數學傳播 45卷4期, pp. 11-17

# 虛功原理及歐拉 - 拉格朗日方程式

張海潮

虛功原理 (Principle of virtual work) 又稱 D'Alembert's principle, 是法國數學/力學/天文學家達朗貝爾 (1717∼1783) 針對有約束力 (constraint) 的力學系統所提出的運動原理。從這個原理出發, 可以得出歐拉 - 拉格朗日方程式 (Euler-Lagrange equation, 簡稱 E-L 方程), E-L 方程其實和虛功原理等價, 但是計算時更加方便。本文嘗試說明此二者的關聯, 並舉一些具體的例子。(註一)

以下的討論分為三節, 第一節是以單擺的例子來說明虛功原理。第二節說明 E-L 方程和虛功原理等價。第三節以單擺說明 E-L 方程的應用並略作評論。

## 一、虛功原理

牛頓第二運動定律說力與加速度成正比。設有質量為 $m$ 的單一質點, 其在空間中的位置向量為 $X$, 速度向量 $\dfrac{dX}{dt}=\dot{X}$ ("$\cdot$"代表對時間 $t$ 的微分), 加速度向量 $\dfrac{d^2X}{dt^2}=\ddot{X}$, 則第二定律宣稱

$$F=m\ddot{X};$$

此處 $F$ 代表質點所受的總力。一般而言 $F$ 可以分解為施力 (applied force) $F_a$ 和約束力 (constraint force) $f$, 亦即

$$m\ddot{X}=F=F_a+f,\quad 或\quad m\ddot{X}-F_a=f。$$

如圖1, 單擺以 $P$ 為固定點, 擺桿長 $l$, 擺桿不計質量。擺端有質量 $m$, 因重力而擺動。

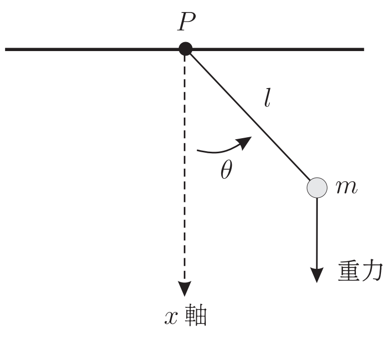


圖 1

圖中重力垂直地面, 並令 $x$ 軸也垂直地面。

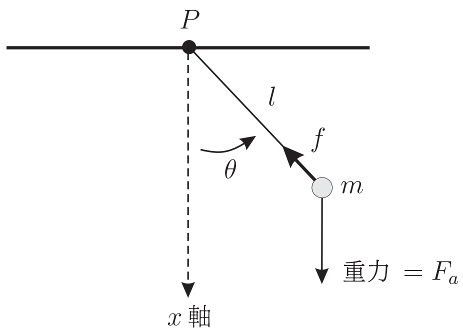


圖2

如圖 2, 以 $P$ 爲原點, 則 $m$ 的位置向量是 $X = (l\cos\theta, l\sin\theta)$。重力即此系統所受的施力 $F_a$, 垂直向下, 大小爲 $mg$, $g$ 是重力加速度。另外在 $m$ 處有約束力 $f$, $f$ 沿擺桿拉住 $m$。約束流形 (constraint manifold) 即是以 $P$ 爲圓心, 半徑爲 $l$ 的圓弧, 限制 $m$ 必須在此圓弧上運動。

從 $m$ 的位置向量

$$X = \big(l\cos\theta(t), l\sin\theta(t)\big),$$

可得速度向量

$$\dot{X} = (-l\sin\theta, l\cos\theta)\dot{\theta},$$

及加速度向量

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= (-l\cos\theta, -l\sin\theta)\dot{\theta}^2 + (-l\sin\theta, l\cos\theta)\ddot{\theta};\\ &= A_0 + A_1;\end{aligned}$$

式中 $A_0 = (-l\cos\theta, -l\sin\theta)\dot{\theta}^2$ 與位置 $X$ 反向, 稱爲向心加速度, $A_1 = (-l\sin\theta, l\cos\theta)\ddot{\theta}$ 與位置 $X$ 垂直, 稱爲切線加速度。

圖 3 表示 $\dot{\theta} < 0$, $\ddot{\theta} < 0$ 的情形:

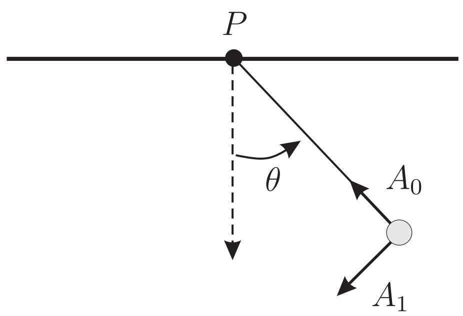


圖3

同樣的, 施力 $F_a$ (大小爲 $mg$) 亦有沿 $X$ 方向與 $X$ 垂直方向的分解 $F_a = F_{a_0} + F_{a_1}$, 如圖 4:

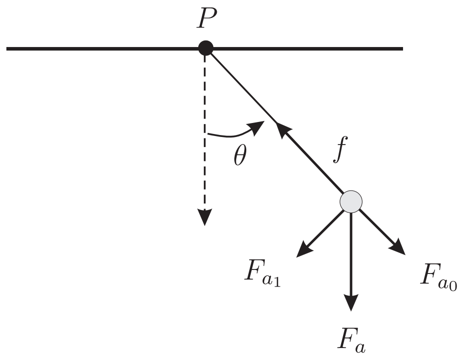


圖 4

其與擺桿垂直的部份 $F_{a_1}$ 的大小是 $mg\sin\theta$, 提供切線加速度, 因此有沿擺桿垂直方向的運動方程

$$m\frac{d^2(l\theta)}{dt^2} = ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta, \quad \text{或} \quad F_{a_1} = mA_1.$$

另有向心力 $F_{a_0} + f = mA_0$, 即讓質點 $m$ 作圓弧運動的向心力來自 $F_{a_0} + f$, $F_{a_0}$ 由重力提供, $f$ 是約束力, 由擺桿提供。

綜上所述, 我們有

$$F_{a_1} + F_{a_0} + f = mA_1 + mA_0,$$

或

$$F_a + f = m\ddot{X},$$

或

$$f = m\ddot{X} - F_a;$$

式中 $f$ 與約束流形 (即半徑爲 $l$ 的圓弧) 垂直。

所謂虛功原理, 它的原型即是 $m\ddot{X} - F_a = f$, 但是注意到我們無法事先理解 $f$ 的大小, 以單擺而言, 在不同的位置, 因爲加速度的不同, $f$ 有不同的大小, 因此我們重新敘述虛功原理如下:

對一個在約束流形 $M$ 上運動的質點, 若以 $X$, $\dot{X}$, $\ddot{X}$ 表其位置、速度和加速度向量, 以 $F_a$ 表外界對質點的施力, 則有內積

$$(m\ddot{X} - F_a, \delta X) = 0; \tag{1}$$

式中 $\delta X$ 表運動質點所在位置 $M$ 的任意切向量。

簡言之, 即約束力 $f$ 與約束流形 $M$ 垂直。(註二)

## 二、E-L 方程式和虛功原理等價

假設約束流形是 $\mathbb{R}^3$ 中的一個 (局部的) 曲面 $C$, 局部坐標是 $u, v$。質量爲 $m$ 的質點被限制在 $C$ 上運動, 施力 $F_a$ (applied force) 由一個位能函數 $V(x, y, z)$ 提供 (註三)

$$-\nabla V = F_a;$$

式中 $\nabla V$ 的定義是 $\Big(\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial z}\Big)$。

質點 $m$ 的運動軌跡是 $X\big(u(t), v(t)\big)$, 其位置、速度和加速度向量分別是 $X = X(u, v)$, $\dot{X}$ 和 $\ddot{X}$, 如圖, $X(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$

$$t \to (u, v) \xrightarrow{X} \boxed{S} \subset R^3 = \{(x, y, z)\}$$

則 $\dot{X} = X_u\dot{u} + X_v\dot{v}$, 式中 $X_u$, $X_v$ 分別是 $X$ 對 $u, v$ 的偏導。而 $\ddot{X} = X_{uu}\dot{u}^2 + 2X_{uv}\dot{u}\dot{v} + X_{vv}\dot{v}^2 + X_u\ddot{u} + X_v\ddot{v}$; 式中 $X_{uu}$ 代表 $X$ 對 $u$ 的二次偏導, $X_{uu} = \dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2}$, $X_{uv} = \dfrac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \ldots$。

**定義**: 一個質點 $m$ 的拉格朗日 (Lagrangian) $L = T - V$。式中 $T$ 是質點的動能 $\dfrac{1}{2}m(\dot{X}, \dot{X})$, $V$ 是質點的位能。

**說明**: 此處位能 $V$ 是位置 $(x, y, z)$ 的函數 $V(x, y, z)$, $-\nabla V$ 即 $F_a$ (同見註三)。

$$\begin{aligned}\text{動能 } T &= \frac{1}{2}m(\dot{X}, \dot{X}) = \frac{1}{2}m(X_u\dot{u} + X_v\dot{v}, X_u\dot{u} + X_v\dot{v})\\ &= \frac{1}{2}m[(X_u, X_u)\dot{u}^2 + 2(X_u, X_v)\dot{u}\dot{v} + (X_v, X_v)\dot{v}^2],\end{aligned}$$

注意到 $T$ 是 $u, v, \dot{u}, \dot{v}$ 四個「獨立變數」的函數。(註四)

**則** E-L **方程是說**:

沿著 $m$ 運動的軌跡, 我們有

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

回顧第一節的虛功原理, 由於 $\delta X$ 是 $X_u$ 和 $X_v$ 的線性組合, 因此 虛功原理 (式 (1)) 可以寫成:

沿著 $m$ 運動的軌跡, 我們有

$$(m\ddot{X} - F_a, X_u) = 0, \tag{2$'$}$$

$$(m\ddot{X} - F_a, X_v) = 0. \tag{3$'$}$$

本節 主要的定理是：E-L 方程 (2), (3) 和虛功原理 $(2)'$, $(3)'$ 等價。首先, 整理 (2) 式:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\Big)-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial V}{\partial \dot{v}}\Big)-\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial v}=0$$

因爲 $V$ 與 $\dot{u}$ 無關, 並且

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial u}&=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\\&=\nabla V\cdot(x_u,y_u,z_u)\\&=\nabla V\cdot X_u\\&=-F_a\cdot X_u,\end{aligned}$$

因此 (2) 式變成

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\Big)-\frac{\partial T}{\partial u}-(F_a\cdot X_u)=0.$$

與 $(2)'$ 比較, 希望證明 (4)

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\Big)-\frac{\partial T}{\partial u}=(m\ddot{X}\cdot X_u). \tag{4}$$

由於 $T=\dfrac{1}{2}m(\dot{X},\dot{X})$, 所以 $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{u}}=m\Big(\dfrac{\partial \dot{X}}{\partial \dot{u}},\dot{X}\Big)$ 及 $\dfrac{\partial T}{\partial u}=m\Big(\dfrac{\partial \dot{X}}{\partial u},\dot{X}\Big)$。

注意到 $\dot{X}=X_u\dot{u}+X_v\dot{v}$, 因此

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}=m\Big(\frac{\partial \dot{X}}{\partial \dot{u}},\dot{X}\Big)=m(X_u,\dot{X}), \tag{5}$$

及

$$\frac{\partial T}{\partial u}=m(X_{uu}\dot{u}+X_{vu}\dot{v},\dot{X}). \tag{6}$$

將 (4) 式左邊以 (5), (6) 帶入, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(m(X_u,\dot{X})\big)-m(X_{uu}\dot{u}+X_{vu}\dot{v},\dot{X})\\&=m\Big(\frac{d}{dt}X_u,\dot{X}\Big)+m(X_u,\ddot{X})-m(X_{uu}\dot{u}+X_{vu}\dot{v},\dot{X})\\&=m(X_{uu}\dot{u}+X_{uv}\dot{v},\dot{X})+m(X_u,\ddot{X})-m(X_{uu}\dot{u}+X_{vu}\dot{v},\dot{X})\\&=m(X_u,\ddot{X})\\&=(4)\text{ 式右邊。}\end{aligned}$$

因此得到 E-L 方程 (2) 和虛功原理 $(2)'$, (3) 和 $(3)'$ 等價。定理證畢。(註五)

## 三、E-L 方程之於單擺及簡評

我們將利用 E-L 方程來寫下單擺的運動方程, 如圖 5

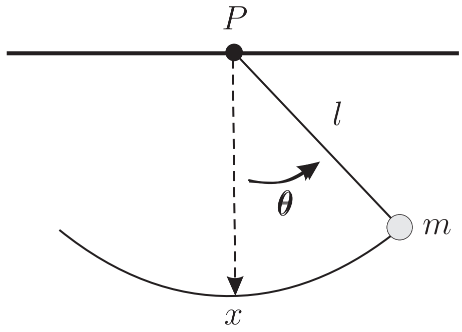


圖 5

約束流形 (即半徑爲 $l$ 的圓弧) 上的坐標爲 $\theta$, 位置向量 $X = (l\cos\theta, l\sin\theta)$, 速度向量 $\dot{X} = (-l\sin\theta, l\cos\theta)\dot{\theta}$, 動能函數 $T = \frac{1}{2}m(\dot{X}, \dot{X}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$。若以 $P$ 爲高度 0, 則重力位能 $V = -mg(l\cos\theta)$, 拉格朗日 $L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mg\,l\cos\theta$。

E-L方程:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mg\,l\sin\theta = 0,$$

或

$$ml^2\ddot{\theta} + mg\,l\sin\theta = 0.$$

消去 $ml$, 得運動方程 $l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$ (參見本文第一節)。

讀者不難發現, E-L 方程在計算上非常方便。特別是, 可以在約束流形上任意選擇方便的坐標, $(u, v)$, (以 2 維的約束流形爲例) E-L 方程總是

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{u}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{v}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0.$$

這也說明了 E-L 方程展現了運動路徑的本質, 與坐標的選取無關。

最後, 應該解釋虛功兩字因何所指? 原理中說 $(m\ddot{X} - F_a, \delta X) = 0$, 這是一個力與距離的內積, 單位是功的單位, $\delta X$ 是約束流形的切向量, 可以解釋成一個虛擬的位移, 虛功原理即指 $m\ddot{X} - F_a$ 沿虛位移 $\delta X$ 所作之功爲 0。幾何意義不過是說約束力 $f = m\ddot{X} - F_a$ 與約束流形垂直。

我們在第一節先從牛頓的 $F=m\ddot{X}$ 出發, 然後 D'Alembert 將約束力考慮進來, 精益求精, 終於得到 E-L 方程, 這是數學物理史上一個重要的里程碑。

本文在證明中, 雖假設約束流形是二維的, 但在 $n$ 個質點時約束流形 $M$ 是 $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ ($n$ 次) 的子流形, 相關的結果也同樣成立。請見參考資料 [1], p.91, D'Alembert's principle。

**註一**: E-L 方程又和最小作用原理等價, 請見參考資料 [1]。值得注意的是歐拉 (1707∼1783), 達朗貝爾 (1717∼1783) 及拉格朗日 (1736∼1813) 均互相熟識, 拉格朗日並在 1766 接替歐拉擔任柏林科學院物理數學所所長。

**註二**: 本文中的約束流形均爲三度空間 $\mathbb{R}^3$ 中的曲線或曲面。例如單擺, 質點在一圓弧上運動, 或質點在球形的碗壁上滑動, 此時約束力 $f$ 均與約束流形垂直, 平行於約束流形的法向量。

**註三**: 此處簡化施力 $F_a$ 的形式, 例如 $F_a$ 是重力, $V$ 是重力位能, $F_a=-\nabla V$, 如此比較容易看出虛功原理和 E-L 方程的關聯。

**註四**: $T$ 是運動質點的動能, 但是作爲一個約束流形上的「函數」, 必須納入切向量的坐標 $\dot{u},\dot{v}$, 並且將 $\dfrac{1}{2}m(X_u\dot{u}+X_v\dot{v},X_u\dot{u}+X_v\dot{v})$ 視爲 $u,v,\dot{u},\dot{v}$ 四個獨立變數的函數, 當 $u,v,\dot{u},\dot{v}$ 分別以質點的運動軌跡 $u(t),v(t),\dot{u}(t),\dot{v}(t)$ 代入 $T$ 時, 即得沿運動軌跡的動能。把 $u,v,\dot{u},\dot{v}$ 當成四個獨立變數的看法, 一般稱爲切叢 (Tangent bundle), 因此可以說 $T$ 是切叢上的函數。請見參考資料 [2], p.439。

**註五**: 最終, 我們事實上證明了 $(m\ddot{X}-F_a,X_u)=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{u}}-\dfrac{\partial L}{\partial u}$。

## 參考資料

1. V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics; 60, 1978.
2. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., 1976.
3. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley series in Advanced Physics, 1962.

—本文作者爲台大數學系退休教授—