數學傳播 45卷4期, pp. 18-23

從立體幾何到坐標幾何
—兼談三垂線定理

張海潮 · 鍾伊婷

引言

公元前300年出版的《幾何原本》(以下簡稱《原本》), 前 6 章 (或前 6 卷) 討論平面幾何, 其內容大致已融入國中的幾何課程。第 7, 8, 9 章討論基本數論, 第 10 章討論一些特殊的無理數, 這 4 章均與幾何無關。11 章開始討論立體幾何, 本章立下許多立體幾何的基礎。12 章討論錐體、球體的體積, 最後在 13 章討論了五種正多面體。

在歐幾里得的時代, 沒有坐標/向量幾何, 但是對平面幾何而言, 引入坐標軸 x 與 y, 以坐標關係輔助幾何關係是很自然的事。這裡最重要的是平行公理, 亦即當互相垂直的 x 和 y 軸架好之後, 平面上一點的坐標必須靠 (平面幾何的) 平行公理來界定。(註1)

類似的情形發生在立體幾何。如果我們要爲空間建立三維坐標系, 那麼下面這個定理 (《原本》11 章命題 6) 就是成功架構坐標的關鍵:

命題6: 如果 (空間中) 兩直線和同一平面成直角, 則兩直線平行。(註2)

讀者不難發現上述命題 6 在平面幾何有類似的陳述:

如果平面上兩直線和同一直線成直角, 則兩直線平行。(註3)

本文的目的如下:

(一) 定義空間中平面的法線, 並仿《原本》證明法線的存在。基本上重現了《原本》的 11 章命題 4 和命題 5 (註 4) 並指出在證明中, 三垂線定理自然呈現。

(二) 仿《原本》證明 11 章命題 6, 即一平面的所有法線均互相平行。(同註2)

(三) 獨立給三垂線定理一個現代版的簡單證明。

(四) 對三垂線定理的評論。

第一節 法線之存在

《原本》在 11 章一開始就把平面的法線定義爲一條與平面相交於一點的直線 P, P 與平面上所有過此交點的直線垂直,《原本》的用詞是“P 和平面成直角”。如圖 1 所示。

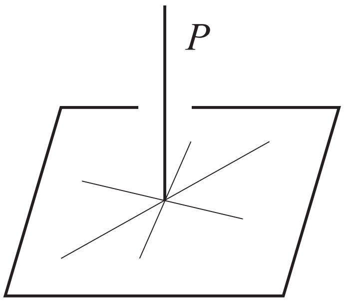


圖 1

一.1. 在證明法線 P 的存在前,《原本》先證明命題 4 (同註 4)

如圖 2:

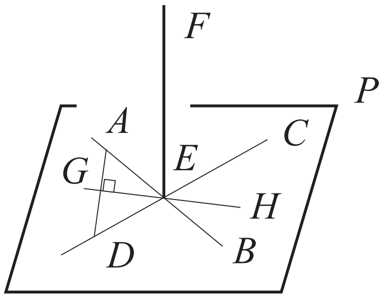


圖 2

平面上三線段 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{GH}$ 在平面上交於點 E, $\overline{EF}$ 同時垂直 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$, 我們想要證明 $\overline{EF}$ 也垂直 $\overline{GH}$。

不妨假設 $\overline{AD}\perp\overline{GH}$, 以 G 爲垂足。先利用畢氏定理來看圖中諸線段的長度關係。

在 $\triangle FAD$ 中,

$$\overline{AF}^2-\overline{AG}^2=\overline{EF}^2+\overline{AE}^2-\overline{AG}^2=\overline{EF}^2+\overline{GE}^2. \tag{1}$$

同樣在 $\triangle FAD$ 中,

$$\overline{DF}^2-\overline{DG}^2=\overline{EF}^2+\overline{DE}^2-\overline{DG}^2=\overline{EF}^2+\overline{GE}^2.$$

與 (1) 式相等。因此圖 3, 在 $\triangle FAD$ 中, $\overline{AF}^2-\overline{AG}^2=\overline{DF}^2-\overline{DG}^2$, 亦證 $\overline{FG}\perp\overline{AD}$,

並且

$$\overline{AF}^2-\overline{AG}^2=\overline{DF}^2-\overline{DG}^2=\overline{FG}^2. \tag{2}$$

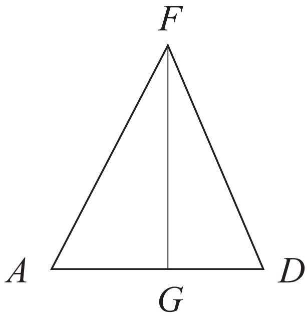


圖3

由 (1), (2) 可得 $\overline{FG}^2=\overline{EF}^2+\overline{GE}^2$, 再由畢氏逆定理, 知 $\overline{EF}\perp\overline{GE}$ 或 $\overline{EF}\perp\overline{GH}$。(註5)

所以如圖 2, 如果要證明過平面 P 上一點 E, 存在法線, 就要找一條直線 EF 同時與 AB 和 CD 垂直。

證明的方式是反其道而行, 即先對任一直線如 AB, 作一平面過 E, 並以 AB 爲法線, 稱爲 AB 的法平面。

一.2. 過 E存在 AB 線的法平面, 如圖 4,

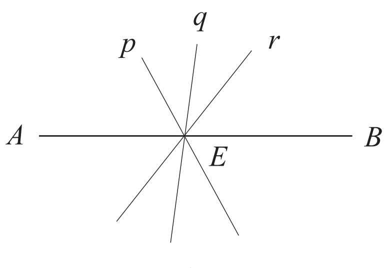


圖4

我們宣稱, 過 E 而與 AB 線垂直的所有直線構成 AB 的法平面。今取任三條直線 p,q,r 均過 E 而與 AB 垂直。我們要證 q 在 p,r 決定的平面 H 上。如果 q 不在 p,r 決定的平面, 考慮 AB 與 q 決定的平面 H', 並設 $H'\cap H=q'$。則根據一.1, AB 與 q' 垂直, q' 過 E, 但 q 也過 E 並與 AB 垂直, 亦即在平面 H' 上, 過 E 而與 AB 垂直的直線有 q 又有 q', 此爲矛盾。我們因此證得過 E 與 AB 垂直的所有直線構成線 AB 的法平面, 此即《原本》的11章命題5。(同註4)

一.3. 過平面 P 上一點 E, 存在 P 之法線。

在平面上過 E 作二直線 AB 及 CD, 並過 E 作兩者之法平面, 則此二法平面之交線必同時垂直 AB 與 CD, 由一.1 之證明, 此交線是 P 過 E 之法線。

第二節 平面之法線互相平行

如圖5

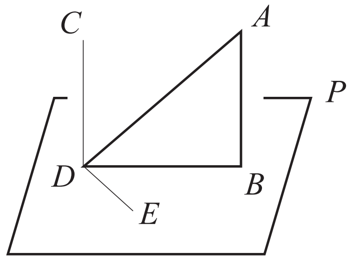


圖5

D, B 在平面 P 上, CD 和 AB 分別是過 D 和 B 的法線, 我們要證 AB 與 CD 平行, 連 $\overline{DB}$, 我們其實只要證 $CDBA$ 共平面即可。

連 AD, 並在 P 上過 D 作 $\overline{BD}$ 之垂線 DE, 則由三垂線定理 (同註5) (AB 是法線, $\overline{BD}\perp\overline{AB}$, $\overline{DE}\perp\overline{BD}$) 得 $\overline{AD}\perp\overline{DE}$。

現由以上一.2《原本》命題 5 之結論, 因爲 DE 同時與 CD (法線)、AD (三垂線定理) 及 BD 三線垂直, 因此 CD, AD, BD 共平面, 此平面當然包含 AB, 所以在 $CDBA$ 平面中 AB 與 CD 均垂直 BD, 亦即兩法線平行。

此一定理保證了空間坐標的建立。如上圖, 先在 (水平面) P 上建立平面坐標, 過平面上每一點都"長出"一條數線與平面 P 垂直, 並以平面上的點爲數線原點, 如果平面 P 上建立的是 x, y 坐標, 則利用過 (x, y) 的法線 (數線) 來建立 z 坐標。(註6)

第三節 獨立證三垂線定理

前兩節的證明都出現三垂線定理, 我們將在此節利用畢氏定理直接來證三垂線定理。

如圖6

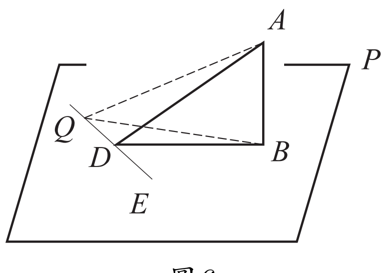


圖6

$\overline{AB}$ 是平面 P 的法線, $\overline{BD}$ 和 $\overline{DE}$ 都在平面 P 上, $\overline{BD}\perp\overline{AB}$, $\overline{BD}\perp\overline{DE}$。三垂線定理是說 $\overline{AD}\perp\overline{DE}$。要得到這個結果, 其實只要證明 A 到 DE 線的最短距離是 $\overline{AD}$。

任取一點 DE 上的點 Q, 連 $\overline{QA}$, $\overline{QB}$ 則

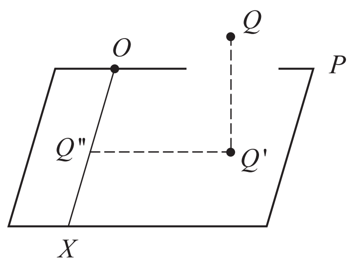
$$\overline{QA}^2=\overline{AB}^2+\overline{QB}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2+\overline{QD}^2=\overline{AD}^2+\overline{QD}^2>\overline{AD}^2,$$

定理得證。

(也可以利用畢氏逆定理, 從 $\overline{QA}^2=\overline{AD}^2+\overline{QD}^2$, 得出 $\overline{AD}\perp\overline{QD}$。)

第四節 對三垂線定理的評論

目前的高中數學在教空間坐標之前, 需先教三垂線定理, 但是三垂線定理並不正式出現在《原本》, 只是很自然地出現在《原本》11 章命題 4 和命題 6 的證明中 (見本文第一、二節)。當其出現時, 《原本》仍然規規矩矩地證明它的正確。其實三垂線定理要說的不過是下面這個現象, 如圖

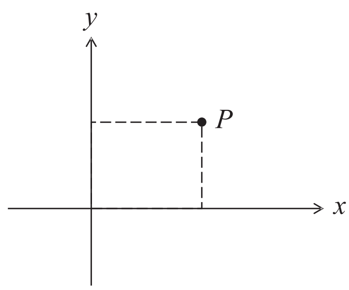


平面 P 上有一直線 OX, 點 Q 在 P 之外, 則點 Q 先向平面 P 投影得點 Q', 然後再向 OX 做投影得 Q'', 而 Q 直接向 OX 投影, 一樣得到點 Q''。這件事, 在坐標幾何是顯而易見的。

但是, 在《原本》中, 三垂線定理在無坐標幾何之下, 幫助證明了命題 6, 即平面之法線均互相平行, 也幫助了將來 (2000多年之後) 建立三度空間的坐標。

今日回頭來看, 公元 300 年前, 在沒有坐標幾何的概念下, 能夠證明三垂線定理及命題 6, 奠定坐標幾何, 非常難得。(註7)

註1: 在平面上用兩條互相垂直的數線分作 x 和 y 軸, 如圖



則從 P 點分別作 x 軸和 y 軸的垂線, 可以決定 P 點的坐標。

註2: 我們現在稱與平面成直角或垂直的直線爲法線。《原本》在11章定義法線爲一條與平面相交的直線, 並與平面上過其相交點的所有直線均垂直。11 章命題 6 等於是說任一平面的所有法線均互相平行。

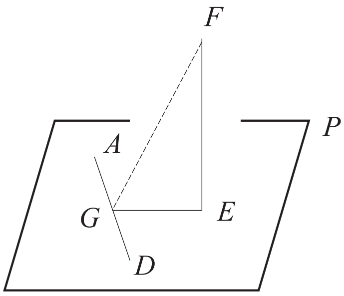
註3: 這是現在小學四年級對平面上兩線平行的定義。

註4: 《原本》命題 4 和 5 原文如下:

命題4: 如果一直線在另兩條直線交點處都成直角, 則此直線與兩直線所在平面成直角 (參考本文註2)。

命題5: 如果一直線過三直線的交點且與三直線交成直角, 則此三直線在一個平面內。

註5: 此處的重證精簡化《原本》的證明, 並且基本上得到三垂線定理。三垂線定理是說, 如圖, 如果 EF 是過平面 P 上一點 E 的法線, $\overline{EG}\perp\overline{AD}$, G 爲垂足, 則 $\overline{FG}\perp\overline{AD}$。本文第三節會另給一個簡潔的證明。



註6: 如此定出的坐標系統是否"合格", 尚需請讀者做一點功課。

註7: 此處, 抄錄《原本》11 章命題 1~6 供讀者參考:

命題1. 一條直線不可能一部分在平面內, 而另一部分在平面外。

命題2. 如果二條直線彼此相交, 則它們在同一平面內; 並且每個三角形也各在一個平面內。

命題3. 如果兩個平面相交, 則他們的交跡是一條直線。

命題4. 如果一直線在另兩條直線交點處都成直角, 則此直線與兩直線所在平面成直角。

命題5. 如果一直線過三直線的交點且與三直線交成直角, 則此三直線在同一個平面內。

命題6. 如果兩直線和同一平面成直角, 則兩直線平行。

以上參考台北九章出版社, 歐幾里得幾何原本。

—本文作者張海潮爲台大數學系退休教授, 鍾伊婷爲大直高中數學老師—