數學傳播 45卷3期, pp. 33-54

歷史轉折點的函數

林琦焜

Contents

1. 見微知著、睹始知終

『*Generations come and generations go, but the earth remains forever.*』

『一代過去、一代又來·地卻永遠長存。』

— 《聖經—傳道書》 —

『*Theorems come and theorems go, but the example remains forever.*』

『定理來了、定理走了·例子卻永遠長存。』

— I. M. Gelfand (1913-2009) —

數學中專門研究函數的領域叫做《分析》(Analysis), 數學分析有時候也稱爲無窮小分析 (infinitesimal analysis), 因爲無窮小這個概念是研究函數的重要工具。沒有函數就不會有微積分, 沒有微積分就不可能有牛頓力學與近代科學文明。伽利略認爲大自然這本書是用數學的語言所寫的, 美國物理學家費曼 (Richard Feynman; 1918∼1988) 則更進一步說: 《微積分是上帝的語言。》我們的宇宙是高度數學化, 祂遵循的自然律最終總是可以用微積分的語言和微分方程的形式表達出來。我相信這就是衆先賢們將生命奉獻於科學研究的背後之宗教情操。

有鑑於函數在數學中特別是分析的無上地位, 我爲此寫了《用函數來思考(上、下)》[14] 一文。正如俄羅斯數學家蓋爾芳德(Gelfand) 改寫聖經的引言:『定理來了、定理走了·例子卻永遠長存。』Hörmander 就曾經說過「解特定的例子比討論一般的理論要難上許多!」這些了不起的數學家當他們在思考數學的時候, 在腦海裡是有例子幫他們想像的。真正有意思核心的數學主要是解決例子, 具體且有一定深度的例子 (example)。好的例子也是定理的一部分, 甚至在一切混沌未明時提供我們解決問題的方法。一旦找到正確的例子, 由例子裡告訴你問題出在哪裡、結構如何、當然, 一旦掌握了結構, 那麼一般性的理論自然就出現, 其他的推廣就順理成章。[1]

數學史上有很多函數的精采思想和故事, 但它們都躺在教科書的例題或習題裡面。這些具體的函數在不同的數學領域自然出現, 對於我們理解相關的數學理論有不可抹滅的貢獻。我確信造出這些函數的先賢們並不是要展現他們的能力或讓我們敬畏, 而是要揭開數學真理的面紗, 告訴人們不應該被自己直觀想像所限, 尤其經過極限 (limit) 這個動作原先覺得不可能的都變得可能。這些函數對於人們擴展想像力超過了原創者的初衷。它們與定理本身有相同的價值與地位, 應該也是教學與研究重要的一環。在這篇文章我按照個人的偏好挑選了幾個在分析 (analysis) 上扮演著舉足輕重角色的函數。這幾個函數都是我上課或與人分享數學時最常舉的例子, 這些函數對於掌握分析的《連續性》(continuity)、《可微性》(differentiability) 與《可積性》(integrability) 有極大的幫助。日積月累對它們有比較深的感受, 因此才敢野人獻曝。我最喜歡的

[1]與例子 (example) 相關的字彙有 exemplify (翻爲舉例) 與 exemplification 可以翻譯爲範例、體現、化身。總之, 其目的就是將抽象的概念化爲具體的例子讓大衆可以理解。

猶太神學家兼哲學家馬丁布伯 (Martin Bubber)[2] 說：『我只是來到窗前將所看到的景象告訴人們。』一個理想的數學教師也應該有這樣的涵養, 除了看到美景之外更能真實地將窗外的景緻忠實地告訴讀者 (學生)。

2. Euler sinc(x) 函數

我們介紹的第一個函數是

$$y = \operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \\ \quad 1, & x = 0\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

這個函數沒有特別名字, 但由於歐拉 (L. Euler; 1707∼1783) 對於這個函數的創意研究導致了在數學幾個領域的開創性發展, 所以我把它稱之爲 Euler sinc(x) 函數。看到 $\sin x$ 或 $\cos x$ 直接的聯想就是一個波 (wave), 而係數 $\frac{1}{x}$ 就是振幅 (amplitude)。所以 $\frac{1}{x}\sin x$ 的圖形是以 $\pm\frac{1}{x}$ 爲包絡線 (envelope) 上下震盪的正弦波。由圖形可觀察到

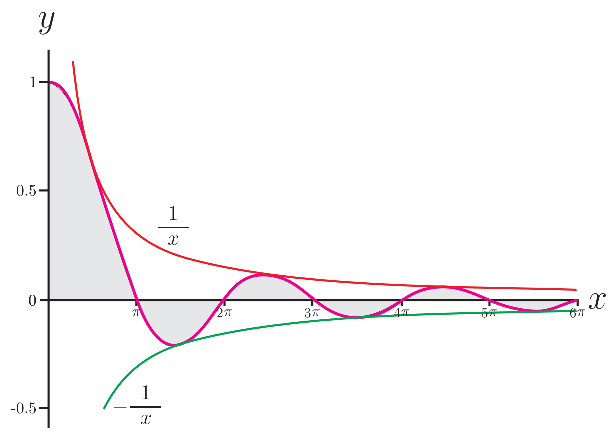

圖 1: $y = \operatorname{sinc}(x)$ 之圖形。

定理 2.1: 函數 $\operatorname{sinc} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 具有底下性質:

(a) $\operatorname{sinc}(x)$ 是一個連續函數。

(b) $\operatorname{sinc}(x)$是偶函數(even function): $\operatorname{sinc}(-x) = \operatorname{sinc}(x)$, $x \in \mathbb{R}$。

(c) $\operatorname{sinc}(x)$的單根(simple roots): $x = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

(d) $|\operatorname{sinc}(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$。

[2] 馬丁布伯 (Martin Bubber, 1878∼1965) 是奧地利著名的猶太思想家, 與祈克果、尼采並列爲存在主義思潮的鼻祖。他的名著《我與你》是我最喜歡的一本小書, 對於思想的提昇以及做學問的態度與方法都有醍醐灌頂之功。第一次讀完這本書感覺猶如真理的追尋者初次被光照, 所有的困惑似乎有了答案。

2.1. 一個重要的極限

相信大部分的學生是在微積分的極限第一次遇見 (2.1) 這個函數

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,. \tag{2.2}$$

這個極限的應用非常廣泛而證明也有不同的方法, 但我個人最喜歡的是幾何的想法。三角函數也稱為圓函數 (circular function), 所以最自然就是從單位圓出發: 由單位圓之扇形 AOK 畫兩條與 x–軸垂直的線段 $\overline{AL},\overline{HK}$, 則由圖形比較三個區域之面積或邊長顯然有

三角形 HOK 的面積 $\leq$ 扇形 AOK 的面積 $\leq$ 三角形 AOL 的面積,

線段 $\overline{HK}$ 的長度 $\leq$ 圓弧 $\overset{\frown}{AK}$ 的長度 $\leq$ 線段 $\overline{AL}$ 的長度。

因為是單位圓我們有

$$|\overline{HK}|\leq|\overset{\frown}{AK}|\leq|\overline{AL}| \quad\Longleftrightarrow\quad \sin x\leq x\leq\tan x\,. \tag{2.3}$$

兩邊同時除以x並利用$\frac{1}{\cos x}\leq 1$得

$$\frac{\sin x}{x}\leq 1\leq\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\,. \tag{2.4}$$

再利用三明治夾擠定理可推論 (2.2) 。另外, 這個幾何證明也告訴我們當角度 x 很小的時候正弦函數 $\sin x$ 與正切函數 $\tan x$ 可以藉由角度 x 來逼近

$$\sin x\approx\tan x\approx x,\qquad 0<x\ll 1\,. \tag{2.5}$$

這件事實對於微分方程之研究非常關鍵, 特別是弦振盪 (波動) 方程式的推導扮演了決定性的角色, 使得雖然泰勒 (Brook Taylor; 1865∼1731) 已經得到聲波 (Acoustic Wave) 的基本理論但最終是達蘭貝爾 (Jean d'Alembert; 1717∼1783) 成為推導出弦振盪 (波動) 方程式的第一人。

2.2. 窮盡法與圓面積

sinc(x) 這個函數也出現在西元前四世紀古希臘偉大數學家 Eudoxus (355BC?∼408BC?) 所創, 後來被阿基米德發揚光大的《窮盡法》(Method of Exhaustion)。Eudoxus 的窮盡法基本上是一個程序用來計算由曲線圈定的面積, 它的概念是用一些更簡單的圖形 (面積是容易算的) 來盡可能地填滿原空間的面積。因此窮盡法實際上就是《積分學》的先驅。在平面上考慮以圓內接正 n 邊形 D_n 來逼近單位圓 $B(0,1)$, 則 D_n 的 n 個頂點為

$$z_k=\left(\cos\frac{2k\pi}{n},\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\qquad k=0,1,\ldots,n-1\,, \tag{2.6}$$

D_n 的面積是 n 個全等三角形面積的和

$$|D_n| = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = \pi\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi\text{sinc}\left(\frac{2\pi}{n}\right), \tag{2.7}$$

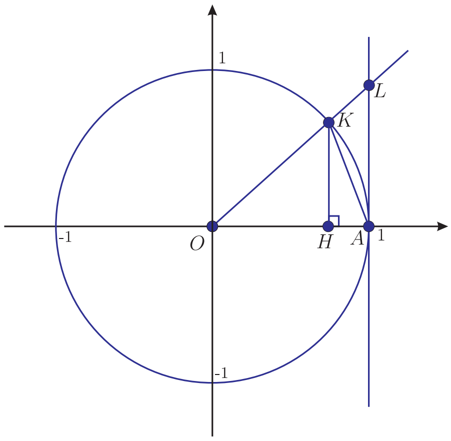

圖 2: sinc(x)之極限

這裡的絕對值表示面積或測度 (measure)。利用 (2.2) 得單位圓面積

$$|B(0,1)| = \lim_{n\to\infty} \pi\text{sinc}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pi\,. \tag{2.8}$$

所以 sinc(x) 的幾何意義是: 單位圓內接正多邊形D_n面積與單位圓面積之比例

$$\frac{|D_n|}{|B(0,1)|} = \text{sinc}\left(\frac{2\pi}{n}\right). \tag{2.9}$$

實際計算時正多邊形 D_n 是有要求的。阿基米德是從正六邊形內接及外切於一個半徑等於 1 的單位圓, 經由逐次加倍邊數, 他得到一對對 $12, 24, 48, 96$ 邊的內接與外切正多邊形, 並計算它們的周長而求得 π 的上界與下界。換句話說 : 阿基米德所遵循的正是窮盡法的原則造出一串遞增集合 (這個條件是必須的!)

$$D_6 \subset D_{12} \subset D_{24} \subset D_{48} \subset D_{96} \subset \cdots\cdots,$$

其極限 (上確界) 爲

$$B(0,1) = \lim_{n\to\infty} D_{6n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{6n}\,,$$

再由窮盡法推論得單位圓面積

$$|B(0,1)| = \lim_{n\to\infty} |D_{6n}| = \lim_{n\to\infty} \pi\text{sinc}\left(\frac{2\pi}{6n}\right) = \pi\,.$$

2.3. Vieta 公式

重複地利用半角公式可以將函數 sinc(x) 表示爲無窮乘積 (infinite product)

$$\begin{aligned}\text{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}&=\cos\frac{x}{2}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}\text{sinc}\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\text{sinc}\frac{x}{4}\\&=\frac{\sin x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\text{sinc}\frac{x}{2^n}\,,\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 並利用 (2.2) 這個極限可以將上式繼續往下推得無窮乘積

$$\text{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}\,. \tag{2.10}$$

在數學上我們用圓周率的希臘大寫字母 $\prod$ 來表示, 主要原因是 *pi* 與 *product* 都是以 p 爲字首。取 $x=\frac{\pi}{2}$ 就是大名鼎鼎的 Vieta 公式

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}&=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots\cdots\\&=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots\,.\end{aligned} \tag{2.11}$$

所有三角恆等式都是有幾何意義的, 關於 (2.10) 或 (2.11) 的幾何意義有興趣的讀者可以參考 [10, Chapter 11]。(2.11) 這個關於圓周率 π 漂亮的無窮乘積公式是法國數學家 Francois Vieta (1540～1603) 在 1593 年就已經發現, 他是考慮單位圓內接正 2^n 邊形之面積的極限而得。這是歷史上第一次出現無窮步驟的數學公式同時也宣告現代分析的誕生, 這也是 Vieta 的貢獻讓三角學擺脫角度的束縛而呈現出現代分析(analysis) 的特質。

2.4. 無窮級數與無窮乘積

函數 sinc(x) 同時擁有無窮級數與無窮乘積兩個身分

$$\text{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\cdots\,, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\text{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}&=\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\cdots\\&=1-\left(\frac{1}{1^2\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\cdots+\frac{1}{n^2\pi^2}+\cdots\right)x^2+\cdots\cdots\,.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Euler 就是透過這雙重身分加上根與係數的關係 (比較 (2.12) , (2.13) 兩式 x^2的係數) 推得

著名的恆等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\,. \tag{2.14}$$

關於 (2.14) 這個級數我在 [13] 有詳細的論述。Euler (2.13) 這個無窮乘積遠比 Vieta (2.10) 的無窮乘積來得重要, 它除了告訴我們正弦函數可以像多項式一樣因式分解之外, 更爲後來複變函數論的 Weierstrass 分解理論做了鋪路的工作。另外, 由無窮級數 (2.12) 與無窮乘積 (2.13) 也提供了 (2.2) 不同的證明方法。

2.5. Fourier 分析

給定 $2L$-週期函數 f 可以表示爲 Fourier 級數

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),\qquad -L<x<L\,, \tag{2.15}$$

其中係數 a_n, b_n 是 $f(x)$ 在 $\cos\frac{n\pi x}{L}$ 與 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 之投影

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(y)\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi y}{L}\\ \sin\frac{n\pi y}{L}\end{pmatrix}dy\,, \tag{2.16}$$

或者利用積化和差將 (2.15) – (2.16) 兩式合併爲

$$f(x)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(y)dy+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(y)\cos\frac{n\pi(x-y)}{L}dy\,. \tag{2.17}$$

這裡的等號『=』是需要嚴格定義, 但我們可以先假設 f 是足夠好的函數。學數學最忌諱一開始就一般化, 被綁架在技術層面, 那將是災難的源頭。令 $L\to\infty$ 並利用黎曼和 (Riemann sum) 可得 Fourier 積分公式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cos\xi(x-y)dy\,. \tag{2.18}$$

由 (2.17) 與 (2.18) 我們看到摺(卷) 積 (convolution) 自然出現並在 Fourier 分析的極限問題扮演核心的角色。嚴格的證明需要變換積分順序將 (2.18) 改寫爲

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cos\xi(x-y)dy\\ &=\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right).\end{aligned} \tag{2.19}$$

事實上 Dirichlet 是將 (2.19) 表示爲

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\frac{1}{2}\Big[f(x+0)+f(x-0)\Big]=f(x),\qquad \forall a>0\,. \tag{2.20}$$

在推導 Fourier 積分公式時, $\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}$ 自然出現並扮演 Dirac δ-序列或逼近單位元素 (approximate identity) 的重要地位

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin\lambda x}{x}=\delta(x)\,. \tag{2.21}$$

另外, 由 (2.21) 取 Fourier 逆變換可推得 $\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}$ 是特徵函數 $\chi_{(-a,a)}$ 的 Fourier 變換

$$\mathcal{F}[\chi_{(-a,a)}](\xi)=\widehat{\chi_{(-a,a)}}(\xi)=\int_{-a}^{a}e^{-ix\xi}dx=2\frac{\sin a\xi}{\xi},\qquad \xi\neq 0,\qquad a>0\,. \tag{2.22}$$

2.6. Dirichlet 積分

數學裡面有不同類型的 Dirichlet 積分, 但在此我們關心的是

$$\int_0^\infty \mathrm{sinc}(x)dx=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\,. \tag{2.23}$$

事實上歐拉 (L. Euler; 1707∼1783) 是研究這個積分的第一人, 但後來 Dirichlet (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet; 1805∼1859) 因爲研究 Fourier 級數的收斂性問題需要這個積分而獲此殊榮。(2.23) 這個積分的直觀看法如下: 首先將問題項 (singular term) $\frac{1}{x}$ 重新用積分表示

$$1!=1=\int_0^\infty e^{-t}dt\quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{x}=\int_0^\infty e^{-xt}dt\,. \tag{2.24}$$

然後利用 Fubini 定理變換積分順序並藉由分部積分兩次得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx&=\int_0^\infty\sin x\int_0^\infty e^{-xt}dtdx\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xt}\sin x dxdt\\&=\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}\,.\end{aligned} \tag{2.25}$$

如果有人以爲得到 Dirichlet 積分的精確值就夠了, 那麼他 (她) 還是不瞭解這個積分。真正的理解, 除了會解題之外還有感受與領悟, 而領悟 (comprehension) 就英文而言是有能力、行動力的意思。從 (2.25) 我們領悟到 Dirichlet 積分是二維的產物, 意思是只憑一維的積分是不可能得此結果。或許有讀者會說可以利用複變的積分 (留數定理) 來算。沒錯, 但複變的積分就

是線積分正是二維的! 爲什麼? 以柯西定理 (Cauchy Theorem) 而言本質上就是 Green 定理, 我們是藉由 Green 定理將線積分轉換爲面積分 (重積分), 所以複變的積分是二維的。另外 (2.25) 也告訴我們這個計算方法本質上是 Laplace 變換 (Laplace transform)。令

$$I(t)=\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx\,,\qquad t>0\,,\tag{2.26}$$

微分得

$$\frac{dI}{dt}=-\frac{1}{1+t^2}\quad\Longrightarrow\quad I(t)=-\tan^{-1}t+C\,,$$

其中常數 C 是如此決定:

$$\lim_{t\to\infty}I(t)=0\,.\quad\Longrightarrow\quad C=\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\frac{\pi}{2}\,.$$

因此

$$I(t)=\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin x}{x}dx=-\tan^{-1}t+\frac{\pi}{2}\,,\qquad t>0\,.\tag{2.26$'$}$$

令$t\to 0$ (這裡需要積分的極限理論),

$$I(0)=\lim_{t\to 0}I(t)=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=-\tan^{-1}0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\,.$$

所以除了重積分之外, 微分方程也是計算積分的重要方法。順便一提, 就算是微分方程本質上也是二維的。爲什麼? 由 (2.26) 此時 $I(t)$ 已經擺脫一維 t-軸的束縛, 而是平面上的一條曲線 (雖然是一維但卻是存在於二維, 也就是在二維空間才看得到!)。

Dirichlet 積分收斂的幾何直觀如下: 由 sinc(x)的圖形, 因爲$\sin x$在$+1$與-1之間震盪所以可以將積分視爲交錯級數 (參考圖一)

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx\approx\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n}<\infty\,,$$

同理

$$\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\approx\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}=\infty\,.$$

(參考圖一, 此時在x-軸下方的斜線區域變成在 x-軸上方!全部斜線 (陰影) 區域的面積差不多等於調和級數。) 嚴格的證明是將積分區域 $[0,\infty)$ 按照 $\sin x$ 的週期性拆解爲無窮多個區間, 這相當於將積分轉換爲級數, 而後將 $\frac{1}{x}$ 以在區間的極小值 (大約是 $\frac{1}{n}$!) 取代, 如此就得到調和級數, 因爲調和級數發散所以就證明了 Dirichlet 積分不是絕對可積, 換句話說不是 Lebesgue 可積。這個結果在不同的 (考試) 場合常常出現, 足見這個積分的根本重要性。Dirichlet 積分

可以走得更遠, 利用分部積分可得 $|\text{sinc}(x)|^2$ 的積分

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|^2 dx &= -\int_0^\infty \sin^2 x dx^{-1} = -\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{x} d\sin^2 x \\ &= \int_0^\infty \frac{2\sin x\cos x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{2x}d2x = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}dy = \frac{\pi}{2}. \qquad (2.27)\end{aligned}$$

定理 2.2: 函數 $\text{sinc}(x)$ 具有底下性質 :

(a) $\text{sinc}(x)$ 是 Riemann 可積。

(b) $\text{sinc}(x)$不是 Lebesgue 可積。

(c) $\text{sinc}(x)$ 是 Lebesgue 平方可積。

通常學生開始接觸實變函數論 (Real Analysis) 時, 對於 (a)–(b) 這個結果是相當困惑的。因爲課本還有老師都說:

Riemann 可積必定是 Lebesgue 可積!

但這是在有界區間 (區域) 的前提下才成立的。根本的原因是我們在定義積分的時候是在有界區間 (區域)。而像 $[0,\infty)$ 這種無界區域即所謂的瑕積分 (improper integral), 我們必須藉由極限 (limit) 來定義。因爲多了一道《極限》這個動作使得原先的理論不見得成立。另外這個例子也提供了當 Ω 不是有界區域時 $L^p(\Omega)$ 與 $L^q(\Omega)$ 之間並沒有包含關係[3]

$$\text{sinc}(x) \in L^2[0,\infty); \qquad \text{sinc}(x) \notin L^1[0,\infty); \qquad L^2[0,\infty) \not\subset L^1[0,\infty).$$

底下是一個特別的積分可以視爲 Dirichlet 積分 (2.23) 的推廣, 我主要的目的是藉由這個例子告訴讀者如何利用量綱分析 (dimensional analysis) 來判斷瑕積分的收斂範圍, 這是原創的想法我確信在所有的書都找不到。

例題 2.3: 給定 $0 < a < 2$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}dx = \frac{\pi}{2\Gamma(a)}\csc\left(\frac{\pi a}{2}\right) = \frac{\pi}{2\Gamma(a)}\frac{1}{\sin\frac{\pi a}{2}}. \qquad (2.28)$$

解: 我們完全可以模仿 (2.24) 將 1! 推廣爲 $(n-1)!$

$$(n-1)! = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{(n-1)!}{x^n} = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-xt}dt, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

[3] L^p 表示 p 次 Lebesgue 可積函數的集合, 這個符號是匈牙利數學家泛函分析創始人之一 F. Riesz (1880∼1956) 所給的。

如果是任意的 (但有限制) $a \in \mathbb{R}$ 則將階乘換爲 Γ-函數, $(n-1)! \to \Gamma(a)$, 因此 $\frac{1}{x^a}$ 可以表示爲

$$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-xt} dt\,, \tag{2.29}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a} dx &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \sin x \left(\int_0^\infty t^{a-1} e^{-xt} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{a-1} e^{-xt} \sin x dt dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} \int_0^\infty e^{-xt} \sin x dx dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t^2} dt = \frac{1}{2\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u} du\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

最後這個出名的積分稱爲歐拉反射公式或餘元公式是 Beta 函數的特例, 可以利用複變函數的留數定理計算而得

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u} du = B\left(\frac{a}{2}, 1-\frac{a}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{a}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi a}{2}}\,. \tag{2.31}$$

將 (2.30) – (2.31) 合併就是 (2.28)。 $\square$

註解:

(1) 關於這個瑕積分 (improper integral) 的收斂範圍 $0 < a < 2$ 並不容易看, 但可以透過量綱分析來討論。所謂瑕積分基本上不是《太胖 $(x \to \infty)$》就是《太高 $(f(x) \to \infty)$》, 因此必須分開兩個區域;

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^a} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a} dx = I_1 + I_2\,.$$

習慣上我們以中括號 $[x]$ 代表 x 的量綱 (dimension), 這是馬克士威 (J. C. Maxwell; 1831∼1879) 引進的。首先考慮《太高》的情形, $[x] \to 0$: 因爲 $\frac{\sin x}{x} \approx 1$, I_1 之量綱爲

$$I_1 \triangleq \int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}} \frac{\sin x}{x} dx \approx [x]^{2-a} \qquad ([x] \to 0) \quad \Longrightarrow \quad 2-a > 0\,.$$

或者也可以這麼看, 當 x 很小的時候 $\sin x$ 並不是無量綱 (dimensionless) 而是 $\sin x \approx x$, $0 < x \ll 1$

$$I_1 \approx \frac{[x]}{[x]^a}[x] = [x]^{2-a} \qquad ([x] \to 0) \quad \Longrightarrow \quad 2-a > 0\,.$$

其次考慮 《太胖》的情形, $[x] \to \infty$: 此時 $\sin x$ 也不是無量綱, 類比無窮級數我們是把它視爲交錯級數的 $(-1)^n$, 一正一負彼此抵消。實際上應該將 $\sin x dx$ 視爲無量綱 $[\sin x dx] = 1$

$$I_2 \triangleq \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a} dx \approx [x]^{-a} \qquad ([x] \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad -a < 0 \quad \text{或} \quad a > 0\,,$$

將 I_1, I_2 的範圍合併得 $0 < a < 2$。

(2) 由 (2.31) 也可以看的出來 a 的範圍, 但是要先討論 Γ-函數

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx\,, \qquad a > 0\,. \tag{2.32}$$

因爲被積分函數 (integrand) 中有 e^{-x}, 這項會把所有在無窮處的困難統統克服。我們只需考慮 $[x] \to 0$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \approx [x]^{a-1}[x] = [x]^a \quad ([x] \to 0) \quad \Longrightarrow \quad a > 0\,,$$

由於 (2.31) 出現 $\Gamma(\frac{a}{2})$、$\Gamma(1-\frac{a}{2})$ 這兩項, 所以

$$\frac{a}{2} > 0, \quad 1 - \frac{a}{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 < a < 2\,.$$

由於圓周率的緣故 $\mathrm{sinc}(x)$ 也出現在布豐投針問題 (Buffon Needle Problem) 這一個古典的幾何機率問題, 但限於篇幅就留待以後再討論。

3. Dirichlet 函數

德國數學家 Dirichlet (1805~1859) 追隨 Fourier 研究 Fourier 級數的收斂性問題時於 1837 年提出著名的 Dirichlet 函數

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,, \\ 0, & x \in [0,1] - \mathbb{Q}\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dirichlet 函數可以透過極限只用一個式子來表示 : 令 $m, n \in \mathbb{Z}$, 則

$$D(x) = \lim_{m\to\infty} \Big[\lim_{n\to\infty} \cos^{2n}(m!\pi x) \Big], \qquad x \in [0,1]\,. \tag{3.2}$$

這是 Apostol [1] (Exercise 4.12, p.97) 裡面的一個題目。這個題目並不難, 只需要掌握無理數無法表示爲有限循環小數, 而這正是數學分析 (高等微積分) 教育要培養學生的能力之一。一個處處不連續的函數可以藉由連續函數加上極限 (limit) 這個動作來刻畫, 因而創造出與經驗直觀相悖的函數, 這也正是數學分析迷人之處。

Dirichlet 函數 (3.1) 無法由圖形表示, 它是第一個沒有解析式的函數, 因此它的提出對於數學上《函數是甚麼?》是一重大挑戰。特別是回應傅立葉(J. Fourier; 1768–1830) 對於 Fourier 級數的看法: 傅立葉大膽地斷言: *任意的函數都可以展成三角級數, 就是現在所謂的 Fourier 級數* (2.15) – (2.16) , 並且列舉大量函數和運用圖形來說明函數的三角級數展開的普遍性。但是事實上傅立葉錯誤地誇大了他的例子, 因爲並不是所有的函數都可以表示爲 Fourier 級數 (2.15) 並按照 (2.16) 的要求積分。

回顧一下; 柯西 (A. Cauchy; 1789∼1857) 是對在有界區間 $[a,b]$ 的連續函數定義他的積分。如果函數在 $[a,b]$ 有無窮多個不連續點, 則他的積分定義就不成立。所以 Dirichlet 函數也顯示 Cauchy 對於積分之定義不足之處, 應該重新定義積分。而接受這個挑戰的正是 Dirichlet 不世出的學生 B. Riemann (1826∼1866), Riemann 跟隨 Dirichlet 研究 Fourier 級數的收斂性問題於 1854 年發表的就職論文《*論函數之以三角函數表示的可能性*》, 在這篇無比光輝成就的論文中 Riemann 將可積性 (integrability) 同連續性 (continuity) 分離, 這是相當大膽且極具創見的思想[4]。

3.1. Riemann 積分

考慮有界區間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 則 Riemann 定義積分爲

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})\,, \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,. \tag{3.3}$$

極限存在的關鍵在於先觀察每一區間的上界與下界的變差 (variation)

$$V_i = \mathrm{Osc}_f(x_i) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,,$$

所以積分的存在性就等價於全部的變差

$$\sum_{i=1}^{\infty} V_i(x_i - x_{i-1})\,,$$

是否足夠小以至於可以忽略。判斷一個函數是否 Riemann 可積最好的方法是 Lebesgue 準則 (Lebesgue criterion)。

定理 3.1: (Lebesgue **準則**; 1901). 給定任意有界區間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 而 $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ 是有界函數則 f 是 Riemann 可積的充分必要條件是 f 在 $[a,b]$ 的不連續點之集合的測度等於 0。

回到 Dirichlet 函數, 對於 $x\in[0,1]$ 分別取有理數與無有理數來逼近, 容易證明 $D(x)$ 在每一點都不連續 (處處不連續) 其測度大於 0, 因此根據 Riemann 積分的 Lebesgue 準則

[4] Riemann 同年發表另一篇更爲輝煌的就職演說論文《*論幾何基礎之假設*》(Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen) 創建出全新的幾何體系, 讓縱橫二千年的歐氏幾何從絕對真理變成特例; 更在他死後 50 年成爲愛因斯坦革命性的廣義相對論之數學基礎並且成爲我們認識大自然的科學觀的一部分。

(Lebesgue Criterion): Dirichlet 函數 $D(x)$ 不是 Riemann 可積。Dirichlet 函數也精準地說明 Riemann 積分的本質, 按照 Riemann 的定義：一個函數是可積分則在任意區間 (即 partition) 其上界與下界的差額是不能太大, 也就是不能震盪得太厲害。而 Dirichlet 函數則到處都是在 0 與 1 之間震盪, 這就造成它不是 Riemann 可積的根本原因。總而言之, 要研究一個函數是否 Riemann 可積, 最重要是探討它的震盪 (oscillation) 行爲。

3.2. Lebesgue 積分

Dirichlet 函數 $D(x)$ 幾乎處處等於 0, 所以是 Lebesgue 可積。零測度集合 (zero measure set) 的引進是法國數學家 H. Lebesgue (1875～1941) 之創舉。

定理 3.2: Dirichlet 函數 $D : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ 具有底下性質:

(a) D 在 $[0,1]$ 的每一點都不連續。

(b) D 在 $[0,1]$ 是 Lebesgue 可積, 但不是 Riemann 可積。

3.3. 托梅 (Thomae) 函數

『在單獨的點連續或者不連續的可積函數是五花八門, 但是最重要的是識別那些通常是無限不連續的可積函數。』

— J. K. Thomae (1840–1921) —

另一個與 Dirichlet 函數非常接近的函數是托梅 (Thomae) 函數

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}, \qquad \gcd(p,q) = 1 \\ 0, & x \in [0,1] - \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{3.4}$$

這是 K. J. Thomae 於1875年根據 Dirichlet 函數調整而得。這個函數的圖形非常有趣, 如果拿一個直尺描一下你會發現這些點是落在同一條直線上, 也因此它另外的名字叫做*直尺函數*(ruler function)。更有趣的是從其圖形來看 (參考圖三) 就像爆米花機裡面的爆米花跳動, 所以也稱爲爆米花函數 (popcorn function)。與 Dirichlet 函數最大的差別是這個函數在有理數點不連續但在無理數點卻是連續的。

定理 3.3: 托梅函數 $T : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ 具有底下性質:

(a) T 在有理數點不連續但在無理數點卻是連續的。

(b) T 在無理數點不可微。

(c) T 是 Riemann 可積且 $\displaystyle\int_0^1 T(x)dx = 0$.

(d) T 是一個週期函數。

證明:

(a) 證明是容易的。

(b) 若 $a \in [0,1] - \mathbb{Q}$, 先選取有理數 $a_n \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 來逼近, 但 a_n 的選取有點技巧。對任意 $n \in \mathbb{N}$ 可以取 $j_n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$|a_n - a| = \left|\frac{j_n}{n} - a\right| \le \frac{1}{n}, \qquad a_n = \frac{j_n}{n} \to a\,.$$

根據 T 的定義

$$T(a_n) = T\left(\frac{j_n}{n}\right) \ge \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|T(a_n) - T(a)|}{|j_n/n - a|} = \frac{T(j_n/n)}{|j_n/n - a|} \ge 1\,.$$

另一方面若取無理數逼近 $a_n \in [0,1] - \mathbb{Q}, a_n \to a$ 則

$$\frac{T(a_n) - T(a)}{a_n - a} = \frac{0}{a_n - a} = 0\,.$$

顯然 T 不可微。

(c) 可以假設 $[0,1]$ 裡面的有理數爲

$$\mathbb{Q}_1 = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\} \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}\,.$$

雖然可數點集合的長度 (測度) 等於 0 是常識, 但我還是要鼓勵學生把這個證明方法當成生命的一部分隨時都會證 (想法是等比級數!)。對任意 $\epsilon > 0$, 第 k 個點 $\{r_k\}$ 可以用開區間 $(r_k - \frac{\epsilon}{2^k}, r_k + \frac{\epsilon}{2^k})$ 來覆蓋, 則

$$|\mathbb{Q}_1| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(r_k - \frac{\epsilon}{2^k}, r_k + \frac{\epsilon}{2^k}\right)\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k}\epsilon = 2\epsilon\,,$$

$\mathbb{Q}_1$ 的測度等於 0, 所以根據 Riemann 積分的 Lebesgue 準則 (Lebesgue Criterion) : 托梅函數 T 是 Riemann 可積。如果不取等比級數的話, 會產生

$$\epsilon + \epsilon + \cdots = \infty \times \epsilon = \text{無窮大} \times \text{無窮小} = ?$$

雖然托梅函數不連續的程度是無限大(可數的無限大), 但是它仍然有充足的連續性使得 Riemann 可積性還是成立的。 $\square$

圖 3: 托梅函數之圖形

將 Dirichlet 函數與托梅函數適當地結合可以得到意想不到的結果。定義函數

$$H(x)=\begin{cases}1, & x=\frac{1}{q}, \qquad q\in\mathbb{Z}\,,\\ 0, & x\in[0,1]-\mathbb{Q}\,.\end{cases} \tag{3.5}$$

容易證明 H 是 Riemann 可積, 但 H 與托梅函數 T 之合成函數是 Dirichlet 函數 $D(x)=H(T(x))$ 卻不是 Riemann 可積。這個例子告訴我們兩個 Riemann 可積函數的合成函數不見得是 Riemann 可積。

4. Cantor-Scheeffer 函數

直接與 Cantor 集 (Cantor set) 相關聯的是 Cantor 函數或 Cantor 三元函數 (Cantor ternary function), 後來由於 Lebesgue 的工作極力介紹這個函數而廣受人知, 所以有時也稱爲 Cantor-Lebesgue 函數。然而這個函數真正的發現者是 Ludwig Scheeffer (1859∼1885) 於 1883 年透過書信追隨 G. Cantor (1845∼1918) 之研究工作所發現的, 從尊重歷史事實而言應該稱之爲 Cantor-Scheeffer 函數。

我們從 Cantor 集出發

$$C=\bigcap_{k=1}^{\infty}C_k\,, \tag{4.1}$$

其中 C_k 是由 2^k 個長度爲 $\frac{1}{3^k}$ 的閉區間所組成。然後考慮 C_k 在 $[0,1]$ 的補集

$$D_k=[0,1]-C_k=\{I_1^k,I_2^k,\ldots,I_{2^k-1}^k\}\,, \tag{4.2}$$

其中 D_k 包含 2^k-1 個區間 (interval)。現在定義函數 $f_k:[0,1]\mapsto[0,1]$

$$f_k(x)=\begin{cases}0, & x=0\,,\\ \frac{j}{2^k}, & x\in I_j^k, \quad j=1,2,\ldots,2^k-1\,,\\ 1, & x=1\,.\end{cases} \tag{4.3}$$

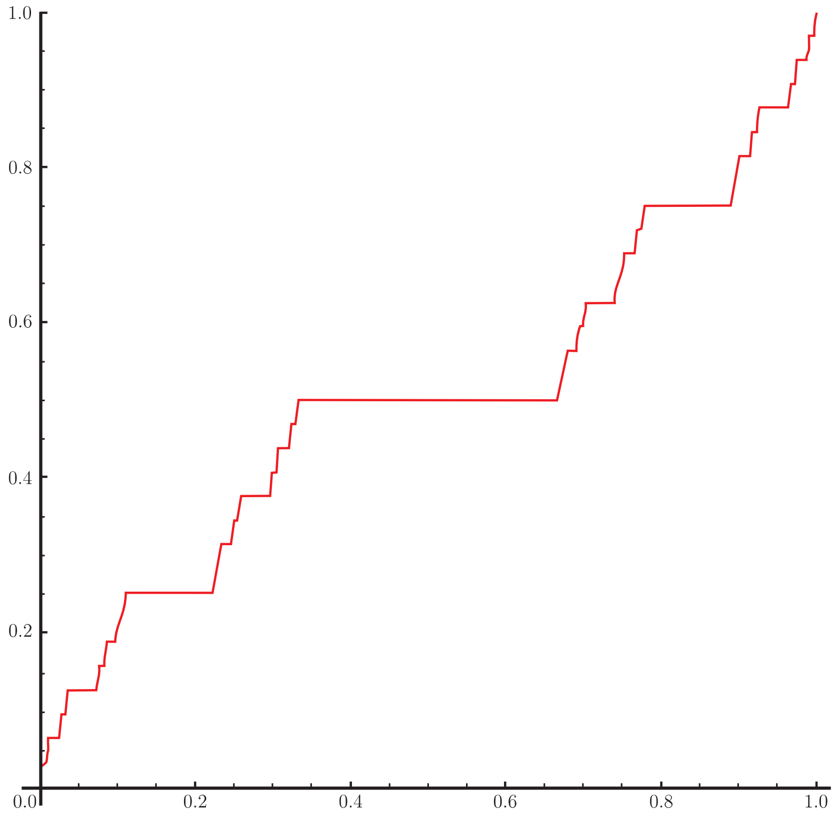

圖 4: Cantor 函數之圖形

當 x 落在 C_k 中任意 2^k 個區間的一個時 $f_k(x)$ 是以直線連接。按照定義容易看出 f_k 是一個單調遞增的連續函數。另外根據函數的造法 f_{k+1}, f_k 滿足

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= f_k(x), \qquad x \in I_j^k, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^k - 1\,, \\ |f_k(x) - f_{k+1}(x)| &< \frac{1}{2^k}, \qquad x \in [0,1]\,. \end{aligned}$$

利用 Weierstrass M-檢驗法得

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{k+1}(x) - f_k(x), \qquad \forall x \in [0,1]\,,$$

是一致收斂。由此就定義了 Cantor-Scheeffer 函數

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1} - f_k) = \lim_{k\to\infty} f_k\,. \tag{4.4}$$

我們看第一項

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x, & 0\le x\le\dfrac{1}{3}\,,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{2}{3}\,,\\[2mm] \dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}, & \dfrac{2}{3}\le x\le 1\,.\end{cases}\tag{4.5}$$

定理 4.1: Cantor-Scheeffer 函數具有底下性質:

(a) $f:[0,1]\mapsto[0,1]$ 是一滿足 $f(0)=0,\ f(1)=1$ 遞增的連續函數。

(b) $f([0,1])=[0,1]$、$f(C)=[0,1]$。

(c) 如果將 $x\in C$ 表示爲三進位

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots(3)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k},\qquad a_k\in\{0,2\}\,,$$

則 $f(x)$ 可以表示爲二進位

$$f(x)=0.b_1b_2b_3\cdots(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{2^k},\qquad b_k=\frac{1}{2}a_k\in\{0,1\}\,.\tag{4.6}$$

這裡 (3), (2) 分別表示三進位與二進位。

(d) $f'(x)$ 幾乎到處存在且若存在則 $=0$, 而且滿足不等式

$$0=\int_0^1 f'(x)dx\le f(1)-f(0)=1\,,$$

換言之: 微積分基本定理不成立, 等式必須更換爲不等式。

註解: 這幾個性質我們簡單且直觀地說明一下

(1) 一致收斂會保持連續性。

(2) 將 $f([0,1])$ 按 Cantor 集拆解爲兩部分

$$f([0,1])=f(C)\cup f\big([0,1]-C\big)\,.$$

因爲函數 f 在集合 $[0,1]-C$ 取值爲 $\frac{j}{2^k}$, $j=1,2,\ldots,2^k-1,\ldots$ 所以 $f\big([0,1]-C\big)$ 是可數的 (countable), 因此其測度等於 0 (我們用絕對值表示測度)

$$|f\big([0,1]-C\big)|=0\,.$$

另外

$$1 = |f([0,1])| = |f(C) \cup f\big([0,1]-C\big)| \le |f(C)| + |f\big([0,1]-C\big)| = |f(C)|\,,$$

$$f(C) \subset [0,1] \quad \Longrightarrow \quad |f(C)| \le 1\,.$$

由這兩式可以結論 $|f(C)| = 1$。我們的目的是證明 $f(C) = [0,1]$。如果

$$(0,1) - f(C) \neq \emptyset\,.$$

因爲 C 是一緊緻集 (compact), 而緊緻性是一個拓撲性質即經過連續不變, $f(C)$ 是緊緻的, 因此是一有界的閉集 (closed and bounded), 所以 $(0,1)-f(C)$ 是一個開集也就是說存在一個開區間 $(a,b) \subset (0,1)-f(C)$。現在考慮 $(a,b)\cup f(C)$, 因爲 $(a,b)\cap f(C) = \emptyset$

$$|(a,b) \cup f(C)| = |(a,b)| + |f(C)| = (b-a) + 1\,.$$

但另一方面$(a,b) \cup f(C) \subset [0,1]$

$$|(a,b) \cup f(C)| \le |[0,1]| = 1\,,$$

這是矛盾的, 所以就證明了 $f(C) = (0,1)$, 但 $f(0) = 0, f(1) = 1$ 因此 $f(C) = [0,1]$。

(3) 根據 (4.6), $f(x)$ 表示爲二進位, 因爲 $b_k \in \{0,1\}$ 這也說明 f 的取值是全部 $[0,1]$, 這也證明了 $f(C) = [0,1]$。

(4) 假設存在 $x \in [0,1]$ 使得 $f'(x) \neq 0$, 則根據可微性 (differentiability), 在這點 x 附近會有一段開區間 $(x-\delta, x+\delta)$ 可以將一段斜率等於 $f'(x)$ 的線段 (好像翹翹板) 放在這上面。但是根據 Cantor-Scheeffer 函數的造法, 我們可以再一次針對這一段三等份中間取值一半而另外兩段用直線連接, 這違背了 Cantor-Scheeffer 函數之定義。因此不可能存在微分不等於 0 的點。

(5) 有人利用 (2): $f(C) = [0,1]$ 而 f 是一遞增的連續函數, 也就是映成函數 (onto) 這個事實來證明 C 是不可數。由於 $[0,1]$ 是不可數所以 Cantor 集 C 也是不可數。但我認爲這是殺雞用牛刀, 通常是想不到 Cantor-Scheeffer 函數。我覺得最好還是用 Cantor 的對角線法而且證明方法與證明 $[0,1]$ 是不可數完全一樣, 只是十進位換爲三進位。

(6) Cantor-Scheeffer 函數由圖形來看有時也稱爲惡魔的樓梯 (Devil's Stair)。將 $y = f(x)$ 視爲一曲線 (經耐心計算) 其弧長等於 2。爲什麼? 直觀可以這麼看, 這個樓梯有兩部分: 水平與斜坡。水平的部分正是造 Cantor 集的時候挖掉的那部分 D, 所以長度爲

$$D = [0,1] - C \quad \Longrightarrow \quad |D| = 1 - |C| = 1\,,$$

而斜坡則是建立在 C_k 上, 當 $C_k \to C$ 時 Cantor 集的斜坡基本上是垂直的 (因此稱爲樓梯), 其長度正是對應到 y-軸上 $[0,1]$ 之長度

$$f(C)=[0,1] \quad \Longrightarrow \quad |f(C)|=1\,,$$

兩式合併就是 Cantor-Scheeffer 函數的弧長 2。但是根據弧長公式

$$\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx=1\neq 2\,.$$

所以弧長公式對 Cantor-Scheeffer 函數不成立。如果從 $(0,0)$ 出發走這個樓梯 (不是爬樓梯, 因爲 f 是連續函數。) 到 $(1,1)$ 所走的距離竟然與從 $(0,0)$ 出發走直線到 $(1,0)$ 然後向上也是走直線到 $(1,1)$ 是相同的, 難怪要叫它是惡魔的樓梯。

例題 4.3: 給定函數 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap C\,,\\ 0, & x\in[0,1]-C\,,\end{cases}$$

則 g 在 $[0,1]$ 是 Riemann 可積, 而且

$$\int_0^1 g(x)dx=0\,.$$

我們給個簡單的說明: 與托梅函數的證明一樣 g 在 Cantor 集 C 是不連續但在其外部 $[0,1]-C$ 是連續。由於 Cantor 集 C 的測度等於 0, 所以根據 Riemann 積分的 Lebesgue 準則: g 是 Riemann 可積。相比於托梅函數 g 不連續的程度更大, 是不可數的無限大 (雖然測度等於 0), 但仍然有足夠的連續性使其爲 Riemann 可積。 $\square$

最後要提的是微積分基本定理是數學分析最重要的定理之一, 但對 Cantor-Scheeffer 函數 而言並不成立。那是因爲 Cantor-Scheeffer 函數雖然是連續的但並不是絕對連續 (absolutely continuous)。所以 Cantor-Scheeffer 函數告訴我們研究絕對連續的根本重要性與緣由:

— 微積分基本定理 —

參考文獻

1. Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

這是三, 四十年前最流行的《高等微積分》教科書, 那一代的數學系學生都深深被此書所折磨。我曾經聽陳金次教授說: 他清華的同學大清早起來就像和尚誦經一樣拿起這本書來背, 聽起來像笑話卻是千真萬確的事實。這問題不在學生! 那時候的老師最喜歡出的題目不是《名詞解釋》便是《定理證明》(甚至是反函數定理或隱函數定理) 就算是其它題目也都是極其刁鑽 (沒有看過絕對不會), 也難怪學生會幹出這種蠢事。坦白而言, 早期這些老師對於數學的認知是有問題的, 而且也沒有看到他們對於數學有何貢獻, 所有的問題答不出來就叫你去背。M. Atiyah 就說過:『在數學裡你幾乎不需要死背, 不必刻意記憶事實, 你所需要的只是理解整個東西是如何裝配起來的。所以我認爲在這個意義下, 學數學實際上不需要科學家或醫學院學生那樣的記憶力。』雖然這本書已慢慢沒有那麼流行, 但內容豐富、書寫嚴謹, 我確信至今仍然是高等微積分 (數學分析) 最好的幾本書之一, 但學習的方法絕對不是用背的。

2. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*[5], Vol. 1 & 2, John Wiley & Sons, 1953, 1961。

看一本書一定要從《前言》(preface) 開始。R. Courant 在這套書的前言提到: 自17世紀以來物理的直覺一直是數學問題與方法的活水泉源。但近來 (指1924) 趨勢與時尚卻是反其道而行地削弱數學與物理之連結, 數學家拒絕數學直觀的根源, 反而專注在細緻化並強調數學的公設化與不時地輕忽自身與物理及其它科學的聯合。在很多情況下, 物理學家的態度已經不再賞識數學家, 這種裂痕無疑對科學整體而言是嚴重的威脅, 而科學主流的發展可能分裂成細小與更細的溪流以至於乾涸。因此有必要藉由釐清公共的特徵與彼此的互聯關係, 將我們的努力導向將這分岐的趨勢再結合。也只有如此學生才能掌握材料 (指本書) 並爲進一步有機的研究發展之準備立下基礎。

這套書的前身 (德文版) 於1924, 1938在德國柏林出版。後來 R. Courant(1888–1972) 因爲其猶太背景, 受納粹壓迫不得不離開德國前往美國的紐約大學 (NYU), 這一舉動宣告了哥廷根 (Göttingen) 的傳統將一去不返永遠離開德國, 但會在上帝揀選的國度—美國延續並發揚光大。Courant 就是在 K. O. Friedrich 與 J. J. Stoker 的合作下延續哥廷根的傳統並建立全世界最好的應用數學研究所, 現在稱爲庫朗研究所 (Courant Institute)。這套書是在 K. O. Friedrich 的幫忙下完成的, 真正作者是 R. Courant 但內容很多是 David Hilbert 的文章與上課的材料, Courant 將 David Hilbert 的名字也掛上去除了尊重原創之外最重要是希望 D. Hilbert 關於數學之研究與教育的精神能繼續在此顯現。

3. R. Courant and H. Robbin, *What is Mathematics* ? An Elementary Approach to Ideas and Methods, (1996) 2nd edition, with additional material by Ian Stewart, Oxford University Press, London。中譯本: 數學是什麼 (上, 下) 容士毅譯, 左岸文化出版 (2011)。
4. William Dunham, *The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*, Princeton University Press, Priceton, New Jersey, 2005. 中譯本: 微積分的歷程: 從牛頓到勒貝格, 李伯民, 汪軍, 張懷勇譯, 人民郵電出版社 (中國) (2010)。

這本書基本上按年代介紹了數學史上出現的重要函數及其相關數學家 (從牛頓到勒貝格)。這些函數在數學發展的每個關鍵時刻扮演著不可取代的角色, 也幫助讀者對於數學分析有更深刻的體會。William Dunham 的書都值得看, 例如, Journey Through Genius,

[5]所謂數學物理 (Mathematical Physics) 一般而言是指整個唯象的(phenomenology) 物理學領域, 它主要是以微分方程爲核心。19 世紀在德國是由 Franz Ernst Neumann (1798～1895) 等人所發展出來, 在英國則是以馬克士威 (J. Clerk Maxwell, 1831～1879) 爲高潮, 但是這兩個人都是受到傅立葉 (Fourier) 的影響。

the great theorems of mathematics, John Wiley & Sons, Inc., (1990), Penguin Books (1991). (中譯本: 天才之旅, 偉大數學定理之創立; 林傑斌譯; 牛頓出版股份有限公司 (1995)。)

5. Peter Duran, *Invitation to Classical Analysis, Pure and Applied Undergraduate Texts*, Vol. 17, American Mathematical Society, 2012.

   這本書與 [7] 一樣都強調 Classical Analysis, 所謂古典分析一般是涵蓋歐拉的 Γ 與 Beta 函數、Euler Maclaurin 公式、Stirling 公式、高斯的算術幾何平均 (AMG) 與橢圓函數等通常數學分析或高等微積分教不到的主題。這些都非常有趣且重要, 我通常是藉由通俗演講來介紹並告訴學生除了 $\epsilon-\delta$ 之外、分析的世界遠遠有趣得多。

6. T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origins and Development*, AMS/Chelsea, 1975.
7. O. Hijab, *Introduction to Calculus and Classical Analysis*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 2007.
8. 愛德華著。微積分的發展歷史。凡異出版社, 2001。
9. F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Dover, 2004. 中譯本: 克萊因著。高觀點下的初等數學。Vol. 1,2,3, 復旦大學出版社 (中國) (1989)。
10. Eli Maor; *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998. 中譯本: 毛起來說三角。鄭惟厚譯。天下文化出版 (2000)。
11. 林琦焜。數, 十進位與 Cantor 集。數學傳播季刊, 24(4), 76-86, 2000。
12. 林琦焜。從 Cantor 集到碎形。數學傳播季刊, 25(1), 3-14, 2001。
13. 林琦焜。關於 Euler 級數的幾個觀點。數學傳播季刊, 36(1), 16-36, 2012。
14. 林琦焜。用函數來思考 (上、下)。數學傳播季刊, 43(3)、(4), 32-42, 54-70, 2019。

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—