數學傳播　45卷4期, pp. 43-49

# 歐拉不等式的另證

連威翔

## 一、前言

由參考資料 [1] 的內容, 我們知道幾何學中的歐拉定理是指對任意三角形而言, 其外心與內心的距離 $d$ 滿足下式:

$$d^2 = R(R-2r), \tag{1}$$

其中 $R$ 爲三角形的外接圓半徑, $r$ 爲內切圓半徑。利用 (1) 式中 $d^2 \geq 0$ 的條件, 我們可推得底下的歐拉不等式:

$$R \geq 2r. \tag{2}$$

當三角形三邊等長時, 上式等號成立。關於 (1) 式的證明, 請參考與 [1] 對應的中文條目。

某次, 筆者研究過後找出了對 (2) 式的另證, 使用的工具主要是餘弦定理、正弦定理、海龍公式與算幾不等式。此證明不必透過 (1) 式即可完成, 底下第二節中筆者將予以介紹。而接著的第三節中, 筆者將使用向量工具提出對 (1) 式的另證, 雖然此另證的篇幅較長, 但仍希望在提出之後能夠具有一些參考價值。

## 二、歐拉不等式的證明

令 $a, b, c$ 分別是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的對邊長, 且令 $R, r$ 分別爲 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑與內切圓半徑, 並將 $\triangle ABC$ 的面積簡記爲 $\triangle$。可參考下圖:

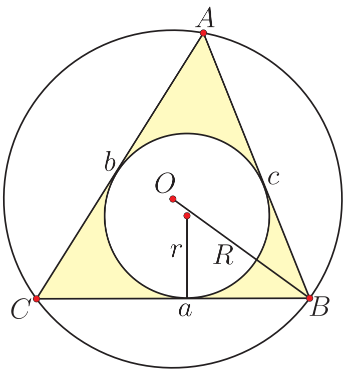


圖1

對於 (2) 式, 筆者的證明如下:

**證明**: 首先由餘弦定理可知

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \tag{3}$$

接著, 由正弦定理可知

$$\sin A=\frac{a}{2R}. \tag{4}$$

利用三角恆等式 $\cos^2 A+\sin^2 A=1$ 可知

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A.$$

將 (3), (4) 兩式代入上式, 可得

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{4R^2}&=1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}=\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}\\&=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}\\&=\frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{4b^2c^2}\\&=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}.\end{aligned}$$

觀察上式的頭尾, 可知

$$R^2=\frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}. \tag{5}$$

此時引進海龍面積公式, 將 $\triangle ABC$ 的面積 $\triangle$ 表爲

$$\begin{aligned}\triangle&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $s$ 表 $\triangle ABC$ 的半周長, 即

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c). \tag{7}$$

由 (5), (6) 兩式可知

$$R=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}=\frac{abc}{4\triangle}. \tag{8}$$

另一方面, $\triangle ABC$ 的面積 $\triangle$ 可由內切圓半徑 $r$ 與半周長 $s$ 表爲 $\triangle = rs$, 因此有

$$r=\frac{\triangle}{s}. \tag{9}$$

考慮 (8)÷(9), 並回頭利用 (6), (7) 兩式, 可得

$$\begin{aligned}\frac{R}{r}&=\frac{sabc}{4\triangle^2}=\frac{sabc}{4s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\frac{2abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.\end{aligned} \tag{10}$$

觀察 (10) 式後, 我們考慮證明底下的不等式：

$$abc\geq(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c). \tag{11}$$

先令

$$S=b+c-a,\quad T=c+a-b,\quad U=a+b-c,$$

由三角形任兩邊長之和大於第三邊長的性質, 可知 $S,T,U$ 三數均正, 且有

$$\frac{T+U}{2}=a,\quad \frac{U+S}{2}=b,\quad \frac{S+T}{2}=c.$$

利用上述六個 $S,T,U$ 與 $a,b,c$ 之間的關係式, 知 (11) 式可改寫爲如下的等價式子：

$$\frac{S+T}{2}\cdot\frac{T+U}{2}\cdot\frac{U+S}{2}\geq STU. \tag{12}$$

因爲 $S,T,U$ 三數均正, 由算幾不等式可寫下

$$\frac{S+T}{2}\geq\sqrt{ST},\qquad \frac{T+U}{2}\geq\sqrt{TU},\qquad \frac{U+S}{2}\geq\sqrt{US}.$$

將上述三個不等式相乘後, 即可證明 (12) 式成立, 因此與其等價的 (11) 式成立。最後, 由 (10), (11) 兩式即可得出

$$\frac{R}{r}=\frac{2abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\geq 2,$$

因此有 $R\geq 2r$。至此, 我們證得歐拉不等式 (2) 成立。

本節最後, 我們不妨探討一下 (2) 式等號成立的充要條件。首先, 若圖1中我們所關心的 $\triangle ABC$ 三邊等長, 則有 $a=b=c$, 此時因 (11) 式的等號成立, 利用 (10) 式可推得 $R=2r$, 故 (2) 式等號成立。

另一方面, 若 (2) 式等號成立, 我們先回顧於 (11) 式底下所假設的 $S,T,U$ 三數。此時若 $S=T=U$ 不成立, 不失一般性可假設 $S\neq T$, 因此 $\dfrac{S+T}{2}>\sqrt{ST}$, 從而 (12) 式與

(11) 式的等號不成立。接著利用 (11) 式不取等號的結果配合 (10) 式可推得 $R>2r$, 故 (2) 式等號不成立, 因此得到矛盾, 從而確定 $S=T=U$ 成立。最後, 利用上方 $S,T,U$ 與 $a,b,c$ 之間的關係式, 由 $S=T=U$ 的條件不難解出 $a=b=c$。

透過以上討論, 我們即確定歐拉不等式 (2) 等號成立的充要條件爲三角形的三邊等長。

## 三、歐拉定理的向量證明

在與 [1] 對應的中文條目中對歐拉定理所提出的證明, 使用了平面幾何的手法。我們可以問, 是否可利用高中時所學到的向量工具來重新證明歐拉定理的結論(即 (1) 式) 呢? 答案是肯定的, 請參考底下的證明：

**證明**：令 $O,I$ 分別爲 $\triangle ABC$ 的外心與內心, 而其他相關的資訊與符號如同第二節開頭所介紹, 請讀者往前參考。由參考資料 [2], 若 $X$ 爲 $\triangle ABC$ 所在平面上的任一點, 則我們有

$$\overrightarrow{XI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{XA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{XB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{XC}\ . \tag{13}$$

對上式取 $X=O$, 其中 $O$ 爲 $\triangle ABC$ 的外心, 則有

$$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}\,).$$

設 $|\overrightarrow{OI}\,|=d$, 因此 $d$ 爲 $\triangle ABC$ 內心與外心之距離。利用上式, 我們可寫下

$$\begin{aligned} d^2 &=|\overrightarrow{OI}\,|^2=\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OI}\\ &=\frac{1}{(a+b+c)^2}(a^2|\overrightarrow{OA}\,|^2+b^2|\overrightarrow{OB}\,|^2+c^2|\overrightarrow{OC}\,|^2+2ab\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\ &\quad +2bc\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2ca\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\,). \end{aligned}\tag{14}$$

觀察上式最後的結果, 首先我們知道

$$|\overrightarrow{OA}\,|=|\overrightarrow{OB}\,|=|\overrightarrow{OC}\,|=R, \tag{15}$$

其中 $R$ 爲外接圓半徑。接著參考圖 1, 連接 $\overline{OA}$ 並考慮一般的情況, 我們可推得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 之值滿足

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=|\overrightarrow{OA}\,||\overrightarrow{OB}\,|\cos\angle AOB=R^2\cos(2\angle ACB)=R^2\cos 2C\\ &=R^2(2\cos^2 C-1). \end{aligned}\tag{16}$$

注意上式中, 我們用上了圓心角 $\angle AOB$ 與圓周角 $\angle ACB$ 所滿足的關係式 $\angle AOB = 2\angle ACB$ ($AB$ 弧 $\leq 180^\circ$) 或 $\angle AOB = 2\pi - 2\angle ACB$ ($AB$ 弧 $> 180^\circ$)。其中 $AB$ 弧 $\leq 180^\circ$ 的情況, 請參考下圖：

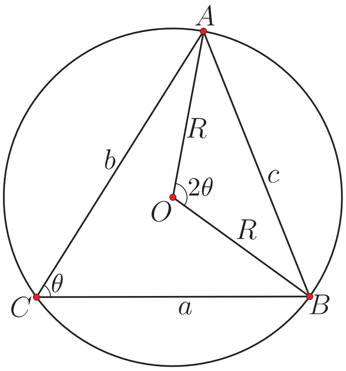


圖2

而 $AB$ 弧 $> 180^\circ$ 的情況, 讀者不妨自行練習畫出其參考圖形。仿照 (16) 式的推導方式, 同理可推得

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2(2\cos^2 A - 1), \tag{17}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = R^2(2\cos^2 B - 1). \tag{18}$$

將 (15), (16), (17), (18) 四式代入 (14) 式後, 可繼續計算出底下的結果：

$$\begin{aligned}
d^2 &= \frac{1}{(a+b+c)^2}[(a^2+b^2+c^2)R^2+2abR^2(2\cos^2 C-1)+2bcR^2(2\cos^2 A-1)\\
&\quad +2caR^2(2\cos^2 B-1)]\\
&= \frac{R^2}{(a+b+c)^2}[(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)+2ab(2\cos^2 C-2)\\
&\quad +2bc(2\cos^2 A-2)+2ca(2\cos^2 B-2)]\\
&= \frac{R^2}{(a+b+c)^2}[(a+b+c)^2+4ab(\cos^2 C-1)+4bc(\cos^2 A-1)+4ca(\cos^2 B-1)]\\
&= R^2 - \frac{4R^2}{(a+b+c)^2}(ab\sin^2 C+bc\sin^2 A+ca\sin^2 B).
\end{aligned}$$

使用正弦定理 (請參考上一節 (4) 式), 可將上式繼續改寫爲

$$\begin{aligned}
d^2 &= R^2 - \frac{4R^2}{(a+b+c)^2}\left(ab\cdot\frac{c^2}{4R^2}+bc\cdot\frac{a^2}{4R^2}+ca\cdot\frac{b^2}{4R^2}\right)\\
&= R^2 - \frac{abc}{(a+b+c)^2}(a+b+c) = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}.
\end{aligned} \tag{19}$$

此時回顧第二節中的 (8), (9) 兩式, 考慮 (8)×(9), 可得

$$Rr=\frac{abc}{4\triangle}\cdot\frac{\triangle}{s}=\frac{abc}{2(a+b+c)}. \tag{20}$$

最後, 利用 (19), (20) 兩式, 即得

$$d^2=R^2-2\cdot\frac{abc}{2(a+b+c)}=R^2-2Rr=R(R-2r). \tag{21}$$

因此我們證明了第一節中歐拉定理的結論, 即 (1) 式。

接下來, 我們可仿照上一節末所做的討論, 利用上述各式再次探討歐拉不等式 (2) 等號成立的充要條件。首先, 若圖1中 $\triangle ABC$ 三邊等長, 則 $\triangle ABC$ 爲正三角形。由於此時 $\triangle ABC$ 的內心 $I$ 與外心 $O$ 兩點重合, 因此可依序利用 (21), (14) 兩式, 得知

$$R(R-2r)=d^2=|\overrightarrow{OI}|^2=\overline{OI}^2=0,$$

從而有 $R=2r$, 故 (2) 式等號成立。

另一方面, 若 (2) 式等號成立, 即 $R=2r$, 此時依序利用 (14), (21) 兩式可知

$$\overline{OI}^2=|\overrightarrow{OI}|^2=d^2=R(R-2r)=0,$$

從而有 $\overline{OI}=0$, 這表示內心 $I$ 與外心 $O$ 重合。此時在 $\triangle ABC$ 中, 我們先連接 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, 並作 $\overline{OD}\perp\overline{BC}$ 於 $D$、$\overline{OE}\perp\overline{CA}$ 於 $E$、$\overline{OF}\perp\overline{AB}$ 於 $F$, 如下圖所示:

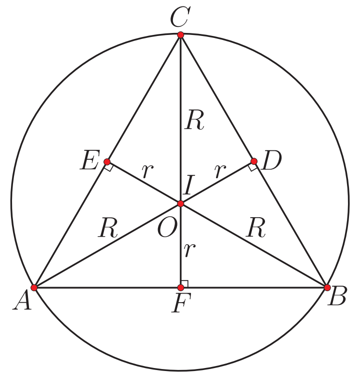


圖3

上圖中, 因爲

$$\overline{OC}=\overline{OC},\quad \overline{OD}=\overline{OE}=r,\quad \angle ODC=\angle OEC=90^\circ,$$

所以 $\triangle ODC$ 與 $\triangle OEC$ 兩者全等 (RHS 性質); 此外, 因爲

$$\overline{OE}=\overline{OE},\quad \overline{OC}=\overline{OA}=R,\quad \angle OEC=\angle OEA=90^\circ,$$

所以 $\triangle OEC$ 與 $\triangle OEA$ 兩者全等 (RHS 性質)。至此, 我們知道 $\triangle ODC\cong\triangle OEC\cong\triangle OEA$。事實上, 仿照上述過程, 我們可以證明

$$\triangle ODC\cong\triangle OEC\cong\triangle OEA\cong\triangle OFA\cong\triangle OFB\cong\triangle ODB.$$

圖 3 中我們令 $\overline{CD}=s$, 利用上式六個三角形全等的條件, 可知 $\overline{CD}=\overline{CE}=\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{BF}=\overline{BD}=s$, 再由圖 3 可知

$$a=\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=2s,$$

且同理可知 $b=c=2s$, 因此得到 $a=b=c$。

由以上討論, 我們再次確定歐拉不等式 (2) 等號成立的充要條件爲三角形的三邊等長。注意在參考資料 [1] 前言的最後一句話也有提到此充要條件, 其說法爲 “$R\geq 2r$ holds with equality only in the equilateral case”。因此, 我們也可將上一節末與本節對上述充要條件的探討過程視爲對 [1] 的補充。

## 四、結語

本文寫作的緣起, 是出自對 (2) 式的好奇, 想找出有別於 [1] 中使用 (1) 式推得 (2) 式之證明的另證。其中, 寫作第二節的內容至 (11) 式時曾稍遇瓶頸, 直到引入該式下方對 $S,T,U$ 三數的假設後, 才順利證出 (11) 式與 (2) 式。而第三節的內容, 則是在完成第二節的內容後, 想到可利用先前在 [2] 文看過的內心向量關係式 (13) 來試著找出對 (1) 式的另證, 並幸運地在將 (13) 式的 $\overrightarrow{XI}$ 取爲 $\overrightarrow{OI}$ 之後順利找出證明。

本文中進行證明時所用的手法, 大部分在我們高中時期就會學到。雖然寫作本文時筆者距離高中畢業已經 20 幾年了, 但當初學到的工具卻仍然很有用處。這些工具如果不用, 相信時間久了也會生疏; 但若能經常使用, 相信大家都可以熟能生巧, 並從中發現不少樂趣。最後, 筆者在此要感謝 [2] 文的作者, 也要感謝高中數學老師許燦煌先生當年對筆者的教導。

## 參考文獻

1. Euler's theorem in geometry, Wikipedia.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_theorem_in_geometry`.
2. 阮瑞泰。三角形的四心之向量關係式。數學傳播季刊, 34(1), 29-34, 2010。
`https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d341/34103.pdf`.

—本文作者投稿時任職榮廣實業有限公司(資源回收業)—