數學傳播 45卷4期, pp. 34-42

等角差線
—漸近線及其性質

李永約

一、研究動機

高三時偶然遇到一個學測模擬考題目, 感覺非常有趣, 題目敘述如下:

如果 $\triangle ABC$ 在 $\overline{BC}=5$, $\angle B=\angle C+40^\circ$ 之下, 對每一個 $\angle B$ 的 $\triangle ABC$ 是否唯一。

以考試來說, 這題解完就結束了, 但考完後驀然回首, 感覺我有需要用更加嚴謹的方法證明這件事情, 於是著手這次研究。

在高中數學裡討論到平面上相異兩定點 F_1 、F_2, 設點 P 為平面上另一點, 使得 P 到此兩點的距離差的絕對值為定值 $2a$, 當 $0<2a<\overline{F_1F_2}$ 時, P 點所成圖形為一雙曲線, 但是沒有討論過使得 $|\angle PF_1F_2-\angle PF_2F_1|$ 為一個定值, 這是我感興趣的議題。在研究時, 寫出參數式, 並利用 GeoGebra 作圖, 跑出來的美麗曲線看起來很有學術價值, 而且非常簡單非常美, 我稱之等角差線, 於是除了找到唯一性外, 我試圖找出有關等角差線如漸近線和一些性質在此篇舉隅。

二、定義符號與座標系

Definition 1. 等角差線 Γ_α^l。

$\triangle ABC$, $\overline{BC}=l$, $\angle B=\angle C+\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$, 我們稱動點 A 之軌跡為 $\overline{BC}=l$ 時之 α 等角差線 Γ_α^l, 如果 $l=1$ 可以簡寫成 Γ_α。此篇中 α 都在 $0<\alpha<\pi$ 的範圍內。

Definition 2. $x_{\max}$。

$x_{\max}$ 為 Γ_α^l 上 $\dfrac{dx}{dy}=0$ 或 x 對角度微分為 0 的點 x 座標 (通常一條等角差線有兩點)。

Definition 3. 建立座標系。

B 爲原點, $\overleftrightarrow{BC}$ 爲 x 軸且 $\overrightarrow{BC}$ 方向爲正, A 於 $\overleftrightarrow{BC}$ 之上, 作一直角座標系, 如圖 1

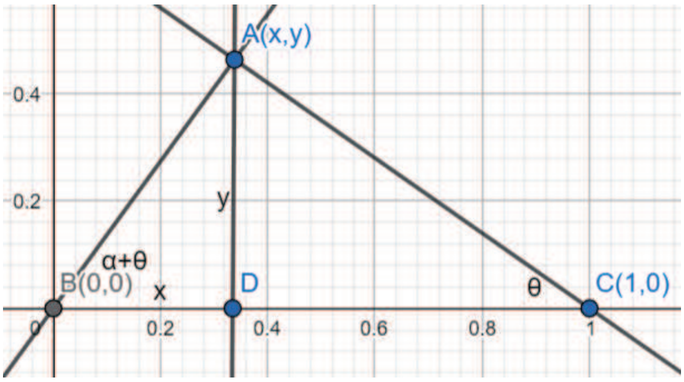

圖 1

圖 1 是把 l 當作 1 作圖, 且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$, D 在 $\overline{BC}$ 上。

三、參數式與示例圖

利用圖 1, 經過運算, 我們可得 Γ^l_α 之 x, y 之 θ 參數式:

$$x\tan(\theta+\alpha) = y = (l-x)\tan\theta \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{l\tan\theta}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}, \\ y = \dfrac{l\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}. \end{cases}$$

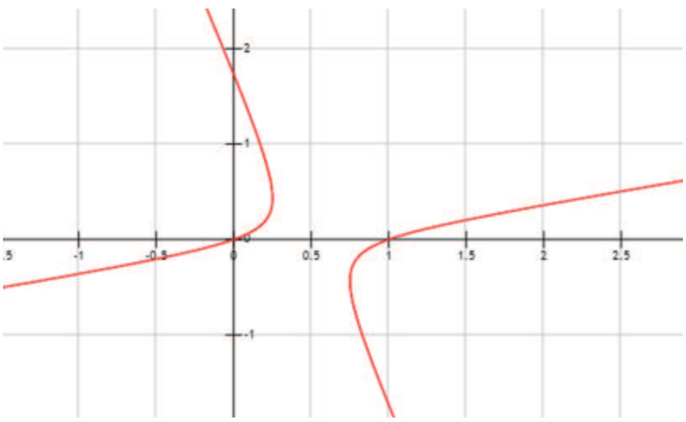

圖 2

圖 2 爲 $l=1$, $\alpha=\pi/6$ 的情況, 即 $\Gamma_{\pi/6}$。

明顯能看出有兩點對 y 微分爲零, 即有兩個 $x_{\max}$。

這個圖形似乎對點 $(0.5,0)$ 有點對稱的性質, 爲了能夠方便找到更多性質, 我將 Γ_α^l 的參數式稍作修改如下:

$$\Gamma_\alpha^l:\begin{cases} x=\dfrac{l\tan\theta}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}-\dfrac{l}{2}, \\ y=\dfrac{l\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta}, \end{cases}$$

因此 $\triangle ABC$ 向左平移 $\dfrac{l}{2}$, 往後也用這個參數式討論。

四、唯一性的證明

Theorem 1. 已給定 $\triangle ABC$ 之$\overline{BC}$ 與 α, $\forall\theta$ $(0\le\theta\le\beta)$, 存在不同 $\triangle ABC$ (即原題目所求), 其中定義 $\beta=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$。

因爲 $\angle A\ge 0$, 故

$$\angle B+\angle C\le\pi\ \Rightarrow\ (\theta+\alpha)+\theta=2\theta+\alpha\le\pi\Rightarrow\theta\le\frac{\pi-\alpha}{2},$$

$\forall$ $\triangle ABC$, $\exists y$ 爲過 A 交於 $\overleftrightarrow{BC}$ 之 $\triangle ABC$ 之高, 現在我們證明, 對於任一滿足條件之 θ, 總能找到唯一的 y (即 y 爲 θ 的單射函數)

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{l\cdot(\sec(\theta+\alpha)\tan\theta)^2+(\sec\theta\tan(\theta+\alpha))^2}{(\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta)^2}\ge 0.$$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ 時,

$$\begin{cases} \sec(\theta+\alpha)\tan\theta=0, & (1) \\ \sec\theta\tan(\theta+\alpha)=0, & (2) \end{cases}$$

只有在 θ 或 $\theta+\alpha=n\pi$ $(n\in Z)$ 時, $\tan\theta$ 或 $\tan(\theta+\alpha)=0$ 成立, 即分別 (1) 或 (2) 成立, 因爲 $0\le\theta\le\beta$, $\alpha\le\theta+\alpha\le\beta+\alpha<\pi$, 所以只有 $\theta=0$ 時 (1) 成立, 而因爲 $\tan\alpha>0$, $\sec 0=1$, 故 (2) 不成立。

$\therefore\ \dfrac{dy}{d\theta}>0$, 可知在 $0\le\theta\le\beta$ 之下 (在此僅討論原題), y 對 θ 爲嚴格遞增, 故 y 爲 θ 的單射函數, QED.

五、奇函數性質與漸近線

接下來的討論都是廣義三角的範圍, 從參數式易知其 π 爲一循環的性質, 另外負角度也可以納入運算。

Lemma 1. Γ_α^l 是奇函數曲線, 在兩角度相加爲 2β 時符合奇函數特徵。

令 ϕ,

$$\phi = 2\beta - \theta = \pi - \alpha - \theta.$$

我分成 x, y 來討論, 現證 ϕ 和 θ 時 x, y 之值分別相加爲零, 即互爲相反數。

$$\begin{aligned}
x :& \Big(\frac{l\tan\theta}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta} - \frac{l}{2}\Big) + \Big(\frac{l\tan\phi}{\tan(\phi+\alpha)+\tan\phi} - \frac{l}{2}\Big)\\
=&\frac{l\tan\theta}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta} + \frac{l\tan(\pi-\alpha-\theta)}{\tan(\pi-\theta)+\tan(\pi-\alpha-\theta)} - l\\
=&\frac{l\tan\theta}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta} + \frac{-l\tan(\alpha+\theta)}{-\tan\theta-\tan(\alpha+\theta)} - l\\
=&\frac{l\tan\theta}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta} + \frac{l\tan(\alpha+\theta)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta} - l = 0,\\
y :& \frac{l\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta} + \frac{l\tan\phi\tan(\phi+\alpha)}{\tan(\phi+\alpha)+\tan\phi}\\
=&\frac{l\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta} + \frac{l\tan(\pi-\alpha-\theta)\tan(\pi-\theta)}{\tan(\pi-\theta)+\tan(\pi-\alpha-\theta)}\\
=&\frac{l\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta} + \frac{l\tan(\alpha+\theta)\tan\theta}{-\tan\theta-\tan(\alpha+\theta)}\\
=&\frac{l\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta} - \frac{l\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta} = 0,
\end{aligned}$$

因爲 Γ_α^l 的 x, y 值在 ϕ 和 θ 時分別相加爲零, 故 Γ_α^l 爲一奇函數曲線。

Theorem 2. Γ_α^l 之漸近線爲

$$y = -\tan\beta x \text{ 和 } y = \cot\beta x.$$

Case 1. $y = -\tan\beta x$.

設等角差線 Γ_α^l 原 x, y 分量分別表示成 x', y', 而旋轉變換後 x, y 分量分別表示成 x'', y'' 分量。

將原等角差線用旋轉矩陣旋轉 β 角

$$\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\dfrac{\alpha}{2} & -\cos\dfrac{\alpha}{2}\\ \cos\dfrac{\alpha}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{l\cdot\tan\theta}{\tan\theta+\tan(\theta+\alpha)}-\dfrac{l}{2}\\ \dfrac{l\cdot\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan\theta+\tan(\theta+\alpha)}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\Big(\dfrac{l\cdot\tan\theta}{\tan\theta+\tan(\theta+\alpha)}\Big)\Big(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\tan(\theta+\alpha)\Big)-\dfrac{l}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\\ \Big(\dfrac{l\cdot\tan\theta}{\tan\theta+\tan(\theta+\alpha)}\Big)\Big(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\tan(\theta+\alpha)\Big)-\dfrac{l}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x''\\ y''\end{bmatrix}.$$

接著, 我們觀察 $\theta\to\beta$ 時的情況:

$$\lim_{\theta\to\beta}x''=\lim_{\theta\to 0^-}\left[\frac{l\cdot\tan(\theta-\beta)(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\tan(\theta-\beta+\alpha))}{\tan(\theta-\beta)+\tan(\theta-\beta+\alpha)}-\frac{l}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right]=-\infty,$$
$$\lim_{\theta\to\beta}y''=\lim_{\theta\to\beta}\left[\frac{l\cdot\tan\theta}{\tan\theta+\tan(\theta+\alpha)}[\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\tan(\theta+\alpha)]-\frac{l}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right]$$
$$=\lim_{\theta\to\beta}\left[\frac{l\{\sec^2\theta[\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\tan(\theta+\alpha)]+\sin\dfrac{\alpha}{2}\tan\theta\sec^2(\theta+\alpha)\}}{\sec^2\theta+\sec^2(\theta+\alpha)}-\frac{l}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right].$$

上式於第二個等號利用羅必達定理, 因此

$$\lim_{\theta\to\beta}y''=0.$$

所以此等角差線變換後有一漸近線 $y=0$。

將此漸近線反變換回去即可得吾人所要原等角差線漸近線, 現證此漸近線為

$$y=-\tan\beta x.$$

設漸近線原 x,y 分量分別表示成 X,Y, 而變換後之漸近線 x,y 分量分別表示成 X',Y'

$$\begin{bmatrix}\sin\dfrac{\alpha}{2} & -\cos\dfrac{\alpha}{2}\\ \cos\dfrac{\alpha}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X'\\ Y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\ 0\end{bmatrix}\quad (t\text{ 為參數}),$$

$$X=\begin{vmatrix}t & -\cos\dfrac{\alpha}{2}\\ 0 & \sin\dfrac{\alpha}{2}\end{vmatrix}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot t, Y=\begin{vmatrix}\sin\dfrac{\alpha}{2} & t\\ \cos\dfrac{\alpha}{2} & 0\end{vmatrix}=-\cos\frac{\alpha}{2}\cdot t.$$

將 X,Y 相除可得

$$\frac{Y}{X}=-\cot\frac{\alpha}{2}\ \Rightarrow\ Y=-\cot\frac{\alpha}{2}\cdot X\ \Rightarrow\ y=-\tan\beta x.$$

所以等角差線 Γ_α^l 之其中一條漸近線爲

$$y = -\tan\beta x. \qquad \text{QED.}$$

Case 2. $y = \cot\beta x$.

設等角差線 Γ_α^l 原x, y分量分別表示成x', y', 而旋轉變換後x, y分量分別表示成x'', y''分量。

將原等角差線用旋轉矩陣旋轉 $-\alpha/2$ 角

$$\begin{bmatrix} \cos(-\frac{\alpha}{2}) & -\sin(-\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(-\frac{\alpha}{2}) & \cos(-\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{l\cdot\tan\theta}{\tan\theta+\tan(\theta+\alpha)} - \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{l\cdot\tan\theta\tan(\theta+\alpha)}{\tan\theta+\tan(\theta+\alpha)} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \Big(\dfrac{l\cdot\tan\theta}{\tan\theta+\tan(\theta+\alpha)}\Big)\Big(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\tan(\theta+\alpha)\Big) - \dfrac{l}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2} \\ \Big(\dfrac{l\cdot\tan\theta}{\tan\theta+\tan(\theta+\alpha)}\Big)\Big(-\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\tan(\theta+\alpha)\Big) + \dfrac{l}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}.$$

接著, 我們觀察 $\theta\to\beta$ 時的情況:

$$\lim_{\theta\to\beta} x'' = \lim_{\theta\to 0^-}\left[\frac{l\cdot\tan(\theta-\beta)(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\tan(\theta-\beta+\alpha))}{\tan(\theta-\beta)+\tan(\theta-\beta+\alpha)} - \frac{l}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right] = -\infty,$$
$$\lim_{\theta\to\beta} y'' = \lim_{\theta\to\beta}\left[\frac{l\cdot\tan\theta}{\tan\theta+\tan(\theta+\alpha)}[-\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\tan(\theta+\alpha)] + \frac{l}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right]$$
$$= \lim_{\theta\to\beta}\left[\frac{l\{\sec^2\theta[-\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\tan(\theta+\alpha)]-\cos\dfrac{\alpha}{2}\tan\theta\sec^2(\theta+\alpha)\}}{\sec^2\theta+\sec^2(\theta+\alpha)} + \frac{l}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right].$$

上式於第二個等號利用羅必達定理, 因此

$$\lim_{\theta\to\beta} y'' = 0,$$

所以此等角差線變換後有一漸近線 $y = 0$。

將此漸近線反變換回去即可得吾人所要原等角差線漸近線, 現證此漸近線爲

$$y = \cot\beta x.$$

設漸近線原 x, y 分量分別表示成 X, Y, 而變換後之漸近線 x, y 分量分別表示成 X', Y'

$$\begin{bmatrix} \cos\dfrac{\alpha}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ -\sin\dfrac{\alpha}{2} & \cos\dfrac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ 爲參數}),$$

$$X = \begin{vmatrix} t & \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ 0 & \cos\dfrac{\alpha}{2} \end{vmatrix} = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot t,$$

$$Y = \begin{vmatrix} \cos\dfrac{\alpha}{2} & t \\ -\sin\dfrac{\alpha}{2} & 0 \end{vmatrix} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot t.$$

將 X, Y 相除可得

$$\frac{Y}{X} = \tan\frac{\alpha}{2} \ \Rightarrow\ Y = -\tan\frac{-\alpha}{2}\cdot X \ \Rightarrow\ Y = \cot\beta\cdot X \ \Rightarrow\ y = \cot\beta x,$$

所以等角差線 Γ^l_α 之其中一條漸近線爲

$$y = \cot\beta x. \qquad \text{QED.}$$

根據 Lemma 1 可知此兩條線即是所有 Γ^l_α 的漸近線。

六、等角差線的最值定理

這部分討論角度在 $[0, \pi]$ 區間的情形, 其他範圍可自行推廣。

Lemma 2. Γ^l_α 中有 $x_{\max}$ 的點在

$$\theta = \gamma \text{ 和 } 2\beta - \gamma \ (\text{或 } \pi + (2\beta - \gamma)),$$

其中定義 α 爲銳角或直角時 $\gamma = \dfrac{\pi - 2\alpha}{4}$, α 爲鈍角時 $\gamma = \dfrac{3\pi - 2\alpha}{4}$。

$x_{\max}$ 在 $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ 時,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{l\cdot[\tan(\theta+\alpha)\sec^2\theta - \sec^2(\theta+\alpha)\tan\theta]}{(\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta)^2} = 0.$$

易知所求 θ 爲 $\tan(\theta+\alpha)\sec^2\theta - \sec^2(\theta+\alpha)\tan\theta = 0$ 之解, 經整理得 $\sin(2(\theta+\alpha)) = \sin(2\theta)$, 因爲 $2(\theta+\alpha) = 2\theta \ \Rightarrow\ \alpha = 0$ 矛盾, 所以

Case 1. α 爲銳角或直角

僅存在 θ 使得 $2(\theta+\alpha)=\pi-2\theta$ 或 $2(\theta+\alpha)=3\pi-2\theta$ 符合所求, 所以

$$\theta=\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}=\frac{\pi-2\alpha}{4}=\gamma \text{ 或 } \theta=\frac{\frac{3\pi}{2}-\alpha}{2}=\frac{3\pi-2\alpha}{4}=2\beta-\gamma.$$

Case 2. α 爲鈍角

僅存在 θ 使得 $2(\theta+\alpha)=3\pi-2\theta$ 或 $2(\theta+\alpha)=5\pi-2\theta$ 符合所求, 所以

$$\theta=\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}=\frac{3\pi-2\alpha}{4}=\gamma \text{ 或 } \theta=\frac{5\pi-2\alpha}{4}=\pi+(2\beta-\gamma).$$

在 Case 1 和 Case 2 Γ_α^l 中有 $x_{\max}$ 的點在 $\theta=\gamma$ 和 $2\beta-\gamma$ (或 $\pi+(2\beta-\gamma)$), 並用 Lemma 1 奇函數的性質可驗證此結論。

Theorem 3. 以 $\overline{BC}$ 爲直徑所作出的圓必交於 Γ_α^l 於有 $x_{\max}$ 之點。

由 Lemma 2 知

Case 1. α 爲銳角或直角時, 其中一 $x_{\max}$ 在

$$\angle B+\angle C=(\gamma+\alpha)+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

此時的 $\triangle ABC$ 爲以 $\angle A$ 爲直角的直角三角形, 因此可知 $\forall\ \alpha$ 所產生的軌跡 Γ_α^l 必交於 $\overline{BC}$ 爲直徑的圓於 $x_{\max}$, 並由 Lemma 1 知 $2\beta-\gamma$ 也交於 $\overline{BC}$ 爲直徑的圓。 QED.

Case 2. α 爲鈍角時, 其中一 $x_{\max}$ 在

$$(\angle B-\pi)+\angle C=(\gamma+\alpha-\pi)+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

此時的 $\triangle ABC$ 爲以 $\angle A$ 爲直角的直角三角形, 因此可知 $\forall\ \alpha$ 所產生的軌跡 Γ_α^l 必交於 $\overline{BC}$ 爲直徑的圓於 $x_{\max}$, 並由 Lemma 1 知 $\pi+(2\beta-\gamma)$ 也交於 $\overline{BC}$ 爲直徑的圓。 QED.

七、補記

Theorem 4. 等角差線 Γ_α^l 在 $y=0$ 之斜率爲 $\tan\alpha$。

$$\text{由} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{(l\cdot(\sec(\theta+\alpha)\tan\theta)^2 + (\sec\theta\tan(\theta+\alpha))^2}{(\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta)^2}$$

$$\text{和} \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{l\cdot\tan(\theta+\alpha)\sec^2\theta - \sec^2(\theta+\alpha)\tan\theta}{(\tan(\theta+\alpha)+\tan\theta)^2}$$

$$\Rightarrow \ \frac{dy}{dx} = \frac{(\sec(\theta+\alpha)\tan\theta)^2 + (\sec\theta\tan(\theta+\alpha))^2}{\tan(\theta+\alpha)\sec^2\theta - \sec^2(\theta+\alpha)\tan\theta}.$$

將 $\theta=0$ 和 $\theta=2\beta$ 代入 x,y 參數式可知兩點分別爲 $(-l/2,0)$ 和 $(l/2,0)$, Γ_α^l 在這兩點的斜率分別爲

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sec\alpha\tan 0)^2 + (\sec 0\tan\alpha)^2}{\tan\alpha\sec^2 0 - \sec^2\alpha\tan 0} = \frac{\tan^2\alpha}{\tan\alpha} = \tan\alpha$$

及

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sec\pi\tan(\pi-\alpha))^2 + (\sec(\pi-\alpha)\tan\pi)^2}{\tan\pi\sec^2(\pi-\alpha) - \sec^2\pi\tan(\pi-\alpha)} = \frac{\tan^2(\pi-\alpha)}{-\tan(\pi-\alpha)} = \tan\alpha. \qquad \text{QED.}$$

八、結語

很高興能夠有機會研究這個問題, 不知不覺間我已經接觸這個題目一年了。說起來感觸極深, 從高中到大學, 這個問題伴在我身邊, 藉著不斷地猜想與改正, 終於生出如今這篇文章, 也是我第一次正式將自己的作品發表出來。

研究這個問題也讓我從中學習到很多技巧, 更多的, 是讓自己能夠更了解以前自己所學的數學技巧與工具如何用到最大化。曾經聽過一句話, 做數學研究就是給自己的一場數奧競賽。在研究當中獲得研究成果的成就感不亞於我在高中競賽上所獲得的成績。我想謝謝自己, 願意不斷地研究, 不忘記自己的初衷, 也謝謝高中的班導兼數學老師侯名軒給我訓練與指導, 更謝謝數學傳播給一個平臺讓我發表我的作品。

—本文作者投稿時爲臺灣大學生物機電工程學系學生—