99 課綱還是 108 課綱, 平面向量的內積 (Dot Product) 的引入, 都是以物理學中的「功 (Work)」爲引子, 常見的是以一力 $\overrightarrow{F}$ 拖曳地面上的某物前進距離 (位移) $\overrightarrow{d}$, 假定力 $\overrightarrow{F}$ 與地面夾角爲 θ, 此時有效拉力爲 $\overrightarrow{F}\cos\theta$, 則外力做功之大小爲

$$\left|\overrightarrow{F}\cos\theta\right|\cdot\left|\overrightarrow{d}\right|.$$

於是便定義向量 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{d}$ 的內積爲

$$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{d}=\left|\overrightarrow{F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{d}\right|\cos\theta.$$

或是更一般地：向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積定義爲

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right).$$

說實話, 從以前到現在, 我一直不滿意如此的定義。可能是一種數學人的偏見, 總感覺一個數學概念建立於物理的觀念上, 似乎不太踏實。另一方面, 無論是理組還是文組的學生, 都要學習向量內積, 我在教學時, 發現文組的學生對於這樣用物理概念來引進定義, 通常都是草草吸收, 最後只是死記 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)$, 因爲不少文組的學生早在國中就開始放棄了理化, 所以一見到「力」這個字眼就心裡忐忑不安, 自然難以領會這概念的動機。教學現場中, 除了少數學生, 大部分都沒辦法說明爲何

$$|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2.$$

2. 衝突

在大學的線性代數課程, 特別是以矩陣導向爲主旨編寫的教科書, 比如 MIT 的 G. Strang,

在定義內積時都是直接採取代數的方式:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

某些學生就會產生困擾:「到底定義是從哪開始?」、「爲何要這樣定義?」幸運者可能會遇到熟稔中學數學與大學數學課程的教授, 從而有機會通過銜接的補救教學弭平這個知識的間隙。不幸的是, 大多數人的遭遇並非如此。所以最後就變成, 要不生呑活剝這個概念, 直接去記憶; 不然就是自己生出一套似是而非的解釋, 比如「因爲 n 維空間沒法直接定義角度, 不知道 cos 要怎樣算, 而因爲在平面上 $|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2$, 所以就乾脆把定義置換成$a_1b_1+\cdots+a_nb_n$, 這樣任意維度空間都可以討論內積。」這個解釋相當地牽強, 既然大學數學會遇到無法定義高維空間角度的問題, 而 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n$ 在計算上相對容易, 爲何中學數學不直接定義內積就是 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n$?

某些人會說, 我們什麼動機都不要, 直接定義一個線性空間中配備了內積函數, 構成一個內積空間, 滿足 $\cdots$ 公理。我認爲這種講法是最無意義的, 只是以抽象語言把自然的幾何事實重述一遍, 對於觀念的建立毫無幫助 (但可以釐淸)。

3. 一個新方式

經過多年思考, 我最近想出了一條路子, 首先避開了引用物理「功」的概念, 從國小就熟知的基本事實「三角形兩邊和大於第三邊」, 直接用大學課程的 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n$ 來定義內積, 接著使用三角函數的疊合公式來證明

$$|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2,$$

讓學生可以見識到在前頭所學的種種三角公式與後續課程的連結 (在 108 新課綱中, 三角函數疊合公式通常擺在平面向量之前)。一旦建立了內積的兩種 (代數與幾何) 計算方式的橋樑, 後續相關的正射影、Cauchy 不等式等, 都與過去的教學方式相同。

以下開始論述這個新路子的每一步。

一、基本事實

我們承認幾個基本事實:

1. 直角坐標系中的距離公式爲$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。
2. 小學數學已學過的「三角不等式」: 三角形兩邊和大於第三邊。(小學數學採用的是實驗的方式來確認, 國中數學可用 Euclid 幾何公理給出此性質的證明)。

二、從三角不等式引出的一種特殊代數形式 (Algebraic Form): 內積

首先, 若 $O=(0,0), A=(a_1,a_2), B=(b_1,b_2)$ 三點不共線, 則由三角不等式有

$$\overline{OA}+\overline{OB}>\overline{AB}.$$

而當三點共線, 且 O 在 A, B 之間, 則

$$\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{AB}.$$

以向量形式來寫, 則是

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|\geq\left|\overrightarrow{AB}\right|,$$

等號成立於 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 夾角為 π。

代入距離公式, 得

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}.$$

化簡後得到

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq a_1b_1+a_2b_2.$$

此時出現了一個特殊的代數量$a_1b_1+a_2b_2$, 我們將之稱為內積。

定義: 向量 $\overrightarrow{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ 與 $\overrightarrow{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ 的內積 (Dot Product) 定義為

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

我們還可以給內積一個非正式的字面上的解釋：內部座標的乘積。

三、內積的性質

通過計算數個具體的例子, 可以發現向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積,

1. (絕對) 大小顯然與兩向量的長度有關。
2. 正負與兩向量的夾角 $\angle\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)$ 有關。

四、用三角函數疊合公式研究內積的幾何意義

按新課綱各版本課本的安排, 在學習內積時, 學生們都已經學會三角函數的疊合

$$\begin{aligned}a\sin\theta+b\cos\theta&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\theta+\varphi\right),\end{aligned}$$

其中角度 φ 滿足 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

現在, 對於內積 $a_1b_1+a_2b_2$, 我們也能模仿過去處理三角函數疊合的情況的手法, 計算如下:

$$\begin{aligned}a_1b_1+a_2b_2&=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\left(b_1\cdot\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+b_2\cdot\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)\\&=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}\left(\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)\\&=|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)\\&=|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos(\beta-\alpha).\end{aligned}$$

其中 α,β 分別是 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 與正 x 軸所夾的有向角, 滿足 $\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},\sin\alpha=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$ 與 $\cos\beta=\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}},\sin\beta=\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$。

不難分析, 無論 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的相對位置如何, 總有

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\angle\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right).$$

所以我們得到

定理: 向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積也等於 $|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)$。

五、結論

向量 $\overrightarrow{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ 與 $\overrightarrow{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ 的內積有兩種計算方式:

- 代數:$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$。
- 幾何:$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)$。

後記

本文之完成, 感謝我的朋友, 任教於金門高中的許淵智老師, 每日與我討論如何精進教學, 從而讓我有動機去進行此探究。也感謝連威翔學長, 常常督促我把文章完成, 讓我明白我還沒到達孔子「述而不作」的程度。

附註

中國大陸最近行將實施的高中新課程標準, 也是用物理做功的概念來引進內積。

—本文作者任教於台北市私立鵬展文理補習班, 並主持「宇宙數學教室」部落格—