數學傳播 45卷3期, pp. 77-82

學測試題一個選項的討論

胡家祥

本文要討論的是今 (110) 年學科能力測驗數學考科第13題選項 (5), 這一題的題幹爲「多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 其中 a,b,c 均爲有理數。」選項 (5) 爲「存在有理數 a,b,c 使得 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 依序形成等比數列。」, 這個選項在考場難倒無數考生, 考後也難倒不少高中老師。坊間看到的解法, 有的是設定 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 的值, 用插值法去確定 $f(x)$ 的有理係數 a,b,c 存在 (或直接求出有理數 a,b,c); 也有的是給定等比數列的公比, 去確定 $f(x)$ 的有理係數 a,b,c 存在 (或直接求出有理數 a,b,c)。

對一個學數學的人而言, 我見到這個題目, 會想到的是 (一) 有理數 a,b,c 存在嗎? 有多少組有理數 a,b,c? 和等比數列的公比 r 的關係爲何? (二) 如果有理數 a,b,c 存在, a,b,c 的值爲何? 以下依序討論這兩個問題。

問題一: 多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 其中 a,b,c 均爲有理數。使得 $f(1),f(2),f(3)$, $f(4)$ 依序形成等比數列的有理數 a,b,c 存在嗎? 有多少組有理數 a,b,c? 和等比數列的公比 r 的關係爲何?。

解法一: $f(1)=a+b+c+1$, $f(2)=4a+2b+c+8$, $f(3)=9a+3b+c+27$, $f(4)=16a+4b+c+64$ 要使得 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 依序形成等比數列, (設公比爲 r),

即使得 $\dfrac{f(2)}{f(1)}=\dfrac{f(3)}{f(2)}=\dfrac{f(4)}{f(3)}=r$, 或 $\begin{cases} f(2)=r(f(1)) \\ f(3)=r(f(2)) \\ f(4)=r(f(3)) \end{cases}$, 可化爲三元一次方程組

$$\begin{cases} (4-r)a+(2-r)b+(1-r)c=r-8 \\ (9-4r)a+(3-2r)b+(1-r)c=8r-27 \\ (16-9r)a+(4-3r)b+(1-r)c=27r-64 \end{cases}, \qquad (*)$$

用方程組 $(*)$ 的判別式 Δ 來討論,

$$\begin{aligned}\Delta=&\begin{vmatrix}4-r & 2-r & 1-r\\ 9-4r & 3-2r & 1-r\\ 16-9r & 4-3r & 1-r\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-r & 2-r & 1-r\\ 5-3r & 1-r & 0\\ 12-8r & 2-2r & 0\end{vmatrix}\\ =&(1-r)\begin{vmatrix}5-3r & 1-r\\ 12-8r & 2-2r\end{vmatrix}=(1-r)^2\times\begin{vmatrix}5-3r & 1\\ 12-8r & 2\end{vmatrix}\\ =&(1-r)^2(-2+2r)=-2(1-r)^3,\end{aligned}$$

故當 $r\neq 1$, a,b,c 的三元一次方程組都有恰有一組解, 又當 r 是有理數時, Δ, Δ_a, Δ_b, Δ_c, 都是有理數, 故可得出存在有理數 $a=\dfrac{\Delta_a}{\Delta}$, $b=\dfrac{\Delta_b}{\Delta}$, $c=\dfrac{\Delta_c}{\Delta}$, 使得 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 依序形成等比數列。

解法二: $f(1)=a+b+c+1$, $f(2)=4a+2b+c+8$, $f(3)=9a+3b+c+27$, $f(4)=16a+4b+c+64$ 要使得 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 依序形成等比數列, (設公比爲 r),

即使得 $\dfrac{f(2)}{f(1)}=\dfrac{f(3)}{f(2)}=\dfrac{f(4)}{f(3)}=r$, 或 $\begin{cases}f(2)=r(f(1))\\ f(3)=r(f(2))\\ f(4)=r(f(3))\end{cases}$, 可化爲三元一次方程組

$$\begin{cases}(4-r)a+(2-r)b+(1-r)c=r-8\\ (9-4r)a+(3-2r)b+(1-r)c=8r-27\\ (16-9r)a+(4-3r)b+(1-r)c=27r-64\end{cases}, \qquad (*)$$

$$\begin{bmatrix}4-r & 2-r & 1-r & r-8\\ 9-4r & 3-2r & 1-r & 8r-27\\ 16-9r & 4-3r & 1-r & 27r-64\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4-r & 2-r & 1-r & r-8\\ 5-3r & 1-r & 0 & 7r-19\\ 12-8r & 2-2r & 0 & 26r-56\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}4-r & 2-r & 1-r & r-8\\ 5-3r & 1-r & 0 & 7r-19\\ 2-2r & 0 & 0 & 12r-18\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4-r & 2-r & 1-r & r-8\\ 5-3r & 1-r & 0 & 7r-19\\ 1-r & 0 & 0 & 6r-9\end{bmatrix}$$

表示透過消去法, $(*)$ 化簡成

$$\begin{cases} (4-r)a \;\; + (2-r)b + (1-r)c = r-8 \\ (5-3r)a + (1-r)b + \qquad\qquad = 7r-19 \\ (1-r)a \;\; + \qquad\qquad\qquad\qquad = 6r-9 \end{cases}, \qquad (**)$$

當 $r \neq 1$ 時, 方程組有解, 而當 $r \neq 1$, r 是有理數時, 方程組有有理數解, 即存在有理數 a, b, c 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 依序形成等比數列。

解法三: 尋找一個有理係數三次多項函數 $f(x)$, 使得 $f(1) = k$, $f(2) = rk$, $f(3) = r^2k$, $f(4) = r^3k$, 其中 k 為非0之有理數, r 是不為 1 也不為 0 的有理數。

由拉格朗日 (Lagrange) 插值公式取

$$\begin{aligned} g(x) =& k\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + rk\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\ &+ r^2k\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + r^3k\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \\ =& -\frac{k}{6}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{rk}{2}(x-1)(x-3)(x-4) \\ &- \frac{r^2k}{2}(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{r^3k}{6}(x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

$g(x)$ 的三次項係數為 $\dfrac{k}{6}(-1+3r-3r^2+r^3) = \dfrac{k(r-1)^3}{6} \neq 0$,

故 $g(x)$ 是一個首項係數為 $\dfrac{k(r-1)^3}{6}$ 的三次有理係數多項式,

令 $f(x) = \dfrac{6}{k(r-1)^3}g(x)$, 則 $f(x)$ 是一個首項係數為 1 的三次有理係數多項式,

即 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 其中 a, b, c 是有理數, 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 成一等比數列 (公比 $r \neq 1$),

接下來討論問題二。

問題二: 多項式函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 其中 a, b, c 均為有理數。求出有理數 a, b, c 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 依序形成等比數列。

解法一: 解三元一次方程組

$$\begin{cases} (4-r)a \ + \ (2-r)b \ + (1-r)c = r-8 \\ (9-4r)a \ + (3-2r)b + (1-r)c = 8r-27 \\ (16-9r)a + (4-3r)b + (1-r)c = 27r-64 \end{cases}, \tag{$*$}$$

透過消去法, $(*)$ 化簡成

$$\begin{cases} (4-r)a \ + (2-r)b + (1-r)c & = r-8 & (1) \\ (5-3r)a + (1-r)b + & = 7r-19 & (2) \\ (1-r)a \ + & = 6r-9 & (3) \end{cases}$$

由 (3) 得 $a=\dfrac{6r-9}{1-r}=-6-\dfrac{3}{1-r}$,

由 (2) 得 $b=\dfrac{3r-5}{1-r}a-\dfrac{19-7r}{1-r}=\Big(-3-\dfrac{2}{1-r}\Big)\Big(-6-\dfrac{3}{1-r}\Big)-7-\dfrac{12}{1-r}=11+\dfrac{9}{1-r}+\dfrac{6}{(1-r)^2}$,

由 (1) 得

$$\begin{aligned} c &= -\frac{4-r}{1-r}a-\frac{2-r}{1-r}b+\frac{r-8}{1-r} \\ &= \Big(-1-\frac{3}{1-r}\Big)\Big(-6-\frac{3}{1-r}\Big)+\Big(-1-\frac{1}{1-r}\Big)\Big(11+\frac{9}{1-r}+\frac{6}{(1-r)^2}\Big)-1-\frac{7}{1-r} \\ &= -6-\frac{6}{1-r}-\frac{6}{(1-r)^2}-\frac{6}{(1-r)^3}. \end{aligned}$$

解法二: 設公比爲 r $(r\neq 1)$, $f(x)$ 滿足 $f(x+1)=rf(x)$, 當 $x=1,2,3$,

即 $f(x+1)-rf(x)=0$ 有 3 根 $x=1,2,3$,

$$\begin{aligned} f(x+1)-rf(x) &= (x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)+c-rx^3-rax^2-rbx-rc \\ &= (1-r)x^3+(a+3-ra)x^2+(2a+b+3-rb)x+(a+b+c+1-rc) \end{aligned}$$

$\therefore f(x+1)-rf(x)=(1-r)(x-1)(x-2)(x-3)$,

即 $(1-r)x^3+(a+3-ra)x^2+(2a+b+3-rb)x+(a+b+c+1-rc)=(1-r)(x^3-6x^2+11x-6)$

$$\begin{aligned} \therefore \qquad \frac{(1-r)a+3}{1-r} &= -6 \Rightarrow a=-6-\frac{3}{1-r}, \\ \frac{(1-r)b+2a+3}{1-r} &= 11 \Rightarrow b=11-\frac{2a+3}{1-r}, \\ \frac{(1-r)c+a+b+1}{1-r} &= -6 \Rightarrow c=-6-\frac{a+b+1}{1-r}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ a &= -6-\frac{3}{1-r},\\
b &= 11-\frac{1}{1-r}\Big[2\Big(-6-\frac{3}{1-r}\Big)+3\Big]=11+\frac{9}{1-r}+\frac{6}{(1-r)^2},\\
c &= -6-\frac{1}{1-r}\Big[\Big(-6-\frac{3}{1-r}\Big)+\Big(11+\frac{9}{1-r}+\frac{6}{(1-r)^2}+1\Big)\Big]\\
&= -6-\frac{6}{1-r}-\frac{6}{(1-r)^2}-\frac{6}{(1-r)^3},
\end{aligned}
$$

接下來由上一段求得的有理數 a, b, c 與公比 r 的關係, 來看看兩個數字較簡單的例子。

例題一: 當 $r=2$, $a=-3$, $b=8$, $c=0$ 故 $f(x)=x^3-3x^2+8x$,

$f(1)=6$, $f(2)=12$, $f(3)=24$, $f(4)=48$,

故 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 是公比爲 2 等比數列

請注意這個例子 a, b, c 是整數, 公比 $r=2$ 也是整數, 不難推論這是唯一的整數係數三次多項函數。

例題二: 當 $r=-1$, $a=-\frac{15}{2}$, $b=17$, $c=-\frac{45}{4}$, $f(x)=x^3-\frac{15}{2}x^2+17x-\frac{45}{4}$,
$f(1)=-\frac{3}{4}$, $f(2)=\frac{3}{4}$, $f(3)=-\frac{3}{4}$, $f(4)=\frac{3}{4}$,
故 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 是公比爲 -1 等比數列。

結論: 根據以上的討論可做出以下結論:

一、恰有一個首項係數爲 1 的整係數三次多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 成等比數列。

二、對每一個不等於 1 的有理數 r, 存在一個首項係數爲 1 的有理數三次多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 成等比數列。

三、對每一個不等於 1 的實數 r, 存在一個首項係數爲 1 的實數三次多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 成等比數列。

四、對每一個不等於 1 的實數 (有理數) r, 存在一個首項係數爲 1 的實數 (有理數) n 次多項式

$$f(x)=\frac{n!}{(r-1)^n}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(x-j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(i-j)},$$

使得 $f(1), f(2), \ldots, f(n+1)$ 成等比數列。

其中結論四可由拉格朗日 (Lagrange) 插值公式求得, 不再贅述。

參考文獻

1. 110 年大學學科能力測驗數學考科試題卷。台北市。大學入學考試中心, 2021。

—本文作者爲中山女高退休教師—