數學傳播 45卷4期, pp. 50-70

摺紙中的數學—子母線的探討

周述博

摘要: 子母線性質來自《數學摺紙計畫 : 30 個課程活動探索》[1] 書中, 主要講述了關於紙上摺痕交點的性質。在正方形的紙上, 任意畫一條紅線爲母線, 再將所有的邊與母線對摺, 所產生出來的所有摺痕稱爲子線, 並將正方形的四條對稱軸稱爲主線, 此時所有子線在正方形上的交點都在主線上, 此爲書中提到的「子母線性質」。

本研究將此結果中的正方形推廣到多邊形、多點形或混和的多點多線形, 其中的母線也推廣成可以是點、線、圓等, 在這些情形下, 所有的子線交點都落在主線上, 也就是本研究指的「符合子母線性質」。

再接著, 將一些與子母線性質有些許差異的圖形分出來成爲類子母線性質, 此類圖形的主線與子母線有些許不同, 但子線交點依舊落在主線上, 符合子母線性質, 因此將這些圖形稱爲「類子母線圖形」。

關鍵字: 子母線、摺痕、主線。

壹、緒論

《數學摺紙計畫 : 30 個課程活動探索》[1] 針對子母線性質提供初步探討, 在正方形的簡單架構下, 得到「子母線性質」十分漂亮以及簡潔的結論, 並且書中也對這個題目有了初步的證明。在此書中,「子母線性質」是幾何學中很特別的議題, 而這也引發我將此定理推到更多圖形的動機, 亦即使用不同形狀的紙也能做出子母線圖形。而在實際研究後, 我發現其實其中使用的性質很單純, 證明出任意多邊形子母線性質也不需困難繁雜的證明。而我也探討是否存在其他也同樣具有子母線性質的圖形。各種「子母線性質」簡述如下表。

	研究對象	圖形	母元素	子線	主線
1	多點多線形子母線	多點多線形	母點 or 母線	摺痕圖形	摺痕圖形
2	多點形不等距子母線	多點形	母點	$(1:k)$阿波羅圓	$(1:k^2)$ 阿波羅圓+中垂線
3	根軸子母線	數個圓	母圓	根軸	根軸
4	直徑圓子母線	多點形	母點	直徑圓	多點形連線
5	多點形垂直子線類子母線	多點形	母點	過圖形的垂直線	(母點+圖形中兩點) 的外接圓
6	多點形雙焦點圓錐曲線類子母線	多點形	母點+母數 k	半長軸長 k 圓錐曲線	中垂線+半長軸長 $2k$ 圓錐曲線

貳、定義

本研究均在同一平面上進行討論

一、距離:

設 A、B 爲平面上兩點, L 爲平面上一直線, 我們將點 A 與點 B 的距離記作 $d(A,B)$, 點 A 到直線 L 的距離記作 $d(A,L)$。

二、平行線的角平分線:

若平面上有相異兩平行直線 L_1、L_2, 則將 L_1 與 L_2 對摺產生的摺痕 L_3 稱爲 L_1 與 L_2 的角平分線, 其中 $L_1//L_2//L_3$ (且 $P\in L_3 \Leftrightarrow d(P,L_1)=d(P,L_2)$。)

三、摺痕圖形:

設 L_1、L_2 爲平面上相異兩直線, P、Q 爲平面上相異兩點, a、b 爲平面上相異兩線段且 $a\in L_1$, $b\in L_2$, 則:

1. 將 P、Q 對摺產生的摺痕記作 $\text{crease}(P,Q)$ (即 P、Q 中垂線)。
2. 將 L_1、L_2 對摺產生的摺痕記作 $\text{crease}(L_1,L_2)$ 或 $\text{crease}(a,b)$。(即 L_1、L_2 的角平分線)。
3. 令 R 爲 L_2 上一個動點, A 爲包含所有 $\text{crease}(P,Q)$ 的直線集合, 則 A 必具有包絡線 [3], 將此包絡線記作 $\text{crease}(P,L_2)$ 或是 $\text{crease}(L_2,P)$。(即以 P 爲焦點、L_2 爲準線所作的拋物線)。

以上將 $\text{crease}(x,y)$ 稱作 x 與 y 的摺痕圖形。上面1.∼3. 三種摺痕圖形中, 都有以下性質: $K\in \text{crease}(x,y)\Leftrightarrow d(K,x)=d(K,y)$。

四、雙焦點圓錐曲線:

設 F_1,F_2 爲平面上兩點, k 爲一常數且 $k\in\mathbb{R}^+$, 則 $\text{curve}(F_1,F_2,k)$ 表示以 F_1,F_2 爲兩焦點做半長軸爲 k 的圓錐曲線。其中:

1. 若 $\overline{F_1F_2}<k$, 則 Γ 爲橢圓, 其中 $P\in \text{curve}(F_1,F_2,k)\Leftrightarrow \overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2k$。
2. 若 $\overline{F_1F_2}>k$, 則 Γ 爲雙曲線, 其中 $P\in \text{curve}(F_1,F_2,k)\Leftrightarrow |\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2k$。
3. 若 $\overline{F_1F_2}=k$, 則 Γ 爲一條過 F_1,F_2 的直線, 而其中可以將此直線除 F_1,F_2 外的區域分成兩部分:

(1) 將 $\overline{F_1F_2}$ 視爲橢圓的退化, 即長軸長等於焦距的橢圓, 其中在 $\overline{F_1F_2}$ 上的點也符合橢圓的性質, 即 $P\in\overline{F_1F_2}\Leftrightarrow\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2k=\overline{F_1F_2}$。

(2) 將 $\overleftrightarrow{F_1F_2}\backslash\overline{F_1F_2}$ 視爲雙曲線的退化, 即長軸長等於焦距的雙曲線, 其中在 $\overleftrightarrow{F_1F_2}\backslash\overline{F_1F_2}$ 上的點也符合雙曲線的性質, 即 $P\in\overleftrightarrow{F_1F_2}\backslash\overline{F_1F_2}\Leftrightarrow|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2k=\overline{F_1F_2}$。

參、子母線的探討

定理1: **多點多線形子母線性質**

(1) 多點多線形 (棕色) : 平面上由數個點與數條直線所構成的圖形。

(2) 母元素 (紅色) : 平面上一條線或一個點。(如圖 1-1)

(3) 子線 (藍色實線) : 將多點多線形所有元素與母元素作摺痕圖形。(如圖 1-2)

(4) 主線 (黑色虛線) : 多點多線形所有元素兩兩作摺痕圖形。(如圖 1-3)

則任意兩子線的交點都會落在主線上 (如圖 1-4)

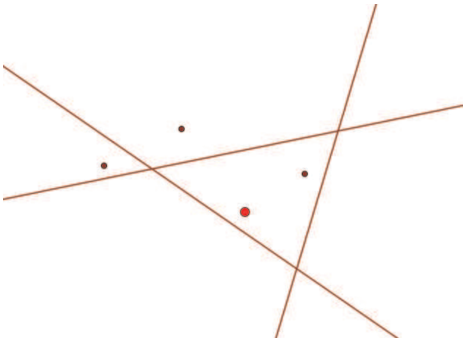

圖 1-1

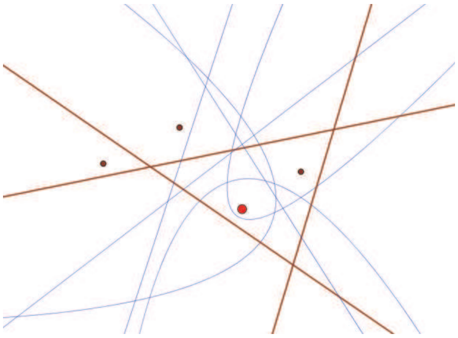

圖 1-2

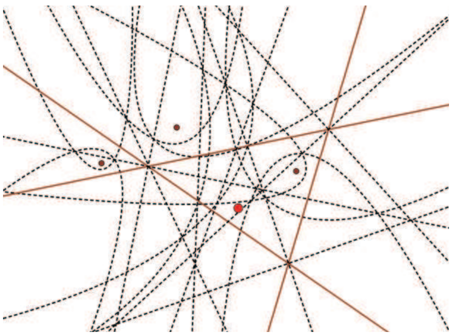

圖 1-3

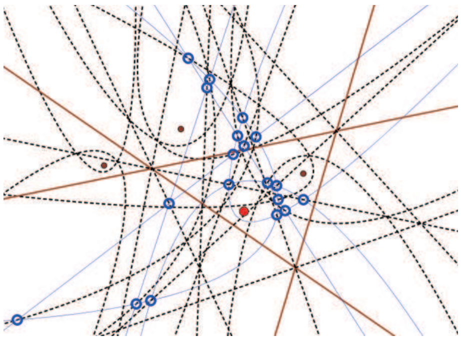

圖 1-4

圖 1 : 三點三線形的子母線性質

若母元素為一條線, 則稱之為母線; 若母元素為一點, 則稱之為母點。

定理1**證明**: 假設 x、y 為多點多線形中不同的兩個元素, 而 z 是母元素。
其中 x、y、z 皆為點或直線

Case 1 : z 爲母線

Case 1.1: x、y 皆爲直線

作 $L_1 = \text{crease}(x, z)$, $L_2 = \text{crease}(y, z)$, L_1, L_2 即爲兩條子線, 其中 L_1, L_2 皆爲角平分線。

Case 1.2: x、y 皆爲點

作 $L_1 = \text{crease}(x, z)$, $L_2 = \text{crease}(y, z)$, L_1, L_2 即爲兩條子線, 其中 L_1, L_2 皆爲拋物線。

Case 1.3: x、y 爲一點一直線

不妨設 x 爲直線、y 爲點, 作 $L_1 = \text{crease}(x, z)$, $L_2 = \text{crease}(y, z)$, L_1, L_2 即爲兩條子線, 其中 L_1 爲角平分線, L_2 爲拋物線。

Case 2: z 爲母點

Case 2.1: x、y 皆爲直線

作 $L_1 = \text{crease}(x, z)$, $L_2 = \text{crease}(y, z)$, L_1, L_2 即爲兩條子線, 其中 L_1, L_2 皆爲拋物線。

Case 2.2: x、y 皆爲點

作 $L_1 = \text{crease}(x, z)$, $L_2 = \text{crease}(y, z)$, L_1, L_2 即爲兩條子線, 其中 L_1, L_2 皆爲中垂線。

Case 2.3: x、y 爲一點一直線

不妨設 x 爲直線、y 爲點, 作 $L_1 = \text{crease}(x, z)$, $L_2 = \text{crease}(y, z)$, L_1, L_2 即爲兩條子線, 其中 L_1 爲拋物線, L_2 爲中垂線。

上述 Case 1.1∼2.3 中, 可以確定 L_1, L_2 即 x、y 分別對 z 做子線的結果, 且 L_1, L_2 皆符合摺痕圖形的定義, 因此也具有摺痕圖形的性質。

設 L_1、L_2 交點爲 K,

$\because\ K \in L_1 \therefore\ d(K, x) = d(K, z)$,

同理 $K \in L_2$, $d(K, y) = d(K, z)$,

由上述兩式得 $d(K, x) = d(K, y)$, 可推得 $K \in \text{crease}(x, y)$,

即子線交點 (K 點) 會在主線上 (x 與 y 的摺痕圖形)。

其中又分爲三個 Case:

Case A: x、y 皆爲直線, 則 $\text{crease}(x, y)$ 爲角平分線。

Case B: x、y 皆爲點, 則 $\text{crease}(x, y)$ 爲中垂線。

Case C: x、y 爲一點一直線, 則 $\text{crease}(x, y)$ 爲拋物線。

範例1.1: 正方形內部的子母線性質

此即爲摘要中提到的子母線性質。

(1) 在平面上繪製一正方形, 可將其視爲一個零點四線形。
(2) 母元素爲母線, 以紅色實線表示。(如圖2-1)
(3) 以對摺方式產生子線, 以藍色實線表示 (如圖2-2), 此子線爲角平分線, 可視爲將邊與母線做摺痕圖形。
(4) 正方形的四條對稱軸爲主線, 以黑色實線表示 (如圖2-3), 經研究後已確定與對稱軸相關性質沒有任何關係, 而是因爲此正方形四條直線分別兩兩做角平分線後, 經過正方形內部的主線, 恰巧與此正方形四條對稱軸重疊, 因此剛好爲正方形主線。

如此做出來的圖形符合定理1, 爲一個零點四線形的子母線圖形, 因此任兩子線的交點都會落在主線上。(如圖2-4)

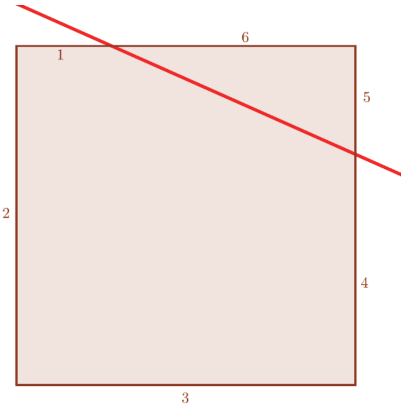

圖 2-1

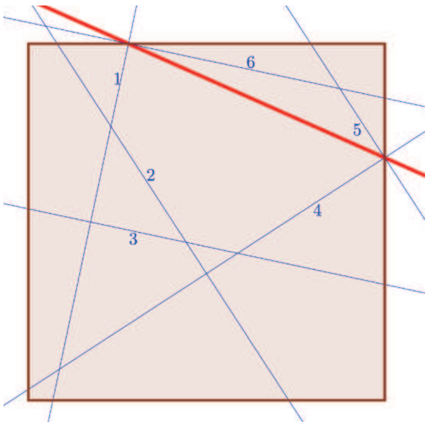

圖2-2

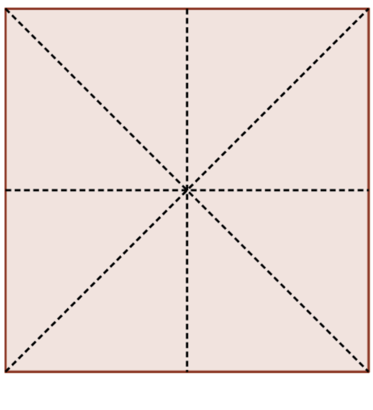
圖2-3

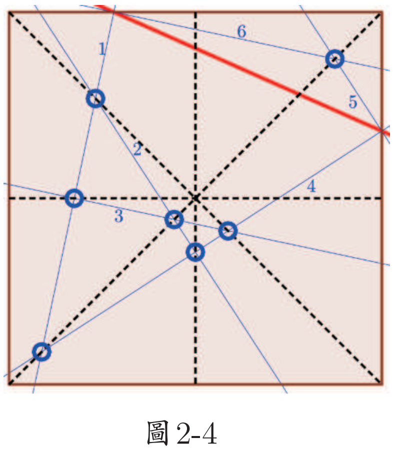

圖2-4

圖2： 正方形內部的子母線圖形

範例1.2: **正方形的子母線性質**

與範例 1.1 幾乎相同, 但有討論正方形外部的子線以及主線。既然需要討論外部的點, 那麼便將其視爲一個完整的零點四線形討論。

(1) 在平面上繪製由四條直線組成的零點四線形, 其中四條直線的封閉區域爲一個正方形。
(2) 母元素爲母線, 以紅色實線表示。(如圖 3-1)
(3) 將圖形的直線分別與母線對摺產生子線, 即與母線做摺痕圖形, 爲角平分線, 以藍色實線表示。(如圖 3-2)
(4) 將圖形中的直線兩兩對摺產生主線, 即產生角平分線, 以黑色虛線表示。(如圖 3-3)

此圖形符合定理一多點多線形子母線性質, 因此子線的交點都會落在主線上。(如圖 3-4)

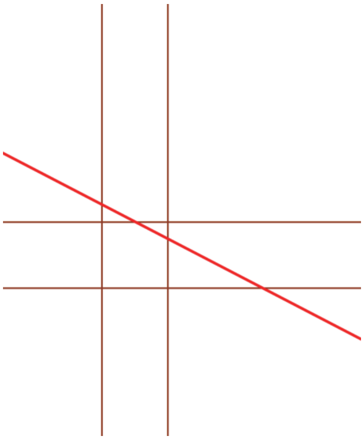

圖 3-1

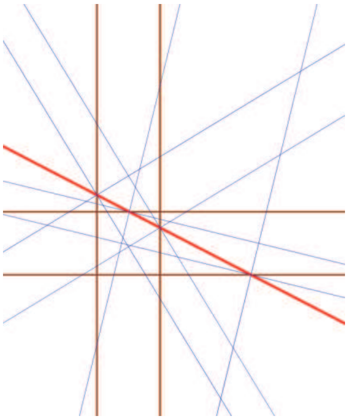

圖 3-2

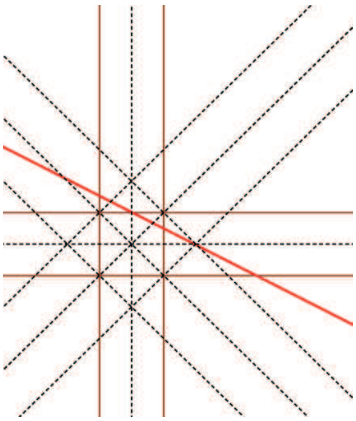

圖 3-3

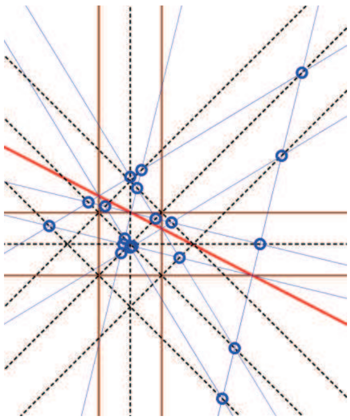

圖 3-4

圖 3： 正方形的子母線圖形

範例1.3: 多線形的子母線性質

與範例1.2相似, 此時圖形由任意正整數條直線組成 (包括由一條線組成的一線形, 但一線形與母線的子線只有一組, 沒有交點可以討論, 因此主要以二線形以上的圖形討論), 且多線形只討論直線, 不討論封閉區域, 因此圖形可以僅由兩條直線組成, 整個圖形也可以完全沒有封閉區域。

(1) 在平面上繪製由多條直線組成的零點多線形, 簡稱爲多線形, 以咖啡色實線表示。

(2) 母元素爲母線, 以紅色實線表示。(如圖 4-1)

(3) 將多線形中的直線分別與母線對摺產生子線, 即與母線做摺痕圖形, 爲角平分線, 以藍色實線表示。(如圖 4-2)

(4) 將多線形的直線兩兩對摺產生主線, 即產生角平分線, 以黑色虛線表示。(如圖 4-3)

此圖形符合定理一多點多線形子母線性質, 因此子線的交點都會落在主線上。(如圖 4-4)

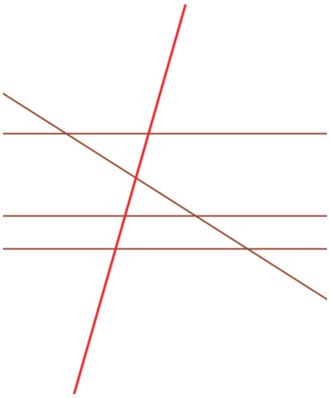
圖 4-1

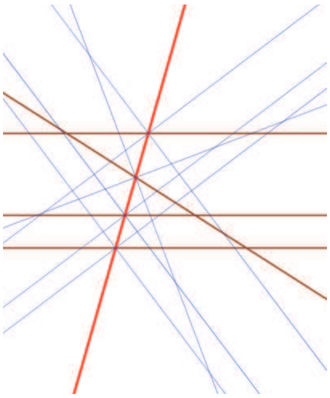
圖 4-2

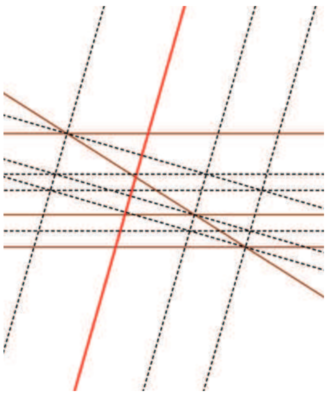
圖 4-3

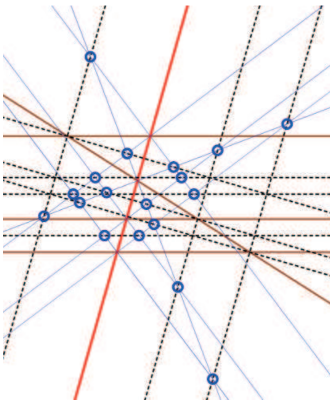
圖 4-4

圖 4-1∼4-4: 由三條平行線及另一條線組成的四線形的子母線圖形

範例1.4: **多點形的子母線性質**

與多線形類似, 多點形即由多個點組成的圖形。同時母元素也使用母點, 並用兩點對摺產生中垂線的方式製作摺痕圖形。

(1) 在平面上繪製由多個點組成的多點零線形, 簡稱爲多點形, 以咖啡色表示。

(2) 母元素爲母點, 以紅色點表示。(如圖 5-1)

(3) 將多點形中的點分別與母點對摺產生子線, 即與母點做摺痕圖形, 爲中垂線, 以藍色實線表示。(如圖 5-2)

(4) 將多點形的點兩兩對摺產生主線, 即產生中垂線, 以黑色虛線表示。(如圖 5-3)

此圖形符合定理一多點多線形子母線性質, 因此子線的交點都會落在主線上。(如圖 5-4)

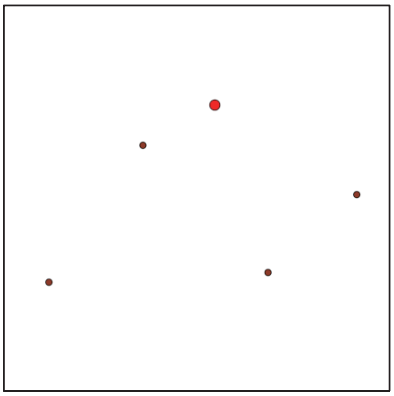

圖 5-1

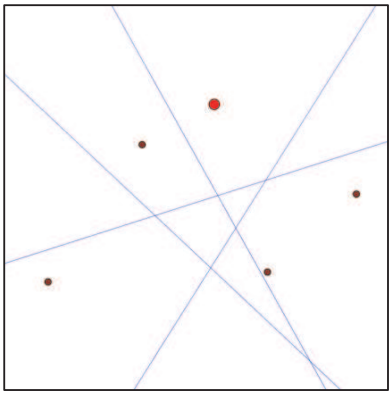

圖 5-2

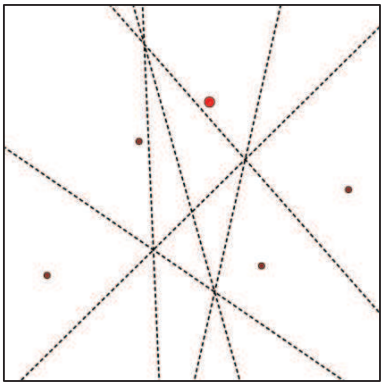

圖 5-3

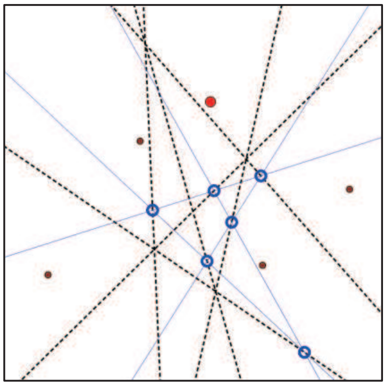

圖 5-4

圖 5-1∼5-4: 四點形的子母線圖形

範例1.5: **多線形+母點的子母線性質**

與多線形的子母線類似, 但是母元素使用母點而非母線, 同樣利用摺痕圖形來達成所有由母點產生的子線都會落在主線上的性質。

(1) 在平面上繪製由多條直線組成的多線形, 以咖啡色表示。

(2) 母元素爲母點, 以紅色點表示。(如圖6-1)

(3) 將多線形中的直線分別與母點做摺痕圖形, 產生拋物線形狀的子線, 以藍色實線表示。(如圖6-2)

(4) 將多線形中的直線兩兩對摺產生主線, 即產生角平分線, 以黑色虛線表示。(如圖6-3)

此圖形符合定理一多點多線形子母線性質, 因此子線的交點都會落在主線上。(如圖6-4)

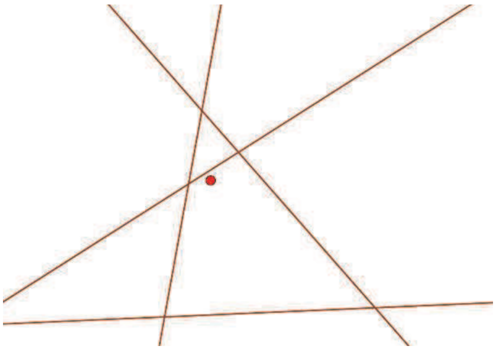

圖 6-1

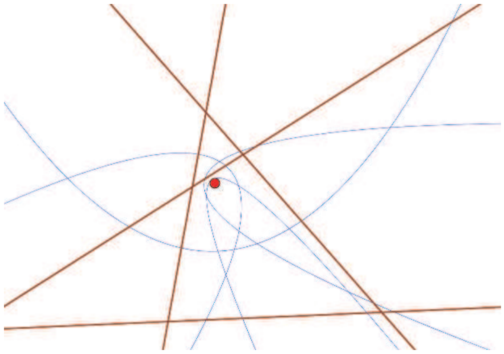

圖6-2

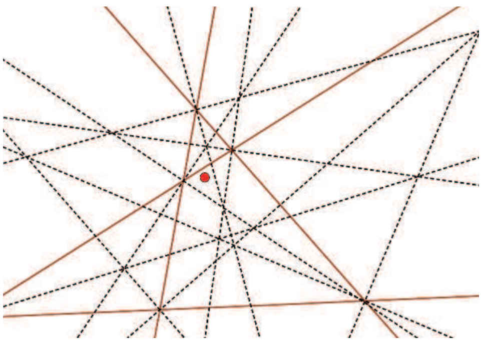

圖6-3

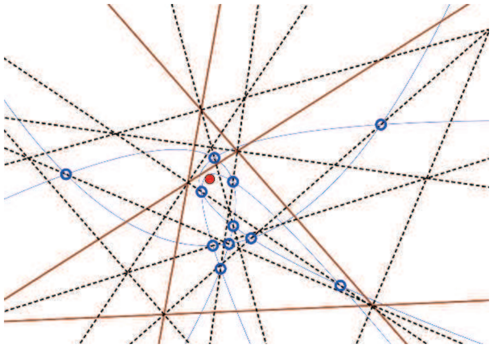

圖6-4

圖6-1∼6-4: 四線形+母點的子母線圖形

範例1.6: **多點形+母線的子母線性質**

與範例 1.5 概念類似, 此範例將原本範例 1.4 多點形子母線圖形中的母點替換成母線, 並維持以摺痕圖形的方式產生子線。

(1) 在平面上繪製一個多點形, 以咖啡色表示。

(2) 母元素爲母線, 以紅色實線表示。(如圖 7-1)

(3) 將多點形中的點分別與母線做摺痕圖形, 爲拋物線子線, 以藍色實線表示。(如圖 7-2)

(4) 將多點形的點兩兩對摺產生主線, 即產生中垂線, 以黑色虛線表示。(如圖 7-3)

此圖形符合定理一多點多線形子母線性質, 因此子線的交點都會落在主線上。(如圖 7-4)

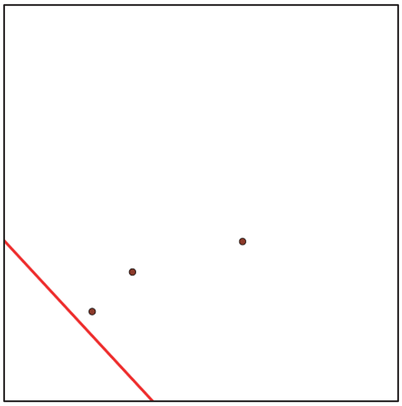

圖 7-1

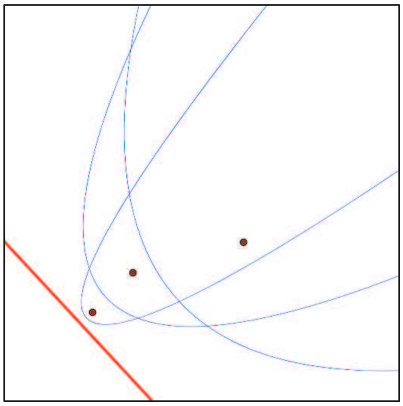

圖 7-2

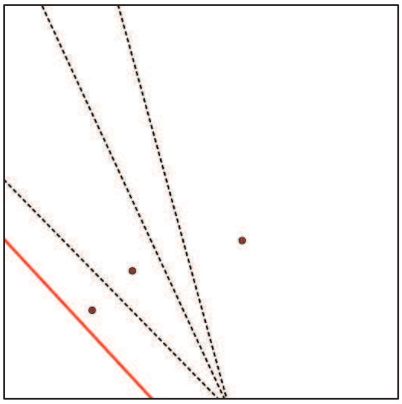

圖 7-3

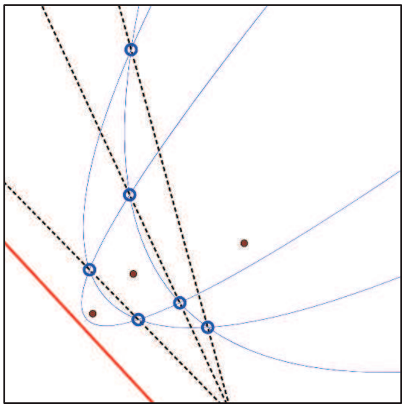

圖 7-4

圖 7-1～7-4: 三點形+母線的子母線圖形

肆、子母線在其他特殊圖形中的延伸

在上一個章節中, 討論完了對摺產生等距的情形。因此我開始去尋找其他可以符合子母線性質的例子, 也就是利用其他子線主線的定義, 但也仍使得子線交點落在主線上。

定理2: 多點形不等距子母線性質

(1) 多點形 (咖啡色) : 在平面上繪製一個多點形。

(2) 母元素 (紅色點) : 在平面上繪製一個點。(如圖8-1)

(3) 子線 (藍色實線) : 將多點形所有點與母點做 $1 : k$ 阿波羅圓。(如圖8-2)

(4) 主線 (黑色虛線) : 多點形所有點兩兩做 $1 : k^2$ 阿波羅圓與中垂線。(如圖8-3)

則子線的交點都會落在主線上。(如圖8-4)

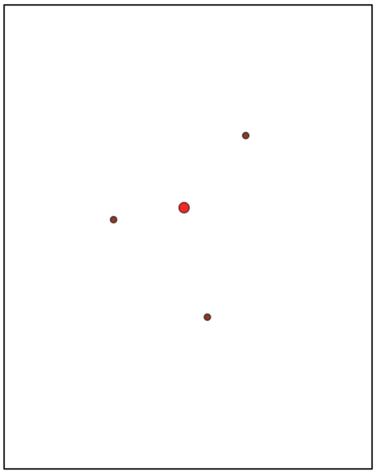

圖 8-1

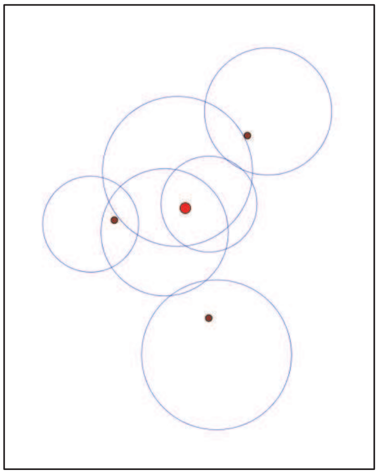

圖 8-2

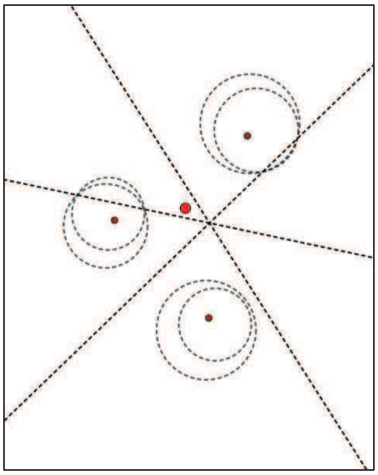

圖 8-3

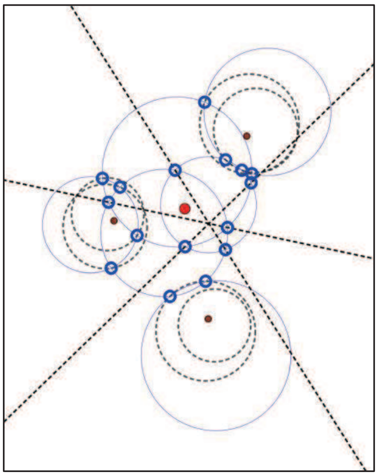

圖 8-4

圖8-1～8-4: 三點形的 1:2 比例不等距子母線圖形

證明: 假設 P、Q 爲多點形中不同的兩個點, 而 R 爲母點。作 L_1 爲 P 與 R 的 $1:1$ 的阿波羅圓, L_2 爲 Q 與 R 的 $1:k$ 的阿波羅圓, L_1, L_2 即是兩條子線。設 L_1, L_2 交點爲 K。

$\because\ K \in L_1 \therefore\ d(K,P):d(K,R) = 1:k \vee k:1.$

同理 $K \in L_2$, $d(K,Q):d(K,R) = 1:k \vee k:1.$

上述兩式得 $d(K,P):d(K,Q) = 1:k^2 \vee 1:1 \vee k^2:1$, 得 $K \in \text{crease}(P,Q) \vee (P,Q$ 的 $1:4$ 阿波羅圓) 即子線交點 (K 點) 會在主線上 (P、Q 中垂線或是 P、Q 的 1:4 阿波羅圓)。

定理3: **圓冪的子母線性質**

(1) 多圓形 (咖啡色圓)：平面上繪製數個咖啡色圓形, 稱爲多圓形。

(2) 母圓 (紅色圓)：平面上繪製一個紅色圓。(如圖 9-1)

(3) 子線 (藍色實線)：將多圓形中所有圓分別與母圓做根軸。(如圖 9-2)

(4) 主線 (黑色虛線)：多圓形中所有圓兩兩做根軸。(如圖 9-3)

則子線的交點都會落在主線上。(如圖 9-4)

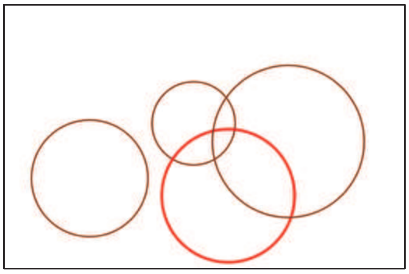

圖 9-1

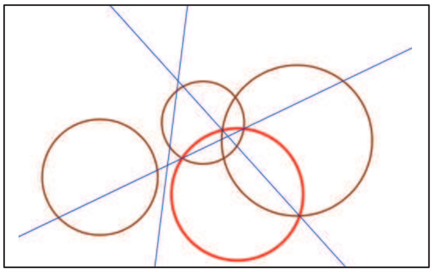

圖 9-2

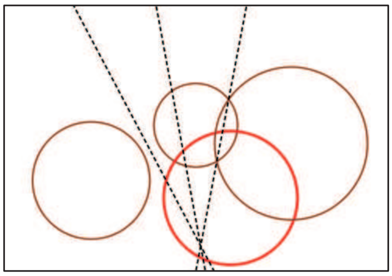

圖 9-3

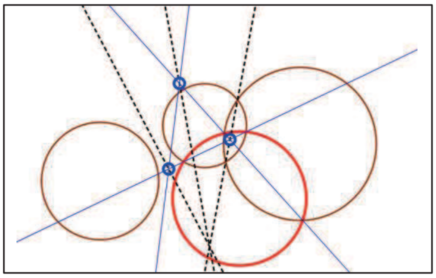

圖 9-4

圖 9: 三圓形的圓冪子母線性質

證明: 假設 Γ_1、Γ_2 爲圖形中不同的兩個圓, 而 Γ 爲母圓。其中 Γ_1 半徑爲 r_1, Γ_2 半徑爲 r_2, Γ 半徑爲 r。Γ_1 圓心爲 O_1, Γ_2 圓心爲 O_2, Γ 圓心爲 R。作 L_1 爲 Γ_1 與 Γ 的根軸, L_2 爲 Γ_2 與 Γ 的根軸, L_1, L_2 即是兩條子線。

設 L_1, L_2 交點為 K。

$\because\ K \in L_1 \therefore\ (d(K,O_1))^2 - r_1^2 = (d(K,R))^2 - r^2.$

同理 $K \in L_2$, $(d(K,O_2))^2 - r_2^2 = (d(K,R))^2 - r^2.$

由上述兩式得 $(d(K,O_1))^2 - r_1^2 = (d(K,O_2))^2 - r_2^2$, 推得 K 落在 Γ_1、Γ_2 的根軸上, 即子線交點 (K 點) 會在主線上 (Γ_1、Γ_2 的根軸)。

定理4: **直徑圓的子母線性質**

(1) 多點形 (咖啡色)：平面上繪製數個咖啡色點組成多點形。
(2) 母點 (紅色點)：平面上繪製一點, 以紅色點表示。(如圖10-1)
(3) 子線 (藍色實線)：將多點形中的點分別與母點為直徑做圓形子線。(如圖10-2)
(4) 主線 (黑色虛線)：將多點形中的點兩兩連線做主線。(如圖10-3)

則子線的交點都會落在主線上。(如圖10-4)

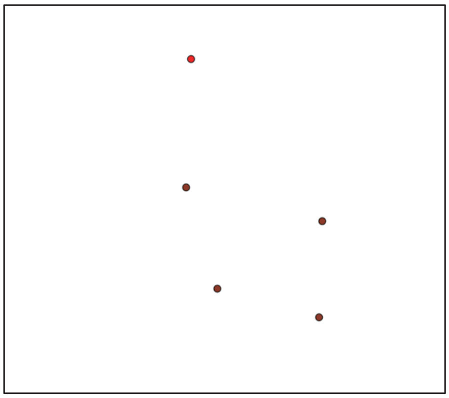

圖 10-1

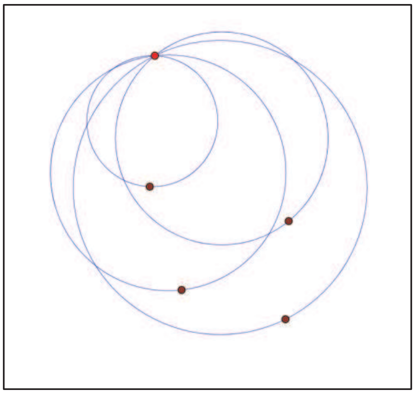

圖 10-2

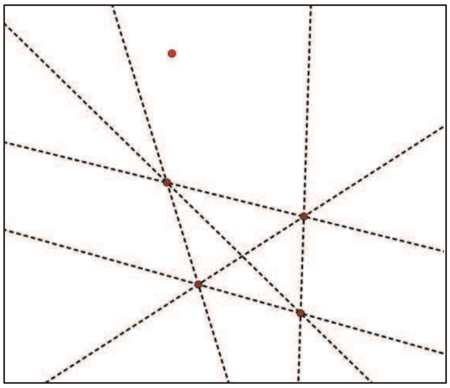

圖 10-3

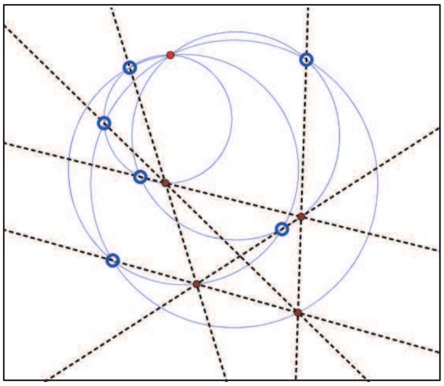

圖 10-4

圖 10: 四點形的直徑圓子母線圖形

證明: 假設 P、Q 爲多點形中不同的兩個點, 而 R 爲母點。

以 $\overline{PR}$ 爲直徑作圓 O_1, $\overline{QR}$ 爲直徑作圓 O_2, O_1, O_2 即是兩條子線。

設 O_1, O_2 除了 R 以外的交點爲 K,

$\angle PKR = 90^\circ$,

$\angle QKR = 90^\circ$,

$\Rightarrow\ \angle PKR = 0^\circ \vee 180^\circ$,

得 K 應落在 $\overleftrightarrow{PQ}$ 上。

即子線交點 (K 點) 會在主線上 ($\overleftrightarrow{PQ}$)。

伍、類子母線圖形

在研究子母線圖形的過程中, 發現一些圖形具有「子線交點落在主線上」的子母線性質, 但在主線的定義上與大部分其他子母線圖形有些許不同。

在前兩大章中出現的子母線圖形的主線都是純粹由圖形本身爲條件產生的, 因此即使改變母元素位置產生不同的子線, 主線皆不會改變, 且子線的交點仍在主線上。

而在這個章節中要提到圖形, 其主線是由圖形以及母元素共同產生的, 因此改變母元素的位置會造成主線的不同, 但仍然維持子線交點落在主線上的條件。故將這些圖形獨立出來稱爲「類子母線圖形」。

定理 5: 多點形的垂直子線類子母線性質

在觀察「直徑圓的子母線性質」的時候, 發現所有的子線都會與母點相交, 因此將整個圖形以母點爲反演中心進行反演, 在觀察與整理後得到了一個類子母線圖形。

(1) 多點形 (咖啡色) : 平面上繪製數個咖啡色點組成多點形。

(2) 母點 (紅色點) : 平面上繪製一點。(如圖 11-1)

(3) 子線 (藍色實線) : 將多點形中的點分別與母線做過此點且垂直於此點與母點連線段的直線, 這些直線即爲子線。(如圖 11-2)

(4) 主線 (黑色虛線) : 多點形中所有任選兩個點與母點的外接圓稱爲主線。(如圖 11-3)

則子線的交點都會落在主線上。(如圖 11-4)

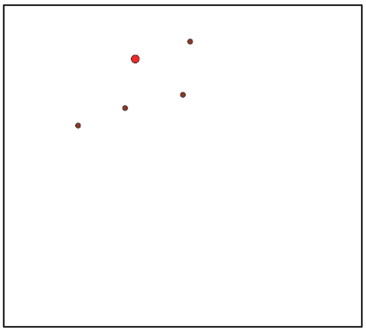

圖 11-1

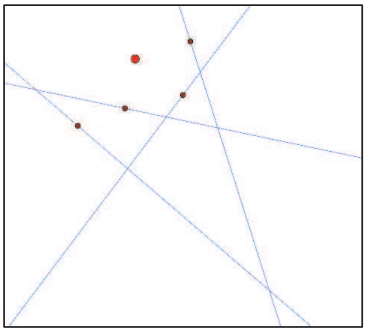

圖 11-2

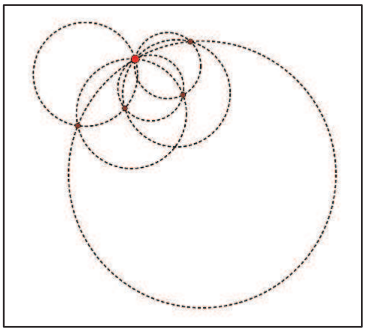

圖 11-3

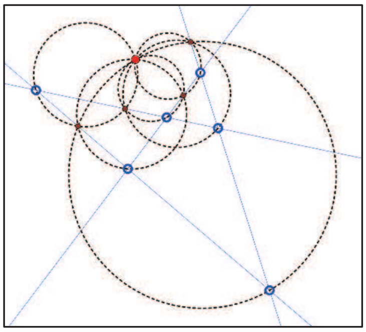

圖 11-4

圖 11: 四點形的垂直子線類子母線圖形

證明: 假設 P_1、P_2、$\cdots$、P_n 爲多點形中的 n 個點, 而 R 爲母點。

作 L_1 過 P_i 且使 $L_1 \perp \overline{P_iR}$, L_2 過 P_j 且使 $L_2 \perp \overline{P_jR}$, $i, j \in \mathbf{Z}^+ \wedge i, j \leq n \wedge i \neq j$,

設 L_1 與 L_2 交點爲 K, $\angle KP_iR = 90^\circ$, $\angle KP_jR = 90^\circ$, 所以 K, P_i, P_j, R 四點共圓。

得子線的交點 (點 K) 應落在主線上 (P_i、P_j、R 三點外接圓)。

定理6: 雙焦點圓錐曲線的類子母線性質

(1) 在平面上繪製一個多點形。

(2) 母元素爲一母點與一母數, 母點以紅色點表示, 母數以 k 表示。(如圖 12-1)

(3) 將多點形中的點分別與母點做半長軸長爲 k 的圓錐曲線, 以藍色曲線表示。(如圖 12-2)

(4) 將多點形的點兩兩做中垂線和半長軸長爲 $2k$ 的圓錐曲線, 以黑色虛線表示。(如圖 12-3)

則子線的交點都會落在主線上。(如圖 12-4)

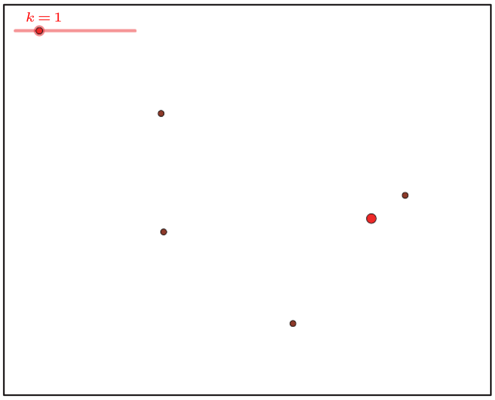

圖 12-1

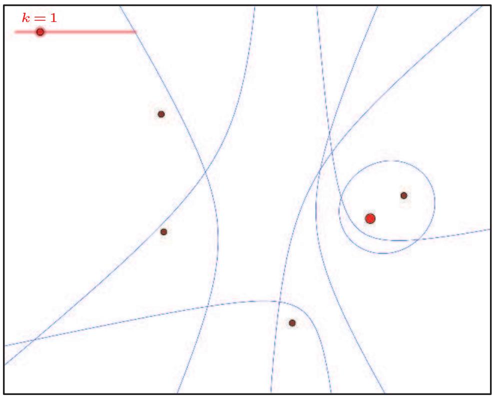

圖 12-2

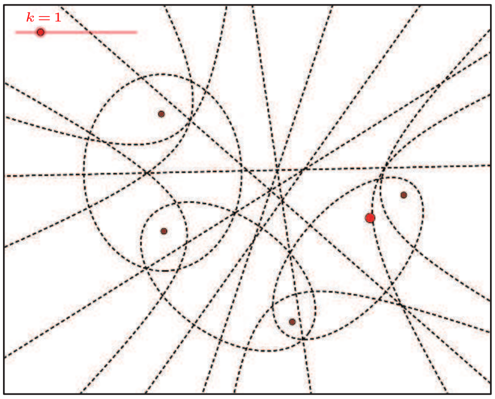

圖 12-3

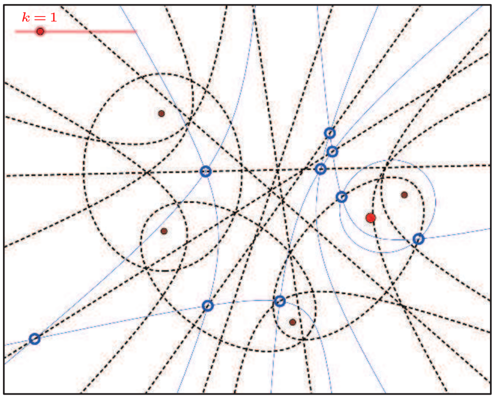

圖 12-4

圖 12: 四點形的半長軸長 $k = 1$ 的圓錐曲線類子母線圖形

證明: 假設 F_1, F_2 爲多點形中不同的兩個點, 而 R 爲母點。

設母數 $k \in \mathbf{Z}^+$。

作 $\Gamma_1 = \text{curve}(F_1, R, k)$, $\Gamma_2 = \text{curve}(F_2, R, k)$, Γ_1, Γ_2 爲兩條子線。

做點 $K \in \Gamma_1 \wedge K \in \Gamma_2$, 即 K 爲兩子線的交點。

Case 1: Γ_1, Γ_2 皆爲橢圓

$\because\ K \in \Gamma_1 \therefore\ \overline{KF_1} + \overline{KR} = 2k$

同理 $\overline{KF_2} + \overline{KR} = 2k$, 得 $\overline{KF_1} + \overline{KR} = \overline{KF_2} + \overline{KR} \Rightarrow \overline{KF_1} = \overline{KF_2}$

得子線的交點 (點 K) 應落在主線上 $(\text{crease}(F_1, F_2))$。

Case 2: Γ_1, Γ_2 皆爲雙曲線

$\because\ K \in \Gamma_1 \therefore\ |\overline{KF_1} - \overline{KR}| = 2k$

同理 $|\overline{KF_2} - \overline{KR}| = 2k$,

整理兩式可得 $\overline{KF_1} = \overline{KF_2}$ 或 $|\overline{KF_1} - \overline{KF_2}| = 4k$

若 $\overline{KF_1} = \overline{KF_2}$, 則點 K 落在 crease(F_1, F_2),

若 $|\overline{KF_1} - \overline{KF_2}| = 4k$, 由三角不等式得 $\overline{F_1F_2} \geq |\overline{KF_1} - \overline{KF_2}| = 4k$。

因此確認 curve$(F_1, F_2, 2k)$ 爲雙曲線或直線,

在 $\overline{F_1F_2} \geq |\overline{KF_1} - \overline{KF_2}| = 4k$ 時, $K \in$ curve$(F_1, F_2, 2k)$,

得子線的交點 (點 K) 應落在主線上 (crease(F_1, F_2) 或 curve$(F_1, F_2, 2k)$)。

Case 3: Γ_1, Γ_2 爲一橢圓一雙曲線

不妨設 Γ_1 爲橢圓、Γ_2 爲雙曲線

$\because\ K \in \Gamma_1 \therefore\ \overline{KF_1} + \overline{KR} = 2k$。

$\because\ K \in \Gamma_2 \therefore\ |\overline{KF_2} - \overline{KR}| = 2k$。

整理兩式得到 $\overline{KF_1} + \overline{KF_2} = 4k$ 或是 $\overline{KF_1} + \overline{KF_2} = 0$,

其中 $\overline{KF_1} + \overline{KF_2} = 0$ 顯然不合。

故推得 $\overline{KF_1} + \overline{KF_2} = 4k$, 由三角不等式得 $4k = \overline{KF_1} + \overline{KF_2} \geq \overline{F_1F_2}$,

因此確認 curve$(F_1, F_2, 2k)$ 爲橢圓或直線, 在 $\overline{KF_1} + \overline{KF_2} = 4k$ 時,

$K \in$ curve$(F_1, F_2, 2k)$ 得子線的交點 (點 K) 應落在主線上 (curve$(F_1, F_2, 2k)$)。

Case 4: Γ_1, Γ_2 中至少有一條爲直線

從定義四-3中, 我們得知若雙焦點圓錐曲線爲一條直線, 在此直線上的不同部分分別符合橢圓與雙曲線的性質, 因此我們可以根據點 K 在直線上的相對位置, 來確定此時的點 K 符合的是雙曲線或是橢圓的性質, 故 Case 4 一定符合 Case 1∼3 其中一項。

綜合上述所有 Case, 可得子線交點 (點 K) 一定落在主線 (crease(F_1, F_2) 或 curve$(F_1, F_2, 2k)$) 上。

範例6.1: 多點形的橢圓子母線性質

此爲定理六的一個特例。當母數 k 大於多點形與母點的最遠距離的一半時, 產生出來的子線皆會是橢圓。而在定理六證明的 Case 1 中, 了解到橢圓子線彼此的交點只會落在中垂線上, 因此主線只需使用中垂線即可。而因此主線不受到母點與母數影響, 因此此圖形爲子母線圖形而非類子母線圖形。

(1) 在平面上繪製一個多點形, 以咖啡色表示。

(2) 母元素爲母點與母數, 母點以紅色點表示, 母數以 k 表示, 此時 k 須大於多點形中與母點最遠的點的距離的一半。(如圖 13-1)

(3) 將多點形中的點分別與母點做半長軸爲 k 的橢圓, 以藍色曲線表示。(如圖 13-2)

(4) 將多點形中的點兩兩做中垂線, 以黑色虛線表示。(如圖 13-3)

則此時子線的交點皆落在主線上。(如圖 13-4)

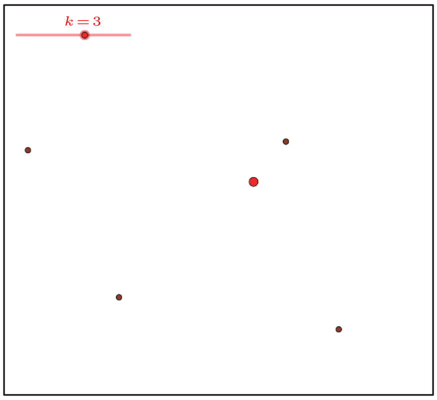

圖 13-1

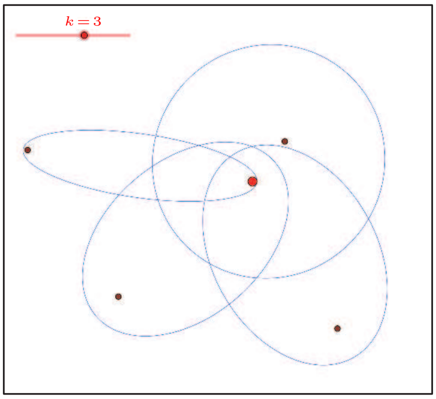

圖 13-2

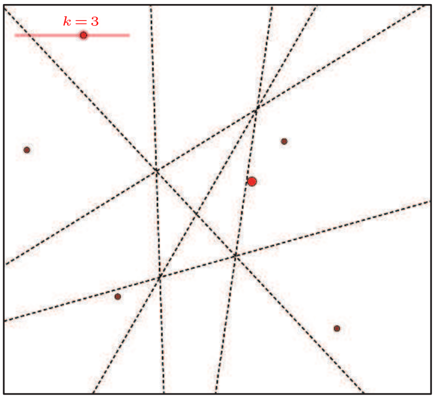

圖 13-3

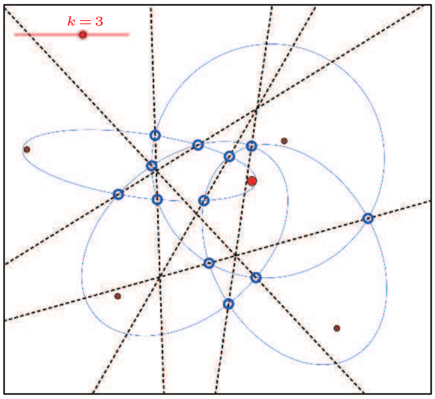

圖 13-4

圖 13: 四點形的半長軸長 $k = 3$ 的橢圓子母線圖形

範例6.2: 多點形的雙曲線類子母線性質

與範例 6.1 同爲定理五的範例。當母數 k 小於多點形與母點最近距離的一半時, 產生出來的子線皆會是雙曲線。

(1) 在平面上繪製一個多點形, 以咖啡色表示。
(2) 母元素爲母點與母數, 母點以紅色點表示, 母數以 k 表示, 此時 k 須大於多點形中與母點最遠的點的距離的一半。(如圖 14-1)
(3) 將多點形中的點分別與母點做半長軸爲 k 的雙曲線, 以藍色曲線表示。(如圖 14-2)
(4) 將多點形中的點兩兩做中垂線即半長軸爲 $2k$ 的圓錐曲線作爲主線, 以黑色虛線表示。(如圖 14-3)

則此時子線的交點皆落在主線上。(如圖 14-4)

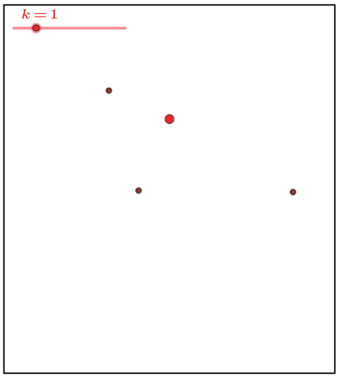

圖 14-1

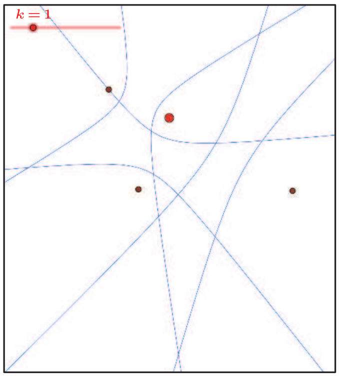

圖 14-2

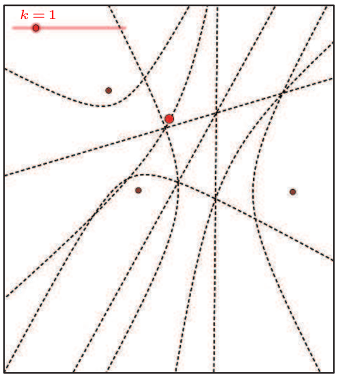

圖 14-3

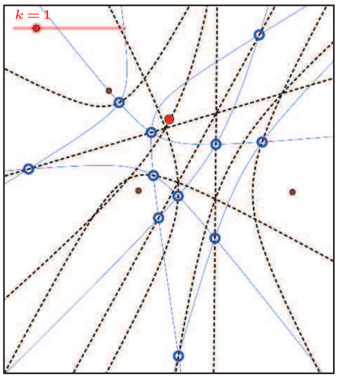

圖 14-4

圖 14: 三點形的半長軸長 $k=1$ 的雙曲線類子母線圖形

在定理五證明的 Case 2 中, 可以了解子線的交點落在直線或是雙曲線的主線上。但此繪製主線的方法可能會產生橢圓形的主線。在定理五證明中, 已經證明了若是存在會落在雙曲線上的子線交點, 則一定可以確定那條主線爲雙曲線。換言之在這個範例中, 若出現橢圓的主線,

則可以確定不會有任何子線交點落在這橢圓形的主線上。

範例6.3: 多點形的單邊雙曲線子母線性質

此爲範例 6.2 的特例, 藉由討論範例 6.2 中不同的交點來試圖簡化圖形, 最後發現當子線全部取雙曲線的同一邊, 則主線只需使用中垂線, 產生的圖形爲子母線圖形。

(1) 在平面上繪製一個多點形, 以咖啡色表示。

(2) 母元素爲母點與母數, 母點以紅色點表示, 母數以 k 表示, 此時 k 須大於多點形中與母點最遠的點的距離的一半。(如圖 15-1)

(3) 將多點形中的點分別與母點做半長軸爲 k 的雙曲線, 並選擇全部留下靠近母點的一側或是全部留下靠近多點形的一側, 靠近母點一側則稱爲「單邊近母點雙曲線」, 遠離母點一側的則爲「單邊遠母點雙曲線」, 以藍色曲線表示。(如圖 15-2)

(4) 將多點形中的點兩兩做中垂線作爲主線, 以黑色虛線表示。(如圖 15-3)

則此時子線的交點皆落在主線上。(如圖 15-4)

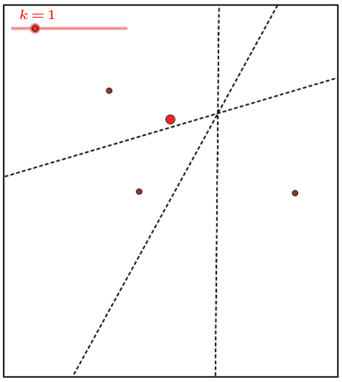

圖 15-1

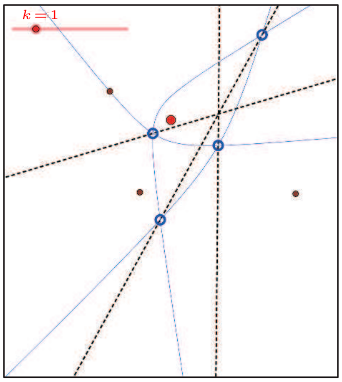

圖 15-2

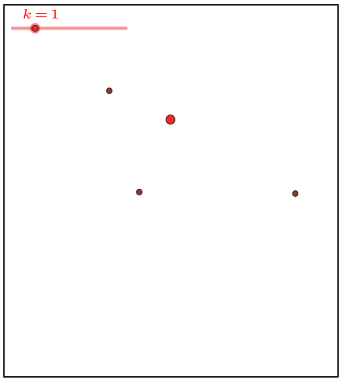

圖 15-3

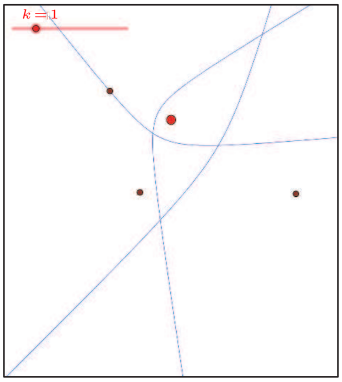

圖 15-4

圖 15: 四點形的半長軸長 $k = 1$ 的單邊近母點雙曲線子母線圖形

陸、研究結果與結論

本研究透過對摺產生摺痕的方式, 產生出來的線條具有到兩邊等距的性質, 並利用此性質可以產生子母線圖形, 此外, 利用點對點、線對線、點對線不同的摺痕圖形的統合, 本研究可以製造出多點多線形的子母線圖形。而利用其他的圖形繪製, 也可以產生具有子母線性質的子母線圖形與類子母線圖形。而未來研究議題與發展簡述如下。

目前子母線圖形皆在同一個平面上進行討論, 以目前的結論來看有極大的可能可以在三維空間甚至是更高維度的空間進行探討, 且也不排除在二維空間中存在其他子母線圖形或是一個可以統合大部分子母線圖形的方式。

實務應用上, 目前子母線圖形在生活中可以實際應用的例子較缺乏, 或許在工程或是其他領域有機會可以找出子母線圖形在現實中的用途。

致謝詞

感謝我的導師黃世穎老師, 在研究這條路上一直是挺我的。當我遇到困境時, 他總是給我適當的提點, 與老師的討論中, 讓我獲得源源不絕的靈感。感謝游森棚教授, 鼓勵我增加新的方向, 投稿期刊發表, 使我的研究可以和更多人分享。感謝建中特教組的所有老師, 無私地支援我研究空間和設備, 讓我無後顧之憂。本文主要內容參加旺宏科學獎得佳作, 作者現爲建國中學三年級學生。

參考資料

1. Thomas Hull,《數學摺紙計畫:30個課程活動探索》。世茂, 116-120。
2. Kazuo Haga (2008). Origamics : Mathematical Explorations Through Paper Folding, 71-90.
3. 包絡線, 維基百科, 取自
`https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8C%85%E7%B5%A1%E7%B7%9A`

—本文作者投稿時就讀台北市立建國中學三年級—