數學傳播 45卷3期, pp. 83-87

圓內接奇數邊形與偶數邊形的幾點差異

吳　波

在文 [1] 中李輝濱先生證明了“圓內接奇數邊多邊形的正弦定律”。由於表述起來較複雜, 下面僅以圓內接五邊形爲例 (本文中的多邊形都是凸多邊形):

命題1(**見** [1]): 如圖 1, 對半徑爲 R 的圓的內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 有:

$$\frac{A_1A_2}{\sin(A_3+A_5)}=\frac{A_2A_3}{\sin(A_1+A_4)}=\frac{A_3A_4}{\sin(A_2+A_5)}=\frac{A_4A_5}{\sin(A_3+A_1)}=\frac{A_5A_1}{\sin(A_4+A_2)}=-2R.$$

文 [1] 還提到, 對圓內接偶數邊形, “尚未被發掘出有相同類型的比例式”。

本文中我們先給出上述命題的一個簡單證明。然後從理論上說明：對圓內接偶數邊形, 爲何不存在同樣的比例式。

引理 (**見** [1]): 對圓內接 $2n$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}$ $(n\geq 2)$ 的內角, 有下式恒成立:

$$\sum_{i=1}^{n}A_{2i-1}=\sum_{i=1}^{n}A_{2i}=(n-1)\pi.$$

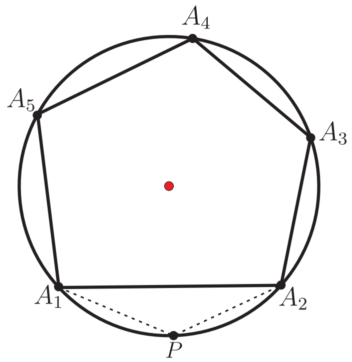

圖1

命題 1 的證明: 如圖 1, 在 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 上取一點 P, 則對圓內接六邊形 $A_1PA_2A_3A_4A_5$, 由引理可知：$P=2\pi-(A_3+A_5)$.

在 $\triangle A_1PA_2$ 中, 由正弦定理有：$\dfrac{A_1A_2}{\sin P}=2R$. 將前式代入即得:

$$\frac{A_1A_2}{\sin(A_3+A_5)}=-2R.$$

同理可證其他幾式。 □

顯然, 這種方法對一般的圓內接奇數邊形仍然適用(有時 $2R$ 前沒有負號)。

對圓內接偶數邊形, 按同樣的方法: 在某條弧上取一點 P, 再連上相鄰兩頂點, 可轉化爲圓內接奇數邊形。但對圓內接奇數邊形, 引理中的結論並不成立。因此, 對圓內接偶數邊形, 不存在同樣的比例式。

但這還不能完全消除我們的疑惑。因爲“對圓內接奇數邊形引理中的結論並不成立”, 這只是說不存在“$P=2\pi-(A_3+A_5)$”這種表達式。但如果 $\angle P$ 能由諸 $\angle A_i$ $(i=1,2,3,\ldots,n)$ 用其他方式表示出來呢?

因此, 我們有必要探討如下問題:

問題: $\angle P$ 能由諸 $\angle A_i$ $(i=1,2,3,\ldots,n)$ 確定嗎?

易知三角形時是可以確定的。下面看圓的內接四邊形的情形。

如圖 2, $\odot O$ 的內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四個頂點將圓周分割成四段弧, 設其中的 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 所對的圓心角的弧度爲 $x_{(i)(i+1)}$ $(i=1,2,3,4$, 約定：當某個腳標超過 4 時, 將其等同於模 4 的最小正剩餘)。在 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 上取一點 P, 由圓內接四邊形對角互補知：$P+\dfrac{1}{2}x_{12}=\pi$.

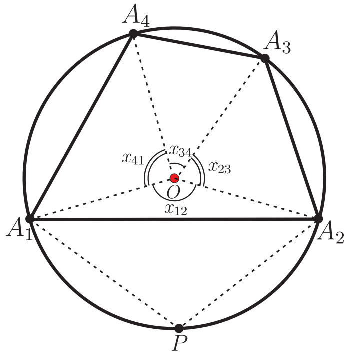

圖 2

要由諸 $\angle A_i$ $(i=1,2,3,4)$ 去確定 $\angle P$, 即轉化爲由諸 $\angle A_i$ $(i=1,2,3,4)$ 去確定 x_{12}.

由圓內接四邊形對角互補知:

$$A_2+\frac{1}{2}(x_{12}+x_{23})=\pi.$$

變形得:

$$x_{12}+x_{23}=2(\pi-A_2).$$

同理有:

$$x_{23}+x_{34}=2(\pi-A_3),\quad x_{34}+x_{41}=2(\pi-A_4),\quad x_{12}+x_{41}=2(\pi-A_1).$$

其中 $A_1+A_2+A_3+A_4=2\pi$.

說明: 另一限制條件“$x_{12}+x_{23}+x_{34}+x_{41}=2\pi$”已蘊含在“$A_1+A_2+A_3+A_4=2\pi$”之中。

可算得這四個方程所組成的線性方程組的係數行列式的值爲 0.

這意味著：此方程組的解中含有自由變量。僅由諸 $\angle A_i$ $(i=1,2,3,4)$ 並不能確定 x_{12}. 從而也不能確定 $\angle P$.

一般地, 對圓內接 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ $(n\geq 3)$, n 個頂點將圓周分割成 n 段弧, 設其中的 $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ 所對的圓心角的弧度爲 $x_{(i)(i+1)}$ $(i=1,2,\ldots,n$, 約定：當某個腳標超過 n

時, 將其等同於模 n 的最小正剩餘)。同上可得:

$$\begin{cases} x_{12}+x_{23} &= 2(\pi-A_2) \\ x_{23}+x_{34} &= 2(\pi-A_3) \\ \quad\vdots & \vdots \qquad \vdots \\ x_{(n-1)(n)}+x_{(n)(1)} &= 2(\pi-A_n) \\ x_{12}+x_{(n)(1)} &= 2(\pi-A_1) \end{cases} \qquad \Big(\text{其中 } \sum_{i=1}^{n} A_i=(n-2)\pi\Big).$$

其係數行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 按第一列展開得:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}.$$

因此, 當 n 爲不小於3的奇數時, $D_n=2$. 此時有唯一解。

這表明：若告知圓內接奇數邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的內角及內角的順序, 則其各邊所對的圓心角及其順序將被確定。也就是說, 圓內接奇數邊形的形狀可以由它的內角及內角的順序來確定。

事實上, 當 n 爲不小於 3 的奇數時, 由上述線性方程組可以解出 $x_{(i)(i+1)}$ 即有 (過程略) :

命題2: 對圓內接奇數邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ $(n\geq 3)$, 弧 $\overparen{A_iA_{i+1}}$ 所對圓心角的弧度爲 $x_{(i)(i+1)}$ $(i=1,2,\ldots,n$, 約定：當某個腳標超過 n 時, 將其等同於模 n 的最小正剩餘), 則

$$x_{(k)(k+1)}=2\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}A_{k+2i}-(n-3)\pi \qquad (k=1,2,3,\ldots,n).$$

結合 $x_{(k)(k+1)} > 0$, 由命題 2 可知: 諸 A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ 必滿足

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} A_{k+2i} > \frac{n-3}{2}\pi \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

又, 注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = (n-2)\pi$, 減掉上式中那 $\dfrac{n-1}{2}$ 個角的和, 剩下的 $\dfrac{n+1}{2}$ 個角的和將小於 $\dfrac{n-1}{2}\pi$, 即有

命題3: 對圓內接奇數邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ $(n \geq 3)$ 的內角, 約定 $A_{n+j} = A_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, 則有:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} A_{k+2i} > \frac{n-3}{2}\pi, \quad \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} A_{k+2i} < \frac{n-1}{2}\pi, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

這表明：對圓內接奇數邊形的內角, 雖然不存在引理中那樣的等式, 但有上述不等式限制。

命題 3 也可直接用引理證明。這只需像圖 1 中那樣, 在某弧上取一個點並連接相鄰兩個頂點, 從而轉化爲圓內接偶數邊形。再在引理中那個等式的基礎上進行放縮即可。

而當 n 爲不小於 4 的偶數時, $D_n = 0$, 此時解中將含有自由變量。這即是說：對圓內接偶數邊形, 僅由它的內角是無法確定其形狀的。這方面最常見的例子是矩形。下面給出的圖 3 也可以表明這一點 —— 這些六邊形各邊對應平行, 各內角對應相等, 但形狀各不相同。

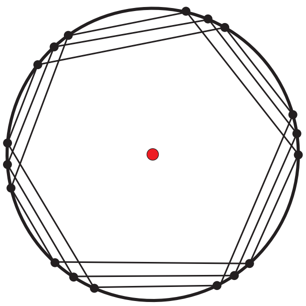

圖3

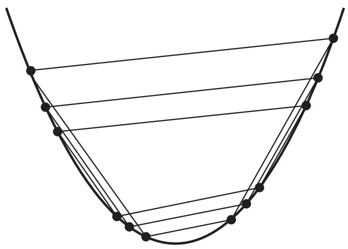

圖4

我們將上述討論總結爲:

命題4: 圓內接奇數邊形的形狀完全由它的內角及內角的順序確定; 但對圓內接偶數邊形, 由其內角及內角的順序並不能確定其形狀。

由命題 4 即知：對圓內接偶數邊形, 如命題 1 那樣的比例式是不存在的。

有趣的是, 像圖 3 這樣, 有一組各邊對應平行的內接偶數邊形, 這並不是圓才擁有的特性。

事實上, 一般的二次曲線都擁有這種特性 (圖 4 只展示了拋物線時的情形)。對此感興趣的讀者可參閱文 [2].

參考資料

1. 李輝濱。圓內接奇數邊多邊形的正弦定律。數學傳播季刊, 37(4), 84-93, 2013。
2. 吳波。二次曲線的一個封閉性質 — whc174 的拓廣和本質。數學通報, 53(6), 57-60, 63, 2014。

—本文作者任教中國重慶市長壽龍溪中學—

勘誤表

第 45 卷第 1 期 (177號)

(1) 第24頁 20世紀未數學的最大成就之一

應爲：20世紀末數學的最大成就之一

(2) 第28頁 定義 L-函數

$$L(s,\chi)=\sum_{(n=1,p|\!\!/n}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},\quad \text{其中 } s\in\mathbb{C},\ \Re s>1.$$

應爲：

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1,p\nmid n}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},\quad \text{其中 } s\in\mathbb{C},\ \Re s>1.$$

(3) 第31頁 定義 $E/\mathbb{Q}$ 的 zeta 函數如下：

$$L(E/\mathbb{Q},s)=\prod_{\ell|\!\!/\triangle}\frac{1}{1-a_\ell(E)\ell^{-s}+\ell^{1-2s}},\quad (\Re s>\frac{3}{2}).$$

應爲：

$$L(E/\mathbb{Q},s)=\prod_{\ell\nmid\triangle}\frac{1}{1-a_\ell(E)\ell^{-s}+\ell^{1-2s}},\quad (\Re s>\frac{3}{2}).$$