數學傳播 45卷3期, pp. 88-102

8k 階優化 Franklin 型幻方的快速構作方法

梁培基 · 張航輔 · 張俠輔

摘要: 優化 Franklin 型幻方是一種具有許多特殊性質的幻方。富蘭克林幻方是迄今爲止奇妙性質最多的幻方,《有趣的數論》一書 (潘承彪譯, 北大出版社出版) 稱爲「最神奇的幻方」而享譽國際, 開「曲線幻方」研究之先河, 深受幻方愛好者所崇敬。

本文給出一種快速構作這類幻方的方法, 並將其公式化, 用之能計算出這類幻方任意位置處的元素, 因此也給使用電腦來構作這類幻方提供一條便利的途徑。

關鍵字: 幻方, 全對稱幻方, Franklin 型幻方, 優化 Franklin 型幻方。

一、引言

本傑明 · 富蘭克林 (Benjamin Franklin, 1706∼1790), 著名政治活動家, 發明家, 他對幻方, 幻圓都有濃厚的興趣, 進行過潛心研究, 留傳下兩個後人稱之爲「Franklin 幻方」的 8 階和 16 階的方陣 [1]。這兩個幻方具有普通幻方所沒有的許多奇妙的特性。但遺憾的是這兩個幻方的兩條對角線上元素之和不等於幻方常數, 因此嚴格說來不能算作幻方, 這點白璧之瑕影響了富蘭克林幻方的完美性, 但比起創造一個幻方「新品種」的豐功偉績, 還是微乎其微的。雖然, 他沒有把構作這類方陣的方法傳給後人。

1990年, 筆者在《數學傳播》十四卷二期「多功能組合幻方」一文中, 發表了一個具有「Franklin 幻方」的全部性質, 並且兩條對角線及各左、右折斷對角線上元素之和也都等於該幻方常數的 8 階幻方。我們稱這類幻方爲「優化 Franklin 幻方」, 簡稱爲「優化 F 型幻方」[2]。

二、8k 階優化 F 型幻方的快速構作方法

定義: 如果由連續自然數 $1, 2, \ldots, n^2$ 排列一個 $n = 8k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ 階方陣具有下列各條性質, 則稱爲 8k 階優化 F 型幻方:

1. 每行、每列 n 個元素之和都等於定值 C;

2. 每條左、右對角線及折斷對角線上 n 個元素之和都等於定值 C;
3. 將每個行、列等分爲兩半, 每一半上 $n/2$ 個元素之和都等於 $C/2$;
4. 將兩條左、右對角線分別等分爲兩半, 每一半上 $n/2$ 個元素之和都等於 $C/2$;
5. 在任意 m $(2 \leq m \leq 2k)$ 個行上, 沿左右對稱的任一橫向波狀折線「∨∧∨」或「∧∨∧」線上的 n 個元素之和都等於 C, 稱爲「行 W 性質」(因其形狀像字母 W, 故名);
   以 8 階優化佛蘭克林幻方的「行 W 線」爲例:
   (1) 從第 1 行第 1 列開始向右下方斜行前進, 到第 2 行第 2 列。之後, 平移至第 2 行的第 3 列位置上;
   (2) 向右上方斜行前進到第 1 行的第 4 列。之後, 平移至第 1 行的第 5 列位置上;
   (3) 向右下方斜行前進到第 2 行的第 6 列, 之後, 平移到第 2 行第 7 列位置上;
   (4) 向右上方斜行前進到第 1 行的第8列, 完成了「行 W 線」的過程。

   需要注意的是, 到達轉彎處, 兩個元素並列。對於「列 W 線」, 可參照圖 1。

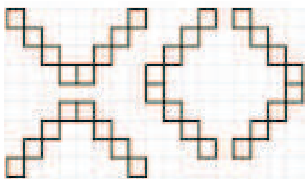
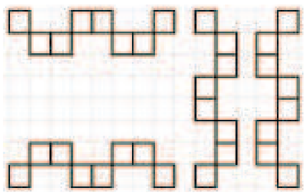
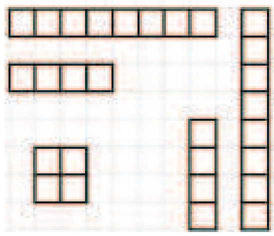
行、列四通 V 形線	行、列四通 W 形線	行、列與半行, 半列及 2×2 小方
		
$S_8 = 260$	$S_8 = 260$	$S_8 = 260$, $S_4 = 130$

圖1

6. 在任意 m $(2 \leq m \leq 2k)$ 個列上, 沿左右對稱的任一橫向波狀折線「>>」或「<<」線上的 n 個元素之和都等於 C, 稱爲「列 W 性質」;

上述各性質中的 C 均爲幻方常數 $n(n^2+1)/2$。以上 6 條性質將在後面給出證明。
另外還有三條有趣的性質: 證明從略。

(1)「四通 V」性質。例如: 從幻方左上角第一行、第一列 $(i = 1,\ j = 1)$ 開始向 $i+1, j+1$ (右下方) 的方向斜行前進, 斜行到第 $n/2$ 行、第 $n/2$ 列; 之後, 平移到第 $n/2+1$列; 開始向 $i-1,\ j+1$ (右上方) 斜行前進, 斜行到第 1 行的第 n 列爲止。所經過的路線形狀像字母「V」, 其「V」形線上 n 個元素之和等於幻和, 且滿足四個方向:「$\vee$, $>$, $<$, $\wedge$」故稱爲「四通 V」性質。可以參照圖 1 畫出其餘的「四通 V 形線」。與「W 形線」不同的是,

「V 形線」只有 1 個轉彎處, 而「W 形線」有 3 個轉彎處。

(2) 在任意偶數×偶數小方陣中, 偶數 2 個元素之和都等於定值的性質。

(3) 在 8 階優化 F 型幻方中, 某個 2×2 小方陣 4 個數的平方和與另外一個 2×2 小方陣 4 個數的平方和之和等於 8 階幻方平方幻和。即 $S_8^2=11180$。(詳見文尾, 16 個 2×2 小方陣平方和表)。

當 $k=1$ 時, 8 階優化 F 型幻方的上述性質用圖形表示如圖 1。

我們知道, 普通幻方僅具有上述性質 1 與性質 2 的前半部分, 全對稱幻方也只具有性質 1 與性質 2 的全部。可見, 優化 F 型幻方是一種具有更多特殊性質的全對稱幻方。然而, 這也使得人們對它的構作顯得更加困難。在本文中, 我們給出一種構作這類幻方的方法, 利用它可以迅速作出任意 $8k$ $(k=1,2,\ldots)$ 階的優化 F 幻方。這種方法建立在下述定理的基礎上:

定理 1: 設 $A=(a_{i,j})$, $B=(b_{i,j})$ 爲自然數集 $\{1,2,\ldots,n\}$ $(n=8k,\ k=1,2,\ldots)$ 上的兩個相互正交 (即 A、B 的相同位置處的元素對構成的 n^2 個有序偶兩兩互異) 的方陣, 如果 A、B 分別具有優化 F 型幻方的各條性質 [對於 A、B 各性質中的定值 $C=n(n+1)/2=4k(8k+1)$], 令

$$h_{i,j}=n(a_{i,j}-1)+b_{i,j}\qquad (i,j=1,2,\ldots,n),$$

則 $H=(h_{i,j})$ 爲 $8k$ 階優化 F 型幻方。

證明: 根據定理條件, H 中對應於 $8k$ 階優化 F 型幻方的性質 1, 2, 5, 6 中的 $n=8k$ 個元素的和分別爲

$$\begin{aligned}\sum_{(n)}h_{i,j}&=n\Big(\sum_{(n)}a_{i,j}-n\Big)+\sum_{(n)}b_{i,j}\\&=n\Big[\frac{n(n+1)}{2}-n\Big]+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n^2+1)}{2}.\end{aligned}$$

$H=(h_{i,j})$ 中對應於性質 3, 4 中的 $n/2$ 個元素的和爲

$$\begin{aligned}\sum_{(n/2)}h_{i,j}&=n\Big(\sum_{(n/2)}a_{i,j}-n/2\Big)+\sum_{(n/2)}b_{i,j}\\&=n\Big[\frac{n(n+1)}{4}-n/2\Big]+\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n^2+1)}{4}.\end{aligned}$$

從而, $H=(h_{i,j})$ 滿足 $8k$ 階優化 F 型幻方的各條性質。

另外, 筆者在文 [3] 的定理 1 中已證, 由 A、B 的正交性可知 H 中的元素恰由 n^2 個互異的連續自然數 $1,2,\ldots,n^2$ 組成, 因此, 根據定義, H 爲 $8k$ 階優化 F 型幻方。

由定理 1 可知, 我們只要找到滿足該定理條件的兩個 $8k$ 階方陣 A 與 B, 即可構作出一個 $8k$ 階優化 F 型幻方 H.

下面, 給出一種構作這樣的 A, B 方陣的方法, 它可分爲如下幾個步驟 [在下文中, 用 $A_{p,q}$ $(p,q=1,2,\ldots,2k)$ 表示 A 中的 4 階子方陣, 用 $a_{r,s}^{p,q}$ $(r,s=1,2,3,4)$ 表示 $A_{p,q}$ 中的元素];

1. 按照下列順序依次填寫出 A 的前 4 列上的 k 個 4 階子方陣 $A_{1,1}, A_{2,1},\ldots,A_{k,1}$ 中的前 2 行:

$A_{1,1}$	1			
				2
$A_{2,1}$	3			
				4
$\vdots$	$\vdots$			
$A_{k-1,1}$	$2k-3$			
				$2k-2$
$A_{k,1}$	$2k-1$			
				$2k$

$\Rightarrow$

1	$4k$		
		$4k-1$	2
3	$4k-2$		
		$4k-3$	4
	$\vdots$		
$2k-3$	$2k+4$		
		$2k+3$	$2k-2$
$2k-1$	$2k+2$		
		$2k+1$	$2k$

$\Rightarrow$

1	$4k$	$4k+1$	
	$4k+2$	$4k-1$	2
3	$4k-2$	$4k+3$	
	$4k+4$	$4k-3$	4
	$\vdots$		
$2k-3$	$2k+4$	$6k-3$	
	$6k-2$	$2k+3$	$2k-2$
$2k-1$	$2k+2$	$6k-1$	
	$6k$	$2k+1$	$2k$

$\Rightarrow$

1	$4k$	$4k+1$	$8k$
$8k-1$	$4k+2$	$4k-1$	2
3	$4k-2$	$4k+3$	$8k-2$
$8k-3$	$4k+4$	$4k-3$	4
	$\vdots$		
$2k-3$	$2k+4$	$6k-3$	$6k+4$
$6k+3$	$6k-2$	$2k+3$	$2k-2$
$2k-1$	$2k+2$	$6k-1$	$6k+2$
$6k+1$	$6k$	$2k+1$	$2k$

2. 在上述各子陣內, 將第 1, 2 行的 1, 3 列分別與 2, 4 列交換後作爲第 3, 4 行, 即

$$A_{p,1}=\begin{pmatrix} a_{1,1}^{p,1} & a_{1,2}^{p,1} & a_{1,3}^{p,1} & a_{1,4}^{p,1} \\ a_{2,1}^{p,1} & a_{2,2}^{p,1} & a_{2,3}^{p,1} & a_{2,4}^{p,1} \\ a_{1,2}^{p,1} & a_{1,1}^{p,1} & a_{1,4}^{p,1} & a_{1,3}^{p,1} \\ a_{2,2}^{p,1} & a_{2,1}^{p,1} & a_{2,4}^{p,1} & a_{2,3}^{p,1} \end{pmatrix} \qquad (p=1,2,\ldots,k).$$

3. 將 $A_{p,1}$ $(p=1,2,\ldots,k)$ 的第 1, 2, 3, 4 行分別爲 $A_{p+k,1}$ 的第 3, 4, 1, 2 行, 得出 A 的前 4 列上其餘 k 個 4 階子方陣 $A_{k+1,1}, A_{k+2,1},\ldots,A_{2k,1}$ 即對於 $p=1,2,\ldots,k$, $s=1,2,3,4$, 有

$$a_{r,s}^{p+k,1}=a_{r+2,s}^{p,1} \qquad (r=1,2),$$
$$a_{r,s}^{p+k,1}=a_{r-2,s}^{p,1} \qquad (r=3,4).$$

4. 將 A 的第 $1\sim 4$ 列完全不變的複製成第 $5\sim 8$, $9\sim 12$, $\ldots$, $8k-3\sim 8k$ 列, 即

$$A_{p,q}=A_{p,1} \qquad (p=1,2,\ldots,2k;q=2,3,\ldots,2k),$$

這樣就造出了 $8k$ 階方陣 A。

5. 將 A 轉置, 就得到 B 陣。即 $B=A^T$。

利用此方法作出的 A、B 方陣, 就能按照定理 1 中的公式 $h_{i,j}=8k(a_{i,j}-1)+b_{i,j}$ $(i,j=1,2,\ldots,8k)$ 計算出 $H=(h_{i,j})$ 的每個元素。也可用一種更直觀更簡便的方法, 即利

用自然數方陣 $Z=z(i,j)$ $(i,j=1,2,\ldots,8k)$:

$$Z=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 8k \\ 8k+1 & 8k+2 & \cdots & 16k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & (8k)^2 \end{pmatrix}$$

及 $h_{i,j}=Za_{i,j}b_{i,j}$ $(i,j=1,2,\ldots,8k)$, 由 A、B 迅速填寫出 $8k$ 階優化 F 型幻方 $H=(h_{i,j})$。這種方法可由定理 1 推出 [3], 我們稱之為「方陣定位法」。

下面, 給出按照上述方法構作的 8 階和 16 階優化 F 型幻方的實例及它們的 A 陣。

8 階:

$A=$

1	4	5	8	1	4	5	8
7	6	3	2	7	6	3	2
4	1	8	5	4	1	8	5
6	7	2	3	6	7	2	3
4	1	8	5	4	1	8	5
6	7	2	3	6	7	2	3
1	4	5	8	1	4	5	8
7	6	3	2	7	6	3	2

$H=$

1	31	36	62	4	30	33	63
52	46	17	15	49	47	20	14
29	3	64	34	32	2	61	35
48	50	13	19	45	51	16	18
25	7	60	38	28	6	57	39
44	54	9	23	41	55	12	22
5	27	40	58	8	26	37	59
56	42	21	11	53	43	24	10

16 階 A 陣

1	8	9	16	1	8	9	16	1	8	9	16	1	8	9	16
15	10	7	2	15	10	7	2	15	10	7	2	15	10	7	2
8	1	16	9	8	1	16	9	8	1	16	9	8	1	16	9
10	15	2	7	10	15	2	7	10	15	2	7	10	15	2	7
3	6	11	14	3	6	11	14	3	6	11	14	3	6	11	14
13	12	5	4	13	12	5	4	13	12	5	4	13	12	5	4
6	3	14	11	6	3	14	11	6	3	14	11	6	3	14	11
12	13	4	5	12	13	4	5	12	13	4	5	12	13	4	5
8	1	16	9	8	1	16	9	8	1	16	9	8	1	16	9
10	15	2	7	10	15	2	7	10	15	2	7	10	15	2	7
1	8	9	16	1	8	9	16	1	8	9	16	1	8	9	16
15	10	7	2	15	10	7	2	15	10	7	2	15	10	7	2
6	3	14	11	6	3	14	11	6	3	14	11	6	3	14	11
12	13	4	5	12	13	4	5	12	13	4	5	12	13	4	5
3	6	11	14	3	6	11	14	3	6	11	14	3	6	11	14
13	12	5	4	13	12	5	4	13	12	5	4	13	12	5	4

在 16 階優化 F 型幻方 H 陣中, 我們用實線標示行 V 形線與列 V 形線, 用虛線標示行 W 形線與列 W 形線。

1	127	136	250	3	125	134	252	8	122	129	255	6	124	131	253
232	154	97	31	230	156	99	29	225	159	104	26	227	157	102	28
121	7	256	130	123	5	254	132	128	2	249	135	126	4	251	133
160	226	25	103	158	228	27	101	153	231	32	98	155	229	30	100
33	95	168	218	35	93	166	220	40	90	161	223	38	92	163	221
200	186	65	63	198	188	67	61	193	191	72	58	195	189	70	60
89	39	224	162	91	37	222	164	96	34	217	167	94	36	219	165
192	194	57	71	190	196	59	69	185	199	64	66	187	197	62	68
113	15	248	138	115	13	246	140	120	10	241	143	118	12	243	141
152	234	17	111	150	236	19	109	145	239	24	106	147	237	22	108
9	119	144	242	11	117	142	244	16	114	137	247	14	116	139	245
240	146	105	23	238	148	107	21	233	151	112	18	235	149	110	20
81	47	216	170	83	45	214	172	88	42	209	175	86	44	211	173
184	202	49	79	182	204	51	77	177	207	56	74	179	205	54	76
41	87	176	210	43	85	174	212	48	82	169	215	46	84	171	213
208	178	73	55	206	180	75	53	201	183	80	50	203	181	78	52

根據上面曲線的畫法, 可以方便地畫出其餘的行、列四通 V 形線及四通 W 形線, 從略。

事實上, 上述構作 A 方陣的方法可以用下列計算公式表示出來:

$$A_{p,q}=\begin{cases}\begin{pmatrix}2p-1 & 4k-2p+2 & 4k+2p-1 & 8k-2p+2\\ 8k-2p+1 & 4k+2p & 4k-2p+1 & 2p\\ 4k-2p+2 & 2p-1 & 8k-2p+2 & 4k+2p-1\\ 4k+2p & 8k-2p+1 & 2p & 4k-2p+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p=1,2,\ldots,k\\ q=1,2,\ldots,2k\end{pmatrix}\\[2ex] \begin{pmatrix}4k-2(p-k)+2 & 2(p-k)-1 & 8k-2(p-k)+2 & 4k+2(p-k)-1\\ 4k+2(p-k) & 8k-2(p-k)+1 & 2(p-k) & 4k-2(p-k)+1\\ 2(p-k)-1 & 4k-2(p-k)+2 & 4k+2(p-k)-1 & 8k-2(p-k)+2\\ 8k-2(p-k)+1 & 4k+2(p-k) & 4k-2(p-k)+1 & 2(p-k)\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}p=k+1,k+2,\ldots,2k\\ q=1,2,\ldots,2k\end{pmatrix}\end{cases}\qquad(1)$$

或者等價地用下列計算公式表示 $A_{i,j}$ 出來:

$j=1,2,\ldots,8k$					
$j\equiv 1(\bmod 4)$	$j\equiv 2(\bmod 4)$	$j\equiv 3(\bmod 4)$	$j\equiv 1(\bmod 4)$		
$\frac{i+1}{2}$	$4k-\frac{i-1}{2}$	$4k+\frac{i+1}{2}$	$8k-\frac{i-1}{2}$	$i\equiv 1(\bmod 4)$	$i=1,2,\ldots,4k$
$8k-\frac{i}{2}$	$4k+\frac{i}{2}+1$	$4k-\frac{i}{2}$	$\frac{i+2}{2}$	$i\equiv 2(\bmod 4)$	
$4k-\frac{i-3}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	$8k-\frac{i-3}{2}$	$4k-\frac{i-1}{2}$	$i\equiv 3(\bmod 4)$	
$4k+\frac{i}{2}$	$8k-\frac{i}{2}+1$	$\frac{i}{2}$	$4k-\frac{i}{2}+1$	$i\equiv 4(\bmod 4)$	
$6k-\frac{i-1}{2}$	$\frac{i+1}{2}-2k$	$10k-\frac{i-1}{2}$	$2k+\frac{i+1}{2}$	$i\equiv 1(\bmod 4)$	$i=4k+1,$ $4k+2,\ldots,8k$
$2k+\frac{i+2}{2}$	$10k-\frac{i}{2}$	$\frac{i+2}{2}-2k$	$6k-\frac{i}{2}$	$i\equiv 2(\bmod 4)$	
$\frac{i-1}{2}-2k$	$6k-\frac{i-3}{2}$	$2k+\frac{i-1}{2}$	$10k-\frac{i-3}{2}$	$i\equiv 3(\bmod 4)$	
$10k-\frac{i}{2}+1$	$2k+\frac{i}{2}$	$6k-\frac{i}{2}+1$	$\frac{i}{2}-2k$	$i\equiv 4(\bmod 4)$	

(2)

公式 (2) 提供了一種計算 $8k$ 階優化 F 型幻方在任意指定行列位置處的元素的方法, 利用它可以很方便地編制程式在電腦上構作出任意 $8k$ 階的優化 F 型幻方。

三、8k 階優化 F 型幻方構作方法的證明

按照上述方法構作的 A、B 方陣顯然在自然數集 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上, 根據定理 1, 只須證明 A、B 相互正交, 並具有 $8k$ 階優化 F 型幻方的各條性質即可。

證明 A、B 相互正交。

設 $(a_{i,j}^{m,n},b_{i,j}^{m,n})=(a_{k,l}^{p,q},b_{k,l}^{p,q})$, 其中 $a_{i,j}^{m,n}$ 與 $a_{k,l}^{p,q}$ 分別位於 A 之 4 階子方陣 $A_{m,n}$ 與 $A_{p,q}$ 中, $b_{i,j}^{m,n}$ 與 $b_{k,l}^{p,q}$ 分別位於 B 之 4 階子方陣 $B_{m,n}$ 與 $B_{p,q}$ 中, $i,j,k,l\in\{1,2,3,4\}$, $p,q,m,n\in\{1,2,\ldots,2k\}$。

由 A 的構作步驟 4 知 $A_{\alpha,\beta}=A_{\alpha,1}$, 其中 $\alpha=1,2,\ldots,2k$; $\beta=2,3,\ldots,2k$。因此由假設知

$$a_{i,j}^{m,1}=a_{i,j}^{m,n}=a_{k,l}^{p,q}=a_{k,l}^{p,1}, \tag{3}$$

由 A 的構作步驟 1、2、3 知, 在列標為 1 的 $2k$ 個 4 階子方陣中恰有 k 對子方陣 $A_{p_1,1}$

與 $A_{p_2,1}$ $(p_1=1,2,\ldots,k;\ p_2=p_1+k)$ 具有相同的元素, 而其餘任意兩個子方陣內均無相同元素。在每對具有相同元素的子陣 $A_{p_1,1}$ 與 $A_{p_2,1}$ 內恰存在下列 8 組相同元素

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}^{p_1,1}=a_{3,2}^{p_1,1}=a_{1,2}^{p_2,1}=a_{3,1}^{p_2,1}, &\qquad& a_{1,2}^{p_1,1}=a_{3,1}^{p_1,1}=a_{1,1}^{p_2,1}=a_{3,2}^{p_2,1},\\
&a_{1,3}^{p_1,1}=a_{3,4}^{p_1,1}=a_{1,4}^{p_2,1}=a_{3,3}^{p_2,1}, && a_{1,4}^{p_1,1}=a_{3,3}^{p_1,1}=a_{1,3}^{p_2,1}=a_{3,4}^{p_2,1},\\
&a_{2,1}^{p_1,1}=a_{4,2}^{p_1,1}=a_{2,2}^{p_2,1}=a_{4,1}^{p_2,1}, && a_{2,2}^{p_1,1}=a_{4,1}^{p_1,1}=a_{2,1}^{p_2,1}=a_{4,1}^{p_2,1},\\
&a_{2,3}^{p_1,1}=a_{4,4}^{p_1,1}=a_{2,4}^{p_2,1}=a_{4,3}^{p_2,1}, && a_{2,4}^{p_1,1}=a_{4,3}^{p_1,1}=a_{2,3}^{p_2,1}=a_{4,4}^{p_2,1},
\end{aligned}$$

而其餘任意兩個元素必定互不相同。上面各組元素之下標所成集合如下:

$$\begin{aligned}
&\{(1,1),(3,2),(1,2),(3,1)\},\\
&\{(1,3),(3,4),(1,4),(3,3)\},\\
&\{(2,1),(4,2),(2,2),(4,1)\},\\
&\{(2,3),(4,4),(2,4),(4,3)\}。
\end{aligned}\tag{4}$$

由 (3) 式知, $m\equiv p(\operatorname{mod} k)$, 且 (i,j) 與 (k,l) 必同屬於 (4) 其中一組集合。因爲 $B=A^T$, 故 $b_{i,j}^{m,n}=a_{j,i}^{n,m}$, $b_{k,l}^{p,q}=b_{l,k}^{q,p}$, 因此由假設知

$$a_{j,i}^{n,1}=a_{j,i}^{n,m}=b_{i,j}^{m,n}=b_{k,l}^{p,q}=a_{l,k}^{q,p}=a_{l,k}^{p,1},$$

故 $n\equiv q(\operatorname{mod} k)$, 且 (j,i) 與 (l,k) 也必同屬於 (4) 其中一組集合。

然而 (4) 之 4 組集合中, 滿足 (i,j) 與 (k,l) 同屬於其中一組集合, 且 (j,i) 與 (l,k) 也同屬於其中一組集合, 唯有 $i=k$, $j=l$。

因此 $(a_{i,j}^{m,n},b_{i,j}^{m,n})=(a_{i,j}^{p,q},b_{i,j}^{p,q})$, $m\equiv p(\operatorname{mod} k)$ 且 $n\equiv q(\operatorname{mod} k)$, 由 A 的構作步驟 3 知 $m=p$ 且 $n=q$。故 A 與 B 相互正交。

2. 證明 A、B 有與 $8k$ 階優化 F 型幻方相同的各條性質 (對於 A、B 常數 $C=4k(8k+1)$)。

1) 由 A 的構作步驟 4 知 $A_{p,1}=A_{p,2}=\cdots=A_{p,2k}$ $(p=1,2,\ldots,2k)$, 從而, 當 $i=1,2,\ldots,4k$ 時, 由 (1) 式可得

$$\sum_{j=1}^{8k}a_{i,j}=\begin{cases}2k(2p-1+4k-2p+2+4k+2p-1+8k-2p+2)=4k(8k+1)\\ \hfill (i\equiv 1(\operatorname{mod} 4)),\\ 2k(8k-2p+1+4k+2p+4k-2p+1+2p)=4k(8k+1)\\ \hfill (i\equiv 2(\operatorname{mod} 4)).\end{cases}$$

由 A 的構作步驟 2 知, 當 $i\equiv 3,\ 0(\operatorname{mod} 4)$ 時, A 的各行中的元素集合分別與 $i\equiv 1,\ 2(\operatorname{mod} 4)$ 中的相同; 由 A 的構作步驟 3, 4 知, A 的第 $4k+1,4k+2,\ldots,8k$ 行中的每個

行內的元素集合分別與第 $1,2,\ldots,4k$ 行中一個行內的元素集合相同, 因而 A 的各行元素之和均爲 $4k(8k+1)$。

另一方面, 對於 $j=1,2,\ldots,8k$, 由 (1) 式可得

$$\sum_{i=1}^{4k}a_{i,j}=\begin{cases}\sum\limits_{p=1}^{k}(2p-1+8k-2p+1+4k-2p+2+4k+2p)=\sum\limits_{p=1}^{k}(16k+2)=2k(8k+1)\\ \hfill (j\equiv 1(\operatorname{mod}4)),\\ \sum\limits_{p=1}^{k}(4k+2p-1+4k-2p+1+8k-2p+2+2p)=\sum\limits_{p=1}^{k}(16k+2)=2k(8k+1)\\ \hfill (j\equiv 3(\operatorname{mod}4)).\end{cases}$$

由 A 的構作步驟 2 知, 在 A 的第 $1\sim 4k$ 行上, 當 $j\equiv 2,\,0\pmod 4$ 時, A 的各列元素集合分別與 $j\equiv 1,\,3\pmod 4$ 的相同, 因而對於任意 $j=1,2,\ldots,8k$, 均有

$$\sum_{i=1}^{4k}a_{i,j}=2k(8k+1).$$

由 A 的構作步驟 3 知, A 的各列中的下半部分的元素集合與上半部分相同, 因此, A 的各個半列元素之和均爲 $2k(8k+1)$, 各列元素之和均爲 $4k(8k+1)$。

從而, 已經證明了 A 滿足性質 1, 3.

2) A 的左對角線及各左折斷對角線上 $8k$ 個元素之和爲

$$L_m=\sum_{i=1}^{8k-m}a_{i,i+m}+\sum_{i=8k+1-m}^{8k}a_{i,i+m-8k}\qquad(m=0,1,\ldots,8k-1).$$

由 $A_{p,q}=A_{p_1}$ $(p,q=1,2,\ldots,2k)$, 從 (1) 式可知, 當 $m\equiv 0\pmod 4$ 時,

$$\begin{aligned}L_m&=\sum_{p=1}^{2k}\sum_{r=1}^{4}a_{r,r}^{p,1}\\&=\sum_{p=1}^{k}(2p-1+4k+2p+8k-2p+2+4k-2p+1)\\&\quad+\sum_{p=k+1}^{2k}[4k-2(p-k)+2+8k-2(p-k)+1+4k+2(p-k)-1+2(p-k)]\\&=\sum_{p=1}^{k}(16k+2)+\sum_{p=k+1}^{2k}(16k+2)=4k(8k+1).\end{aligned}$$

當 $m \equiv 1 \pmod 4$ 時

$$\begin{aligned}
L_m &= \sum_{p=1}^{2k}(a_{1,2}^{p,1}+a_{2,3}^{p,1}+a_{3,4}^{p,1}+a_{4,1}^{p,1})\\
&= \sum_{p=1}^{k}(4k-2p+2+4k-2p+1+4k+2p-1+4k+2p)\\
&\quad+\sum_{p=k+1}^{2k}[2(p-k)-1+2(p-k)+8k-2(p-k)+2+8k-2(p-k)+1]\\
&= \sum_{p=1}^{k}(16k+2)+\sum_{p=k+1}^{2k}(16k+2)=4k(8k+1).
\end{aligned}$$

當 $m \equiv 2 \pmod 4$ 時

$$\begin{aligned}
L_m &= \sum_{p=1}^{2k}(a_{1,3}^{p,1}+a_{2,4}^{p,1}+a_{3,1}^{p,1}+a_{4,2}^{p,1})\\
&= \sum_{p=1}^{k}(4k+2p-1+2p+4k-2p+2+8k-2p+1)\\
&\quad+\sum_{p=k+1}^{2k}[8k-2(p-k)+2+4k-2(p-k)+1+2(p-k)-1+4k+2(p-k)]\\
&= \sum_{p=1}^{k}(16k+2)+\sum_{p=k+1}^{2k}(16k+2)=4k(8k+1).
\end{aligned}$$

當 $m \equiv 3 \pmod 4$ 時

$$\begin{aligned}
L_m &= \sum_{p=1}^{2k}(a_{1,4}^{p,1}+a_{2,1}^{p,1}+a_{3,2}^{p,1}+a_{4,3}^{p,1})\\
&= \sum_{p=1}^{k}(8k-2p+2+8k-2p+1+2p-1+2p)\\
&\quad+\sum_{p=k+1}^{2k}[4k+2(p-k)-1+4k+2(p-k)+4k-2(p-k)+2+4k-2(p-k)+1]\\
&= \sum_{p=1}^{k}(16k+2)+\sum_{p=k+1}^{2k}(16k+2)=4k(8k+1).
\end{aligned}$$

A 的右對角線及各右折斷對角線上 $8k$ 個元素之和爲

$$R_m=\sum_{i=1}^{8k-m}a_{i,8k+1-i-m}+\sum_{i=8k+1-m}^{8k}a_{i,16k+1-i-m}\qquad(m=0,1,\ldots,8k-1).$$

同樣的, 由 $A_{p,q}=A_p$ $(p,q=1,2,\ldots,2k)$, 及 (1) 式可得, 當 $m\equiv 0 \pmod 4$ 時,

$$\begin{aligned}R_m&=\sum_{p=1}^{2k}\sum_{r=1}^{4}a^p_{r,5-r}\\&=\sum_{p=1}^{k}(8k-2p+2+4k-2p+1+2p-1+4k+2p)\\&\quad+\sum_{p=k+1}^{2k}[4k+2(p-k)-1+2(p-k)+4k-2(p-k)+2+8k-2(p-k)+1]\\&=\sum_{p=1}^{k}(16k+2)+\sum_{p=k+1}^{2k}(16k+2)=4k(8k+1).\end{aligned}$$

當 $m\equiv 1 \pmod 4$ 時

$$\begin{aligned}R_m&=\sum_{p=1}^{2k}(a^{p,1}_{1,3}+a^{p,1}_{2,2}+a^{p,1}_{3,1}+a^{p,1}_{4,4})\\&=\sum_{p=1}^{k}(4k+2p-1+4k+2p+4k-2p+2+4k-2p+1)\\&\quad+\sum_{p=k+1}^{2k}[8k-2(p-k)+2+8k-2(p-k)+1+2(p-k)-1+2(p-k)]\\&=\sum_{p=1}^{k}(16k+2)+\sum_{p=k+1}^{2k}(16k+2)=4k(8k+1).\end{aligned}$$

當 $m\equiv 2 \pmod 4$ 時

$$\begin{aligned}R_m&=\sum_{p=1}^{2k}(a^{p,1}_{1,2}+a^{p,1}_{2,1}+a^{p,1}_{3,4}+a^{p,1}_{4,3})\\&=\sum_{p=1}^{k}(4k-2p+2+8k-2p+1+4k+2p-1+2p)\\&\quad+\sum_{p=k+1}^{2k}[2(p-k)-1+4k+2(p-k)+8k-2(p-k)+2+4k-2(p-k)+1]\end{aligned}$$

$$= \sum_{p=1}^{k}(16k+2) + \sum_{p=k+1}^{2k}(16k+2) = 4k(8k+1).$$

當 $m \equiv 3 \pmod 4$ 時

$$R_m = \sum_{p=1}^{2k}(a_{1,1}^{p,1} + a_{2,4}^{p,1} + a_{3,3}^{p,1} + a_{4,2}^{p,1})$$
$$= \sum_{p=1}^{k}(2p-1+2p+8k-2p+2+8k-2p+1)$$
$$+ \sum_{p=k+1}^{2k}[4k-2(p-k)+2+4k-2(p-k)+1+4k+2(p-k)-1+4k+2(p-k)]$$
$$= \sum_{p=1}^{k}(16k+2) + \sum_{p=k+1}^{2k}(16k+2) = 4k(8k+1).$$

從而, 我們已證, A 的左右對角線及各左右折斷對角線上 $8k$ 個元素之和均爲常數 $4k(8k+1)$, 故而滿足性質 2。

3) 由 (1) 式可知

$$\sum_{i=1}^{4k} a_{i,i} = \sum_{p=1}^{k}(2p-1+4k+2p+8k-2p+2+4k-2p+1)$$
$$= \sum_{p=1}^{k}(16k+2) = 2k(8k+1),$$
$$\sum_{i=1}^{4k} a_{i,8k+1-i} = \sum_{p=1}^{k}(8k-2p+2+4k-2p+1+2p-1+4k+2p)$$
$$= \sum_{p=1}^{k}(16k+2) = 2k(8k+1).$$

而 2) 中已證, $\sum\limits_{i=1}^{8k} a_{i,i} = 4k(8k+1)$, $\sum\limits_{i=1}^{8k} a_{i,8k+1-i} = 4k(8k+1)$.

故 A 的各左右對角線的一半上的 $4k$ 個元素之和均爲 $2k(8k+1)$ 即 A 滿足性質 4。

4) 由 (1) 式顯然可知, 在任意 4 階子方陣 $A_{p,q}$ $(p,q=1,2,\ldots,2k)$, 中, 均有

$$a_{r,1}^{p,q} + a_{r,4}^{p,q} = 8k+1, \qquad a_{r,2}^{p,q} + a_{r,3}^{p,q} = 8k+1 \qquad (r=1,2,3,4).$$

因 A 中任意 m 行 $(2 \le m \le 2k)$ 上左右對稱的每條橫向波形線「$\smile\!\frown\!\smile$」或「$\frown\!\smile\!\frown$」上的 $8k$ 個元素, 恰由 $2k$ 組 $a_{r,1}^{p,q}$, $a_{r,4}^{p,q}$ 與 $2k$ 組 $a_{r,2}^{p,q}$, $a_{r,3}^{p,q}$ 構成。

因而, 這樣的 $8k$ 個元素之和均為 $4k(8k+1)$, 即 A 滿足性質 5。

5) 由 (1) 式易見, 在任意 4 階子方陣, $A_{p,q}$ 與 $A_{p+k,q}$ $(p=1,2,\ldots,k;\ q=1,2,\ldots,2k)$ 中, 均有

$$\left.\begin{aligned} a_{1,s}^{p,q}+a_{4,s}^{p,q}+a_{1,s}^{p+k,q}+a_{4,s}^{p+k,q}=2(8k+1),\\ a_{2,s}^{p,q}+a_{3,s}^{p,q}+a_{2,s}^{p+k,q}+a_{3,s}^{p+k,q}=2(8k+1),\end{aligned}\right. \qquad (s=1,2,3,4).$$

因 A 中任意 m 列 $(2\le m\le 2k)$ 中, 上下對稱的每條縱向波形線「$\substack{>\\>}$」或「$\substack{<\\<}$」上前 $8k$ 個元素恰由 k 组 $a_{1,s}^{p,q},a_{4,s}^{p,q},a_{1,s}^{p+k,q},a_{4,s}^{p+k,q}$ 與 k 組 $a_{2,s}^{p,q},a_{3,s}^{p,q},a_{2,s}^{p+k,q},a_{3,s}^{p+k,q}$ 構成。因而這樣的 $8k$ 個元素之和為 $4k(8k+1)$, 即 A 滿足性質 6。

從而, 已經證明 A 滿足 $8k$ 階優化 F 型幻方的 6 條性質 (對於 A, 其中常數 $C=4k(8k+1)$), 由性質 1, 3, 5, 6 具有行列互換不變性, 因而 $B=A^T$, 亦具有性質 1, 3, 5, 6; 由於 A 經過轉置後各條左右對角線及折斷對角線僅僅排列順序發生了一些變化, 而元素集合沒有改變, 因而 B 亦具有性質 2, 4。

至此, 我們證明了按上述方法構造的 $8k$ 階方陣 A、B 滿足定理 1 的所有條件。因之, 由它們作出的方陣 $H=(h_{i,j})$, $h_{i,j}=8k(a_{i,j}-1)+b_{i,j}$ $(i,j=1,2,\ldots,8k)$ 必為 $8k$ 階優化 F 型幻方。

四、結語

事實上, 按本文方法作出的 $8k$ 階優化 F 型幻方還具有另外一些奇妙的性質, 例如:

將 $8k$ 階優化 F 型幻方 H 分為 $2k\times 2k$ 個 4 階子方陣 $H_{p,q}$ $(p,q=1,2,\ldots,2k)$, 由這些 4 階子方陣組成的所有 $4m$ 階 $(m=1,2,\ldots,2k)$ 子方陣均為廣義全對稱幻方。這樣 8 階優化 F 型幻方含有 4 個 4 階和 1 個 8 階全對稱幻方; 16 階優化 F 型幻方含有 16 個 4 階, 9 個 8 階, 4 個 12 階和 1 個 16 階全對稱幻方。一般的, $8k$ 階優化 F 型幻方內含有 $(2k-m+1)^2$ 個 $4m$ $(m=1,2,\ldots,2k)$ 階全對稱幻方。並且, 其中那些被 $8k$ 階方陣的水準中軸線穿過, 同時上下行數正好相等的 $8e$ $(e=1,2,\ldots,k)$ 階子方陣還是廣義 $8e$ 階優化 F 型幻方。

$8k$ 階優化 F 型幻方的每個 4 階子方陣都是幻和為 $C/2k$ 的全對稱幻方, 因此, 任意地從這 $2k\times 2k$ 個 4 階子方陣中取出 $2k$ 個行、列、對角線或折斷對角線, 得到的 $8k$ 個元素之和均等於 $8k$ 階幻和 C。

$8k$ 階優化 F 型幻方內的任意 m 階 $(m=2,4,\ldots,8k-2)$ 子方陣中的 m^2 個元素之和都相等。

另外, 把 8 階優化 F 型幻方分成 16 個 2×2 小方陣, 依次為 $H_{11},H_{12},\ldots,H_{44}$。把每個 2×2 小方陣的平方和計算出來, 如下 16 個 2×2 小方陣平方和表:

H_{11} 5782	H_{12} 5654	H_{13} 5526	H_{14} 5654
H_{21} 5654	H_{22} 5782	H_{23} 5654	H_{24} 5526
H_{31} 5526	H_{32} 5654	H_{33} 5526	H_{34} 5398
H_{41} 5654	H_{42} 5526	H_{43} 5398	H_{44} 5526

把 $\begin{matrix} H_{11}, H_{12}, H_{13}, H_{14} \\ H_{21}, H_{22}, H_{23}, H_{24} \end{matrix}$ 旋轉 180°, 分別與 $\begin{matrix} H_{31}, H_{32}, H_{33}, H_{34} \\ H_{41}, H_{42}, H_{43}, H_{44} \end{matrix}$ 重合, 其兩個小方陣 8 元素的平方和都等於 11180。

在上表中:

$S_4^2 = 5782$ 的兩組, 可以與 $S_4^2 = 5398$ 的兩組匹配使得 $S_8^2 = 11180$。
$S_4^2 = 5526$ 的六組, 可以與 $S_4^2 = 5654$ 的六組匹配使得 $S_8^2 = 11180$。
(S_4^2 表示 2×2 子方陣中 4 個數的平方和, $S_8^2 = 11180$ 是 8 階平方幻方的平方和。)

在這個優化F 型幻方裏, 出現了平方和相等的性質, 並且以2×2子方陣的形式出現, 頗爲少見。

致謝: 本文從初稿到定稿經歷 4 次修改, 經過審稿老師的多次認真審理, 匡正謬誤, 並且不辭勞苦親自給出簡捷、淸晰的證明 (A, B 陣相互正交), 要說感謝未免太過輕薄, 待日後有機會到貴處拜謁學習!

附錄:

紀念偉大科學家富蘭克林誕辰310周年 (1706~2016)

爲紀念富蘭克林 (1706.1.17~1790.4.17) 在幻方方面的巨大貢獻, 在富蘭克林誕辰310周年之際, 著名數學家李學數教授提議設計一個「紀念富蘭克林誕辰 310周年幻方」, 來紀念這位身兼多職的著名科學家。

在下面這個幻方中, 具有「優化富蘭克林幻方的全部性質」, (僅僅是使用的數字不是連續自然數)。幻方的幻和 $S_8 = 2106$, 我們把「310」放在幻方的第 1 行, 第 1 列的位置上。其它性質如下:

生年:1706年 = 第 1 行的第 2 列至第 8 列上 7 個元素之和;
= 第 1 列的第 2 行至第 8 行上 7 個元素之和;
= 對角線上 $212 + 194 + 292 + 283 + 203 + 221 + 301$ 之和
= 折斷對角線上: $297 + 197 + 207 + 283 + 288 + 218 + 216$ 之和

月: 1 月, 隱含於 212 之中, $2+1-2=1$。

日: 17日, 隱含於 296 之中, $2+9+6=17$。或者, 隱含於 287 之中, $2+8+7=17$。

逝世時間: 1790 年 $=1008+280+196+206$,

(其中的 1008 等於任意半行、或者半列、或者 2×2 小方陣上的 4 個數之和等等。)

4 月, 隱含於 206 之中, $6-0-2=4$. 17 日, 同上。

紀念富蘭克林誕辰 310 周年 8 階優化 F 型幻方

310	280	222	**196**	**307**	281	225	**195**
206	**212**	**294**	296	209	**211**	**291**	297
282	308	194	224	279	309	197	223
210	208	298	292	213	207	295	**293**
286	**304**	198	220	283	305	**201**	219
214	204	**302**	288	217	**203**	299	289
306	284	218	**200**	**303**	285	221	199
202	216	290	300	205	215	287	301

一友贊富蘭克林幻方	
富蘭克林幻方奇,	富蘭克林幻方妙,
神奇奧妙驚天地。	特性最多無人超。
開創曲線和相等,	兩個幻方示後人,
和幻方中數第一。	豐功偉績滿天耀!

富蘭克林還有一個美好的願望, 他希望: 構造幻方不要過多繁雜的計算, 也不要調換元素位置, 就像書寫自然數一樣快捷, 直接填寫出來。這個美好的願望在 300 年後被實現了, 筆者在《數學傳播》1996 年 4 期發表了「偶數階幻方的快速構作」, 其速度之快就像在空白紙上書寫自然數一樣, 所以稱爲「直接書寫法」。著名美國數學家李學數教授對「直接書寫法」的評語是:「方法之簡單, 速度之快捷, 其他任何方法歎之莫及!」。從而, 完成了大發明家富蘭克林的夙願, 他留下的兩個幻方難題都已經解決, 倘若富蘭克林先生有知, 定然「含笑天堂」矣!

參考文獻

1. Oystein Ore, *Invitation to Number Theory*, Yale University, 1967.
2. 梁培基, 顧同新。多功能組合幻方。數學傳播季刊, 14(2), 82-89, 1990。
3. 梁培基, 張航輔, 張俠輔。幻方的一種構作方法。雲南大學學報, 11(4), 310-319, 1989。
4. 梁培基, 顧同新。平方幻方與雙重幻方的構造。數學傳播季刊, 13(3), 65-69, 1989。
5. 潘承彪 譯。《有趣的數論》。北京大學出版社, 1985年。
6. 李學數。《數學與數學家的故事》。第 7 集, 上海科技出版社, 2015 年出版。

—本文作者梁培基任職中國河南省封丘縣科協, 張航輔任教中國雲南民族學院數學系, 張俠輔任教中國昆明理工大學基礎部—