數學傳播　45卷4期, pp. 7-10

推薦黃武雄的《大域微分幾何》上中下三卷

蔡宜洵

原文刊登於中華民國數學會電子報第 39期[1], 作者及中華民國數學會同意本刊轉載

黃武雄歷經逾十五載—而若自構想起算, 甚或超過二十載, 終於完成了三大卷的《大域微分幾何》, 於西元 2020 年由臺大出版中心出版。事實上, 他在 1976 時即寫過一本名曰《初等微分幾何講稿》的書, 深受學子們津津樂道。今吾人再度回顧, 赫然發現該冊之封面上方印有「白話數學」四個字。或許讀者們未必–如同當年的我一般, 特別注意此; 然對比於現在的《大域微分幾何》, 其上卷引言的第一小節就以「白話」爲標題, 而於第五節更以「白話數學的意涵」爲題加以闡釋。這其中恐非偶然; 對於想閱讀此套書籍的人, 黃武雄概已經揭示了想傳達的訊息「白話數學提出自然有趣而且重要的問題」。他雖沒說不用白話數學就做不到, 但認爲「對我來說, 白話數學就是要直入核心」。因此, 這個方式應是他認爲欲達其目的之最有效的方式。在此, 要提醒的是, 黃武雄的白話數學絕對不是取容易或是閒聊又或是無關痛癢的題材, 而是想藉著白話, 對於所談之題材更能立馬「直入核心」。

讀者有此了解後, 再回來這套書時, 就處處可感受到黃武雄之精心經營了。關於此書籍之最好的導言, 沒有別的, 實就是該書上卷的引言。與其他大多數專書之引言的不同之處在於, 這個引言長達二十頁, 已經可算是一個小章節了, 就當是第 0 章吧。藉著引言, 黃武雄希望他的讀者千萬不要被本套書看似卷帙浩繁的模樣嚇跑; 而他用的不是降格以求的方式, 而是「搏感情」的方式, 並在品質上又維持著同樣高或甚至更高的標準。

值得一問的是, 這套三大卷長達七, 八百頁之作所針對的讀者群爲何呢? 黃書似乎未特別著墨, 但依筆者之見, 自大學部生至專業的數學學者都可涵蓋。若然, 一個接來的提問是, 白話數學的方式會不會讓專業學者感覺悶或慢? 請看上卷之曲面概要的 B 章, 談及活動標架法的應用, 這裡有 Clifford 環面, 三維球內的極小曲面, 還有 Lorentz 雙曲面等課題。從這些活生生的幾何案例, 帶領到非歐幾何乃至近代幾何。而接下來介紹的可微流形, 其中有討論到「維數不變性」,「Borsuk 分割定理」,「Brouwer 固定點定理」,「Sard 定理」等。再者, 尋常的微分幾何

[1]http://www.tms.org.tw/tw/modules/news/article.php?storyid=102.

的教科書對於 Morse index 理論有所闡釋的實不多見。於此, 黃書於下卷的第 30 章不僅介紹了該理論, 且還從以一維的測地線爲主角的說法延伸到以二維常均曲面爲主的討論; 換句話說, 黃書甚至討論到 Morse index 理論的一種二維推廣。這個內容有部份來自於黃武雄的最新 (合作) 研究成果, 因此是相當前端的工作。[2]

除此, 筆者以爲, 黃書對學者專家們尚有令人更深思之處。試舉一例以明之。許多的數學書常以定義, 定理, 証明的三階段的方式逐步鋪陳。這在邏輯上固有其完整性與簡潔性, 是嚴格數學所不可少的。然卻往往缺乏鳥瞰似的, 或說是「見林不見樹」似的合成性質的論述。以黃書下卷的第 26 章來看, 這裡要談 Plateau 與 Berstein 問題。在本章的前言裡, 黃書就點出了這個課題的驚艷處, 並嘆謂道「$\cdots$ 這是很有趣的事。上帝到底在想什麼?」筆者自忖, 大概沒有任何「正經八百」的數學書會這樣自問自答。然而, 我們共有的經驗是: 誰不面對這漂亮結果時不做出同樣的驚嘆呢? 既然如此, 讀到這裡就是要出出這口氣, 才能劃下句點。揆西方專書似很少如此直接, 這是否因東西語言風格的差異? 本章 (第26章) 的前言在這段提領「我們將集中在兩個課題: i) $\cdots$ ii) $\cdots$」後告終。乾淨扼要, 可令讀者在未進入鋪天蓋地的細節前就約略有個概念, 接下來將要處理的是什麼事。本章另一特別處是在第二節, 專談「de Giorgi 的想法」。說不定有人會認爲這裡寫得像物理書似的, 朦朦朧朧, 或是有「這也未免太幾何了吧」等等意見。然而筆者個人的經驗是, 就是想要從那裡能窺見作者的「獨門心法」呀, 接下來讀之學之才更有心得。因爲它們富於直觀, 容易記住, 甚至以一個「點」就勾出整片問題的方向之所在。在此能讀到 de Giorgi 的心思, 當然是美妙的。偉大的高斯以其思維不留痕跡著稱, 不免讓後世慨嘆可惜。若能留下, 想必可提供多點機會給人們品味/構思數學吧。黃書這裡藉著 de Giorgi 帶領讀者思考, 亦可視爲前述所強調的「直入核心」的一種手法吧。

對於初學者或是想自學的讀者, 很重要的一點恐怕是, 題材在發展脈絡上要有所環環相扣。因讀者若起疑「這裡是要做什麼」而又翻前翻後不得其門時, 慢慢會失去動力。筆者的經驗上, 最常聽到的是微分幾何上的「聯絡」(connection) 的概念爲何要如此定義, 爲何這樣定就以「聯絡」稱之呢? 在哪裡「聯絡」了?「聯絡」誰了? 又爲什麼需要「聯絡」? 接著由聯絡衍生的黎曼曲率張量也就跟著一頭霧水了, 很難從表面的形式定義裡體會到哪裡「彎曲」了。而就算有點感覺, 整個式子很長, 這樣如何可以「想出來」呢? (當然, 我們總可以說, 黎曼等人是天才嘛, 天才的心思常人難以迄及$\cdots$。到此, 多半疑問也被天才論打消了) 試圖私下再去查遍所有的微分幾何教科書, 發現竟也如出一轍 (除了 Spivak 的書外), 就都這樣子定義嘛, 原本的好奇心恐怕也在此終結一大半了。而心裡帶著遺憾的話也恐難走遠。所幸, 黃書提供了另一種視野。這在上卷的第5章開宗明義以「平行性」爲主要想法, 接著才定義聯絡, 並於注記 4 解釋聯絡的直觀意義。而對於黎曼曲率張量更絕了, 黃書上卷的第 3 章的標題是「黎曼曲率的誕生」, 這有點像小

[2]本章之修訂版完成後黃武雄曾表示:「這 ch30 的工作, 經過幾年努力, 終於完整解決 Jacobi 場的分佈問題。關鍵的困難是: 在 cmc 曲面上, 連續變形的 Lipschitz domain, 若拓樸可以改變, 如何確認 stability operator 的特徵值連續? 這顯然是 nontrivial 的問題, 深刻而詭譎。終於成功地克服了困難。」— 原文見於黃武雄致崔茂培之電子郵件 (2021/10/12)。

說的寫法; 而該章的第二節是「黎曼曲率怎麼來」, 這又是前述所謂「直入核心」的另種顯現。此外, 中卷的第 16 章講結構方程, 可感受到活動標架在「動」, 因此彎曲性隨而內在化了。既言及此, 或許黃書可以在講述第 3 章時, 同時也注記第16 章之相關處給讀者, 彰顯這兩種是近代的通用處理方式。這些章節都是適合初學者極佳的參考資料。

在介紹此書之美意的同時, 人們或許也希望知道筆者對此套書籍, 或者對於讀者方面, 是否有其他建議事項。首先, 從此套書本身的內在條理而言, 筆者認爲這套書已面面俱到, 環環相扣了。因此, 任何或任意的加減都可能損害其整體的脈絡。另一方面, 從一個研究生的角度, 如果他的研究專題涉及向量叢, 纖維叢, 特徵類, 主纖維叢, 李群, 李代數, 上同調群的調和式理論等材料時, 本書籍就未完整提到了。這可以怎麼做呢? 筆者以爲或許可以以附錄的方式呈現, 以保留原來風格的首尾一貫性, 同時又兼具需求。而且以附錄爲之, 可能更便於白話數學的風格之展現, 可不必太拘泥於形式數學。纖維叢等若以形式數學的處理方式, 恐怕是令人望而生畏的, 除非是以標準教科書爲目標而寫的。因此「白話版纖維叢」若真的出現, 應會是許多讀者的一大福音。

如若讀者不是研究生, 例如是大學部生, 或沒有特定課題壓力者, 則此書可以是很棒的見証。從上卷, 中卷裡, 你可以學到微分幾何的基礎語言, 從直觀的思維到專業的推論都貼切地結合在一起。至於下卷又該如何看待呢? 下卷的課題涉及極小曲面, 常均曲面, 以及好幾位名數學家包括黃武雄自己的研究成果。如果讀者沒有特定課題的壓力, 你可以在此看到數學研究自開始到發展, 而中間可能會轉彎 (大夥發現對某些事情的原本猜測有誤後接著調整方向) 的一個典型範例。黃武雄在此諄諄教誨, 頗有文學表達上「我手寫我心」之意謂。但仍必須告知讀者的是, 就像古訓「幾何無捷徑」一樣, 這些課題並不軟, 實際上是很高深的, 只有以最嚴肅的心態, 不斷琢磨, 方能有悟, 進而得其精髓。

以尋常教科書的標準而言, 本套書是有習題的。但黃武雄在上卷引言說「··· 這部書我沒有 ··· 擬出很多演習 ··· 到了專業階段 ··· 演習的題目已非絕對必要。反而是定理本身 ···」。他甚至接著說「讀定理的証明之前自己先動手去証明」。這些說法可能會讓不少讀者驚訝; 而且在這知識爆漲的年代, 甚至有些學者或也未必全認同, 因大家往往求快更重於求真。但筆者個人是十分認同黃書此觀點之精神: 只有你自己真正去「消化」定理, 東西才是你的, 若只跟著既有的走, 就算以爲讀懂了, 亦難算真正消化了; 百思不得其解後而悟, 這或可能才是消化了。以筆者見, 黃書通篇都試圖引導讀者走向此, 憑藉著的是書中的題材並以此爲工具。如果讀者真正學到其中的精神, 這樣的收穫可能比純幾何還多了。至此, 善深思的讀者可能再問, 這樣的方式, 就剛所談及的, 知識能累積得夠多嗎? 夠快嗎? 答案恐怕是 ··· 不能! 但你再如何快也基本上 — 趕不上呀。筆者以爲這問題不是真無解, 但似不太有以快制快之法, 否則其他領域的科學家, 隔行如隔山, 也無法使用近代數學了, 不是嗎? 事實並不然, 特別是物理學家。有人認爲科學家比數學家常更能找到他們要的數學。吾人反思後的結論是, 如何可以取得要用的學問, 更常

見的方式是, 這學問被我們自己給「逼問」出來了, 這個過程接近前述黃書所提的「我自己証出定理了」那樣的一種過程。詳節在此不再多談, 就留給有興趣的讀者自己証悟了。這裡要談的訊息是, 對於學生型的讀者, 即使最終目的並不在下卷的特定專題上, 此下卷仍有莫大的價值, 其價值甚至在不一樣的層次上。

關於這部書的其他建議, 在此若以研究型讀者的角度來看, 下卷提及了幾項非常有趣的研究工作; 但疑似未附上充份的引用資料。這包含 Korevaar (page 611), Kapouleas (page 614), Kacher (page 614) 等人的工作。比較令人訝異的是, Henry Wente 的「反例」, 對下卷部份專題的發展起了很大的作用, 但筆者未能易見其引用來源。這些或許該領域之專業人士盡知, 即使如此, 寫上的話應便於有心人日後查詢。

在下卷的最後還附有王藹農, 王慕道, 林俊吉三位學者的三篇論文。黃武雄在上卷引言的結語, 自己評論了這些論文有點睛之妙。此外, 個人認為另類的點睛之效是黃書自己的。在下卷第 28 章, p.614 的注記1引用了幾何大家 E. Hopf 對於 Alexandrov 工作的歷程簡史與評價。雖短短幾句, 然而出自大師之口, 令人眼神為之一亮。這有時可幫助人們理解一個好的工作, 往往不僅該工作本身而已, 且該工作還觸動或激發出一些後續發展。故讀者閱讀時, 或可自我挑戰：若是我的話, 從這裡起可能的下一步為何呢 (也是種見賢思齊吧)? 就此, 筆者最後一個建議是, 若有幾句關於 E. Hopf 之生平與幾何的關係, 有幾句關於 Chen-Huang (陳金次-黃武雄) 在 Invent. Math.[3] 的工作的動機 $\cdots$ 等等, 以注記方式或以 footnote 方式呈現的話, 這樣另類的點睛, 想必會讓讀者耳目一新, 而激發出更大的熱情, 想像與興致吧。

黃武雄著作的大域微分幾何, 其上, 下兩卷以基礎方法論為主; 下卷加上「幾何分析」,「幾何變分法」, 總的結合一起, 藉著極小曲面, 常均曲面等課題, 盡情展示了這些方法。整體言之, 這部書三大卷脈絡相通, 首尾一貫。在論述上不單講求邏輯之必然, 更常從不同角度深入淺出, 找出核心點以探析何以致然; 而後者是作者一本初衷, 念茲在茲的志業。讀者可自書中學到微分幾何的課題, 同時亦感受到一股熱情洋溢的學者風範躍然紙上。凡此種種, 皆乃不可多得之特色, 也是筆者認為本部書最值得推薦給讀者之處。

—本文作者任教臺灣大學數學系—

[3]Invent. Math. 的全名 Inventiones Mathematicae 是數學界所公認數一數二的頂尖期刊, 常見與另一頂尖期刊 Annals of Mathematics 齊名。