數學傳播 45卷4期, pp. 24-33

費氏數列與 $\frac{z}{1-z-z^2}$ 的洛朗級數

許閎揚

壹、前言

費氏數列是高中數學常見的數列, 這個數列 $\langle F_n\rangle$ 定義爲 : $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $n\geq 2$。在近期數學傳播 [1, 2] 兩篇文章中, 張進安老師與張鎮華教授分別探討了這個數列所成級數的收斂問題 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{r^{n+1}}=\frac{1}{r^2-r-1}$。爲了對這個級數的收斂問題有更多的了解, 我們從複分析的角度來對它進行探討。

貳、費氏數列的冪級數與一般式

一個複數 z 可以寫成 $a+bi$, 其中 a,b 爲實數, $i=\sqrt{-1}$。本文中的 z 皆代表複數。

一個冪級數(中心在 z_0) 是一個有以下形式的級數

$$S(z):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k.$$

費氏數列 $\langle F_n\rangle$ 定義爲 : $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $n\geq 2$, 在張進安老師的文章中, 他探討了關於費氏數列所成無窮級數的收斂問題, 本節我們將以係數爲費氏數列的冪級數來探討它的收斂問題。

首先我們以組合數學中特徵方程的理論來求解它的一般式, 得到下列的引理 1。

引理 1[4]: $F_n=\frac{1}{\sqrt5}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt5}{2}\Big)^n-\Big(\frac{1-\sqrt5}{2}\Big)^n\Big]$, $n\geq 0$。

證明: 由遞迴關係 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, 它的特徵方程爲

$$t^2-t-1=0,$$

解得

$$t=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$$

爲它的兩個特徵根, 因此設

$$F_n = \alpha\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \beta\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n,$$

由 $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ 解得

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

得到

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big],$$

得證。

引理 2: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

證明: 利用引理 1, 得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}}{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\Big)^n}{1-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\Big)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\end{aligned}$$

得證。

利用引理 1 與引理 2 我們可以找到以費氏數列爲係數的冪級數的收斂區間, 我們將結果寫成下面定理 1。

定理 1: 設以費氏數列爲係數的冪級數爲 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$, 則 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ 收斂若且唯若 $|z| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

證明: 由比值試驗法, 若

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{F_{n+1}z^{n+1}}{F_n z^n}\Big| < 1, \text{ 則 } \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n \text{ 收斂},$$

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{F_{n+1}z^{n+1}}{F_n z^n}\Big| > 1, \text{ 則 } \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n \text{ 發散}。$$

由引理 2, 即

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot|z|<1, \text{ 則 } \sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n \text{ 收斂,}$$
$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot|z|>1, \text{ 則 } \sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n \text{ 發散。}$$

也就是若

$$|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 則 } \sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n \text{ 收斂,}$$
$$|z|>\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 則 } \sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n \text{ 發散。}$$

當 $|z|=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 時, 因爲

$$\begin{aligned}\Big|\lim_{n\to\infty}F_nz^n\Big| &= \lim_{n\to\infty}|F_nz^n| = \lim_{n\to\infty}F_n\,|z^n|\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big]\cdot\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[1-(-1)^n\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{2n}\Big]=\frac{1}{\sqrt{5}},\end{aligned}$$

可得 $\lim\limits_{n\to\infty}F_nz^n\neq 0$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nz^n$ 發散。定理證畢。

由上面的討論, $|z|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 若且唯若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nz^n$ 收斂, 因此我們可以將此冪級數定義成一個複變函數 $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nz^n$, 定義域爲 $\{z\in C:|z|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\}$。

定理 2: 若 $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nz^n$, $|z|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 爲係數是費氏數列的冪級數, 則 $F(z)=\dfrac{z}{1-z-z^2}$, $|z|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

證明: 利用引理1, $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n-\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big]$, $n\geq 0$ 及定理1, 當 $|z|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n =&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big] z^n \\ =&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\Big)^n\Big] \\ =&\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\Big)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\Big)^n\Big] \\ =&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1}{1-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right) \\ =&\frac{z}{1-z-z^2}.\end{aligned}$$

得證。

在定理 1 中我們用比值試驗法找出冪級數的收斂半徑, 事實上利用複變函數的泰勒定理, 我們亦可求得它的收斂半徑。

複變函數的泰勒定理是關於冪級數的基本定理, 我們把它敘述如下:

定理 3(**泰勒定理**)[3]: 假設函數 f 在整個開圓盤 $|z-z_0| < R_0$ 可解析, 圓盤以 z_0 爲圓心且半徑爲 R_0。則 $f(z)$ 具有唯一的冪級數表示式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \qquad (|z-z_0| < R_0).$$

在定理 2 中解析函數 $F(z) = \dfrac{z}{1-z-z^2}$ 在複數平面上只有兩個不可解析的點(奇異點), 即 $1-z-z^2$ 的零點, 即 $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, 因此由泰勒定理可知在 $|z| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 時, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ 收斂到 $F(z) = \dfrac{z}{1-z-z^2}$。

一個冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 以 z_0 爲圓心所成的圓中, 在圓內每一點均收斂的圓中取最大的圓, 我們稱爲冪級數的收斂圓。

下面兩個定理與泰勒定理可說明：函數 f 在某點 z_0 展開成冪級數時, 收斂半徑是 z_0 到 z_1 的距離, 其中 z_1 是最近一個使 f 不可解析的點。

定理4[3]: 若冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

在 $z=z_1$ $(z_1 \neq z_0)$ 收斂, 則它在開圓盤 $|z-z_0|<R_1$ 的每一點絕對收斂, 其中 $R_1=|z_1-z_0|$。

定理5[3]: 冪級數在收斂圓內部的每一點都可解析。

若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ 在 $|z|=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 圓外有一點收斂 , 則由定理 4 可得一個半徑更大的圓 C, 在圓 C 內每個點收斂, 並由定理 5 可得圓 C 內每一點皆解析, 但我們知道 $F(z)$ 在 $z=z_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 處不可解析, 因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ 在 $|z|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 時收斂, 在 $|z|>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 時發散。

參、$\dfrac{z}{1-z-z^2}$的洛朗級數

一個洛朗級數(中心在 z_0) 是一個有以下形式的級數表示式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}, \qquad (R_1<|z-z_0|<R_2),$$

其中 $(0\le R_1<R_2\le\infty)$。

在探討冪級數時, 泰勒定理說明了冪級數的係數具有唯一性並與函數的導數有關, 對於函數的洛朗級數, 洛朗定理亦說明了洛朗級數的係數有唯一性並與函數的積分值有關。我們將洛朗定理簡述如下:

定理6(**洛朗定理**)[3]: 假定複變函數 f 在整個以 z_0 爲中心的環狀區域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 可解析 $(0\le R_1<R_2\le\infty)$, 且令 C 表示位於此域內環繞 z_0 的任一正向簡單封閉圍線。則在此區域中的每一點, $f(z)$ 有唯一的級數表示式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}, \qquad (R_1<|z-z_0|<R_2)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

且

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz, \qquad (n=1,2,\ldots).$$

對於複變函數 $F(z)=\dfrac{z}{1-z-z^2}$ 在 $|z|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 時, 定理 2 告訴我們可以將它展開成一個冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nz^n$。當 $|z|>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 時, 雖然我們無法再將它展開成冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nz^n$, 但我們卻可以將它展開成洛朗級數。

$F(z)=\dfrac{z}{1-z-z^2}$, 其中 z 爲複變數, 將 $F(z)$ 進行部分分式分解, 可得

$$F(z)=\frac{z}{1-z-z^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right),$$

得知解析函數 $F(z)$ 在複數平面上只有兩個奇異點 $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, 我們將 $F(z)$ 在 $z=0$ 爲中心的開圓盤及環狀區域做洛朗展開, 得到以下定理 7。

定理7: 若 $F(z)=\dfrac{z}{1-z-z^2}$, $z\in C$ 則

1. 當 $|z|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nz^n$。
2. 當 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<|z|<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $F(z)=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\dfrac{1}{z}\right)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\right)^n\right]$。
3. 當 $|z|>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $F(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{F_n}{z^n}$。

證明:

1. 當 $|z|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$$\begin{aligned}
F(z)=&\frac{z}{1-z-z^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot z\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\right)^n\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot z\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\right)^n\right)\right)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)z^n, \qquad (\text{由引理1})\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n.
\end{aligned}$$

2. 當 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<|z|<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$,

$$\begin{aligned}
F(z)=&\frac{z}{1-z-z^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\Big(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}-1\Big)}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\Big)}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}\Big)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\Big)^n\right)\\
=&\frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{z}\Big)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot z\Big)^n\right).
\end{aligned}$$

3. 當 $|z|>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$$\begin{aligned}
F(z)=&\frac{z}{1-z-z^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\Big(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}-1\Big)}-\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\Big(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}-1\Big)}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\Big)}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}\Big)^n+\frac{1}{\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}z\Big)}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}\Big)^n\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}\Big)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z}\Big)^{n+1}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{z}\Big)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{z}\Big)^{n+1}\right)\\
=&\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{z}\Big)^{n+1}-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{z}\Big)^{n+1}\right),\quad(\text{由引理1})\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{F_{n+1}}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{F_n}{z^n}.
\end{aligned}$$

定理證畢。

肆、冪級數的應用

利用函數的冪級數我們可以得到張進安老師在文章 [1] 的結果。此外, 利用冪級數在收斂區間的逐項微分與積分, 我們還可以得到新的等式(請見推論 2 與推論 3)。

推論1[1]: $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{F_i}{10^i}=\frac{10}{89}$。

證明: 由定理 2 可知當 $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 時, $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n=\frac{z}{1-z-z^2}$。將 $z=\frac{1}{10}$ 代入定理 2, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{10^n}=F\Big(\frac{1}{10}\Big)=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}-\Big(\frac{1}{10}\Big)^2}=\frac{10}{89},$$

得證。

推論2: $\sum_{n=0}^{\infty}nF_nz^n=\frac{z+z^3}{(1-z-z^2)^2}$, $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $z\in C$。

證明: 由定理 2,

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n=\frac{z}{1-z-z^2},\quad |z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ z\in C.$$

由於在冪級數在收斂區間內可逐項微分, 得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}F_nz^n=\frac{d}{dz}F(z)$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nF_nz^{n-1}=\frac{1(1-z-z^2)-(-1-2z)z}{(1-z-z^2)^2}=\frac{1+z^2}{(1-z-z^2)^2},\ |z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

將上式等號兩邊同乘 z, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nF_nz^n=\frac{z+z^3}{(1-z-z^2)^2},\ |z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

得證。

當 $w(t)$ 是實變數 t 的複數值函數, 且可寫成

$$w(t)=u(t)+iv(t),$$

其中 u,v 是實值函數, 又若 u 和 v 在區間 $a\le t\le b$ 的定積分存在, 則 $w(t)$ 在區間 $a\le t\le b$ 的定積分爲

$$\int_a^b w(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt.$$

設方程式

$$z = z(t), \quad (a \le t \le b)$$

表示由點 $z_1 = z(a)$ 延伸到點 $z_2 = z(b)$ 的圍線 C。設 $f[z(t)]$ 在區間 $a \le t \le b$ 爲片段連續, 則我們以參數 t 定義 f 沿著 C 的線積分, 或圍線積分 [3]:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt.$$

當一個非零複數 z, 只要 z 不落在負實軸上, 我們可以定義其主對數 (principal logarithm) 爲

$$\mathrm{Log}\,(z) = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad (r > 0, -\pi < \theta < \pi).$$

利用冪級數在收斂區間可逐項積分的性質, 我們有下列結果。

推論3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n} z^n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\mathrm{Log}\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right) - \mathrm{Log}\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)\right], \quad |z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

證明: 由定理 2,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2}, \quad |z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n z^{n-1} = \frac{1}{1-z-z^2}, \quad |z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

令 C 是收斂圓 $|z| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 內部任一圍線, C 從點 $z=0$ 到點 $z=z_1$, 因 $F(z)$ 在收斂圓內部可解析, 故 $\displaystyle\int_C F(z)dz$ 與路徑 C 無關。又冪級數在收斂區間可逐項積分, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{z_1} F_n z^{n-1} dz = \int_0^{z_1} \frac{1}{1-z-z^2} dz, \quad |z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \tag{1}$$

將 $\dfrac{1}{1-z-z^2}$ 分解成兩個分式相加, 得

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z} + \frac{\sqrt{5}+1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}\right), \tag{2}$$

將 (2) 式等號兩邊從 0 到 z_1 對 z 積分, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{z_1}\frac{1}{1-z-z^2}dz =&\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\int_0^{z_1}\frac{\sqrt{5}-1}{1-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}z}dz+\int_0^{z_1}\frac{\sqrt{5}+1}{1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}z}dz\right)\\
=&\frac{\sqrt{5}}{10}\Bigg[(\sqrt{5}-1)\Big(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\Big)\mathrm{Log}\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z_1\right)\\
&+(\sqrt{5}+1)\Big(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\Big)\mathrm{Log}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z_1\right)\Bigg]\\
=&\frac{\sqrt{5}}{10}\left[2\mathrm{Log}\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z_1\right)-2\mathrm{Log}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z_1\right)\right]\\
=&\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\mathrm{Log}\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z_1\right)-\mathrm{Log}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z_1\right)\right]. \qquad (3)\end{aligned}$$

由 (1), (3) 式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{n}z_1^n=\frac{\sqrt{5}}{5}\Big[\mathrm{Log}\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z_1\right)-\mathrm{Log}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z_1\right)\Big],\quad |z_1|<\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

其中 z_1 是收斂圓內任意一點, 故定理得證。

伍、結語

複分析理論完備應用廣泛, 是數學上極其優美的一個分支, 也是處理級數與積分的強力武器。泰勒定理說明如果在開圓盤內各點可解析, 則可展開成一個冪級數且係數與函數的微分值有關, 洛朗定理則顯示了函數在不同範圍內, 有各自的展開式且與積分值有關, 利用複變函數的泰勒展開與洛朗展開, 相信讀者對費氏數列的級數問題的收斂性, 會有更深一層的認識。

參考資料

1. 張進安。$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{F_i}{10^i}=\dfrac{10}{89}$ 的探源與推廣。數學傳播季刊, 44(1), 89-93, 2020。
2. 張鎮華。費氏數列與等比數列的交會處。數學傳播季刊, 44(2), 58-61, 2020。
3. 黃孟槺(譯)。複變函數與應用。台北市：東華, 2015。(James Ward Brown, Ruel V. Churchill 2014)
4. C. L. Liu, *Introduction To Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, 1968.

—本文作者任教彰化藝術高中—