數學傳播 45卷3期, pp. 26-32

克卜勒如何捕獲火星

張海潮

哥白尼 (1473～1543) 提出日心說, 但卻缺乏對行星繞日軌道的刻畫。對行星軌道的徹底理解是克卜勒 (1571～1630) 劃時代的貢獻。1687年, 牛頓出版《自然哲學的數學原理》, 在第一卷中將克卜勒三大定律通過運動學和微積分與萬有引力定律結合。(註一)

克卜勒和牛頓的工作, 請見項武義、張海潮和姚珩所著《千古之謎》, 台灣商務印書館。本文的目的在投石指路, 介紹高中生如何透過三角函數、坐標幾何來對克卜勒捕獲火星的成就作初步的探索。

第一節 天球上赤經、赤緯坐標的建立

在望遠鏡發明之前, 古代的觀星者, 很自然地把天上的星星分成兩大類： 恆星與行星。

恆星, 顧名思義, 是不動的, 或者至少它們的相對位置是不變的。比方說, 北斗七星, 因為地球的自轉, 七顆星每晚雖然也繞著北極星由東往西轉, 但七顆星的相對位置不變, 這當然是因為它們距離地球太遠的緣故。

於是古人就想詳細刻畫恆星的位置。當時, 由於恆星對觀星者並沒有遠近的差異, 所以就把所有的恆星想成與地球的距離都是 1, 恆星分佈在半徑為 1 的天球上, 以地球為球心。觀星者又想出在天球上建立經緯度的辦法來標定恆星的位置, 而這個經緯度的建立方式和現在地球表面的經緯度概念幾乎是一樣的, 稱為赤經赤緯 (度)。如圖 (註二):

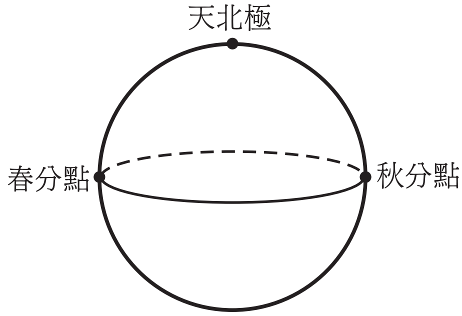


圖1

在天球上, 以北極星爲 (天) 北極, 而以與北極星夾 90° 角的大圓爲 (天) 赤道, 並以春分點 (同註二) 爲經度 0 度。下表是北斗七星的 (赤) 經 (赤) 緯度數 (註三):

星名	赤經	赤緯
北斗一 天樞星	165°	62°
北斗二 天璇星	165°	56°
北斗三 天璣星	180°	54°
北斗四 天權星	184°	57°
北斗五 玉衡星	195°	56°
北斗六 開陽星	200°	55°
北斗七 瑤光星	207°	49°

第二節 實測赤經赤緯

首先, 星體 A 的赤緯容易測得, 其實就是星體 A 與北極星夾角的餘角。想像觀星者坐在一個大圓環的圓心, 從圓心伸出兩根窺管, 一根指著北極星、一根指向星體, 圓環上刻有角度用以標示赤緯, 如圖 2 所示。

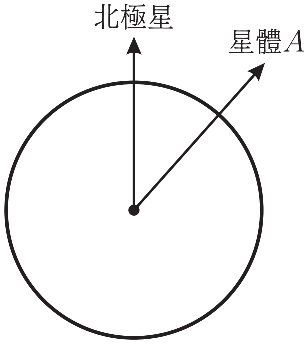


圖2

當窺管 OA 沿著圓環上下滑動時, 從窺管中見到的星體均屬同一赤經。這個觀星的圓環, 中國古稱「儀」。(註四)

接著將 OA 滑到與北極星垂直的位置, OA 指向天赤道, 觀星者再利用一個有角刻度的水平圓環, 如圖3所示。

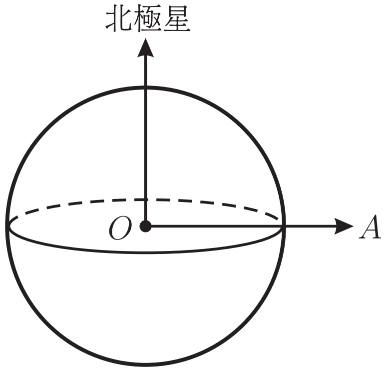


圖3

此時將窺管 OA 沿水平圓環滑動, 便可記錄在天赤道上的諸星及其間相差的赤經度數。至於春分點 (赤經 0 度) 的確立, 就要在接近 3 月 20 號時, 持續記錄太陽剛下山, 尚未完全隱去, 太陽與北極星方向的夾角, 當夾角是 $90°$ 時, 太陽的位置就是春分點。春分點在天球上位置的確立, 仍要看此刻太陽背後所指向的恆星。古代 (巴比倫) 就以每天太陽背後指向的恆星來描述太陽的位置, 即所謂的黃道十二宮。例如白羊宮涵蓋 3 月 21 日到 4 月 20 日太陽所在的位置, 3 月 21 日基本上就是春分的這一天。

可以這麼說, 恆星經緯度的確立, 相當於在天球上有了標記, 幫助觀星者精準地說明每一時刻, 日、月及 (當時) 五大行星的位置。

第三節 黃經、黃緯坐標(並見註二)

如圖4

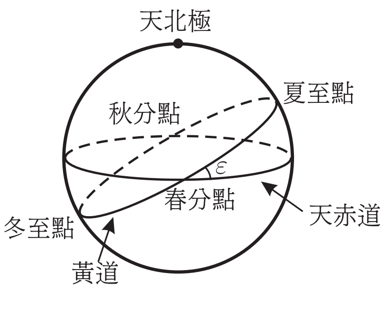


圖4

從地球觀察到的太陽軌道稱爲黃道, 黃道亦是天球上的一個大圓, 以地球爲圓心。我們將黃道定爲黃經黃緯系統的“赤道”, 此一黃道與天赤道相交於春分點, 夾角 $\varepsilon = 23.5°$, 此即地軸與黃道面傾斜的角度, 是四季發生的原因。

若以地球爲坐標原點 $(0,0,0)$、春分點爲 $(1,0,0)$、北極星爲 $(0,0,1)$, 黃極與夏至的坐標如下圖所示

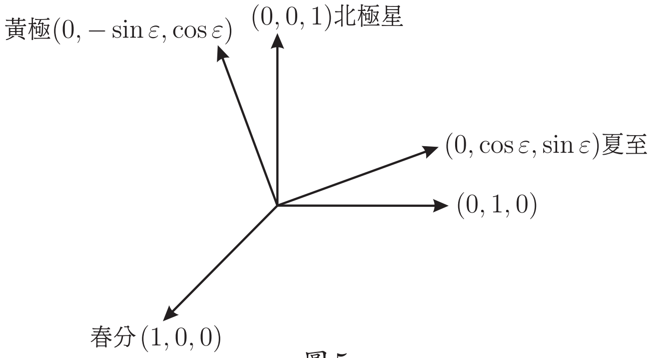


圖 5

黃道面由春分和夏至這兩個互相垂直的單位向量決定, 黃極 (向量) 垂直黃道面, 是黃緯 $90°$ 的點。整個黃道都是黃緯 $0°$, 正如整個天赤道都是赤緯 $0°$。

參考圖 4, 我們寫下春分、夏至、秋分、冬至四個節氣的經緯度。(註五)

經緯 / 節氣	赤經	赤緯	黃經	黃緯
春分	$0°$	$0°$	$0°$	$0°$
夏至	$90°$	$23.5°$	$90°$	$0°$
秋分	$180°$	$0°$	$180°$	$0°$
冬至	$270°$	$-23.5°$	$270°$	$0°$

習慣上, 我們以 (λ,β) 表示黃經黃緯, 以 (α,δ) 表示赤經赤緯; 兩者有下列的換算公式:

$$\begin{aligned}
&\sin\delta=\sin\varepsilon\sin\lambda\cos\beta+\cos\varepsilon\sin\beta,\\
&\cos\alpha\cos\delta=\cos\lambda\cos\beta,\\
&\sin\alpha\cos\delta=\cos\varepsilon\sin\lambda\cos\beta-\sin\varepsilon\sin\beta,
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
&\sin\beta=\cos\varepsilon\sin\delta-\sin\alpha\cos\delta\sin\varepsilon,\\
&\cos\lambda\cos\beta=\cos\alpha\cos\delta,\\
&\sin\lambda\cos\beta=\sin\varepsilon\sin\delta+\sin\alpha\cos\delta\cos\varepsilon,
\end{aligned}$$

式中 ε 代表黃道和天赤道的夾角, 大約是 $23.5°$。(註六)

第四節 從古代希臘天文學家到克卜勒

古希臘的天文學家很自然地採取地心說, 並且在天球上建立經緯度。托勒密大約在公元

150年製作了弦表 (即三角函數表), 利用三角學研究天球面上的恆星分佈 (註七)。當時太陽和月亮的軌道方便測量並且可以預測。行星就不一樣了, 主要是行星和地球都繞太陽運行, 堅持地心說, 從地球觀測行星軌道便發生了奇怪的“逆行現象”。(註八, 並見註四及註七) 意即經過一段時間, 行星便會倒退, 倒退一陣後, 又重新順行。古希臘天文學家的重要任務就是用數學模型解釋行星詭異的運動。

到了哥白尼提出日心說, 理解到行星均繞太陽公轉, 並且幾乎都在黃道面上, 此時, 從地心觀察行星, 若以黃經黃緯系統記錄, 則行星之黃緯接近 0° (即在黃道面上), 或可視爲 0°, 而僅需要記錄每日太陽及行星的黃經度數。

克卜勒服膺日心說, 嘗試從日心來觀察行星繞日的軌道, 但身居地球如何將觀星者置於太陽呢?

克卜勒知道火星繞日的週期是 686天 (註九), 於是他想, 每隔一個火星年, 686天, 火星和太陽都在同一個位置, 但是地球卻是在不同的位置, 如圖 6 所示 (假設地球公轉軌道是圓, 註十)。

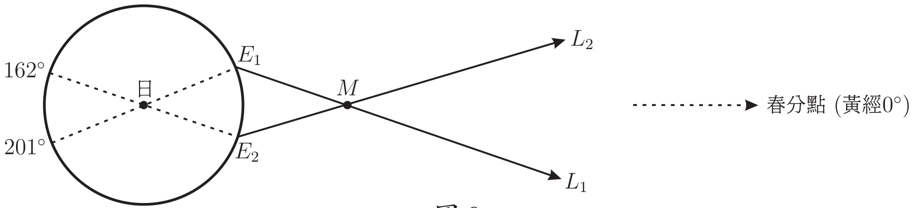


圖6

在某日從地球 E_1 測得太陽的黃經度數是 201°, 火星度數是 318°, 經過了一個火星年 686天, 地球 E_2 測得太陽的黃經度數是 162°, 火星度數是 38°。圖中向右是春分點, 黃經 0° 的方向。

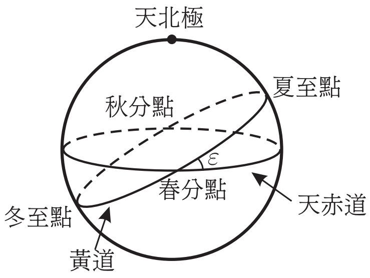
L_1 指向黃經 318°, L_2 指向黃經 38°, L_1 和 L_2 的交點便是火星 M 的位置。(我們注意 L_1, L_2 只是指向同一位置的火星, 因此必須求其交點才能捕獲火星)。據說克卜勒曾經如此標出數百個火星的位置, 終於發現火星繞日的軌道是橢圓, 太陽位居一焦點。

克卜勒的成就顛覆並終結了托勒密以來對行星軌跡建立的模型, 項武義教授把圖 6 的計算測量辦法稱爲“克卜勒量天術”, 以表彰這位劃時代的天文學家。

註一: 張海潮、莊正良, 橢圓的曲率公式和萬有引力的平方反比規律, 數學傳播 40 卷 2 期, 2016。

註二: 在 (天) 球面上定經緯度, 首先要定好“北極”, 然後以與北極夾 90° 的大圓爲 (天) 赤道。若以北極星爲天球的北極, 所定出的經緯度稱爲赤經赤緯, 相當於地球的經緯度向天球的投射。唯一的差別在於經度 0 度的起算, 在地球是英國的格林威治, 在天球則是春分點 (黃道和天赤道的交點)。

天球上另一個經緯度系統是以太陽運行的黃道爲赤道, 稱爲黃經黃緯, 由於春分點是黃道和天赤道的交點, 因此黃經黃緯系統亦以春分點爲經度 0 度的起算點, 如圖所示。



註三: 如果搜尋天樞星, 會看到天樞星的赤經是 11h03m43.7s, 赤緯是 $61°45'72''$。赤經單位中的 h(hour) 代表 15°、m(minute) 代表 h 的六十分之一、s (second) 代表 m 的六十分之一。赤緯單位中的一撇代表六十分之一度, 兩撇代表三千六百分之一度。本文爲了方便讀者閱讀, 已將 h, m, s 換算成度, 並且取了近似值。

註四: 張海潮,《古代天文學中的幾何方法》, 台北三民書局。

註五: 中國對太陽在黃道上的位置, 每隔 (黃經) 15° 定一個節氣, 共二十四節氣。如下表所示:

節氣	立春	雨水	驚蟄	春分	清明	穀雨	立夏	小滿
太陽黃經度	315°	330°	345°	0°	15°	30°	45°	60°
節氣	芒種	夏至	小暑	大暑	立秋	處暑	白露	秋分
太陽黃經度	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
節氣	寒露	霜降	立冬	小雪	大雪	冬至	小寒	大寒
太陽黃經度	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°

其中最重要並爲中西方通用的是春秋分和夏冬至, 中國稱爲二至二分。

原本古代中國是先定好二至二分的日期, 然後將其間間隔的日期均分, 插入其他20個節氣, 稱爲平氣。淸朝時接受西方傳敎士的建議, 在黃道上太陽每行 15° 定一節氣, 稱爲定氣。

註六: 我們略證這組換算公式:
如圖 5, 原點是地球, 春分在 $(1,0,0)$, xy 平面是天赤道面, z 軸指向北極星。黃經黃緯系統的三個互相垂直的單位向量依序爲 $(1,0,0)$, 夏至點 $v=(0,\cos\varepsilon,\sin\varepsilon)$ 和黃極 $w=(0,-\sin\varepsilon,\cos\varepsilon)$, 其中 $(1,0,0)$ 和 v 張出黃道面, 黃極 w 是黃道面的法向量,

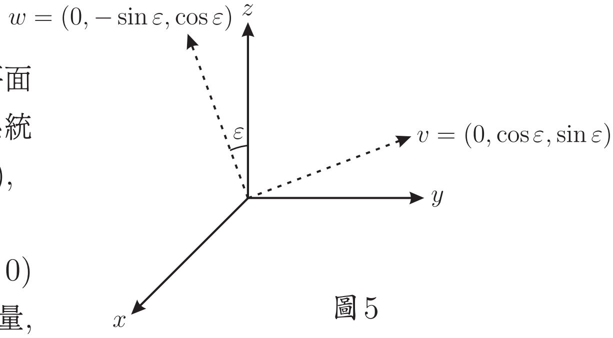


圖 5

其與北極方向的夾角是 $\varepsilon = 23.5°$。在天球面上赤經赤緯是 (α, δ) 時, 代表空間向量

$$(\cos\delta\cos\alpha, \cos\delta\sin\alpha, \sin\delta), \tag{1}$$

而黃經黃緯是 (λ, β) 時, 代表空間向量

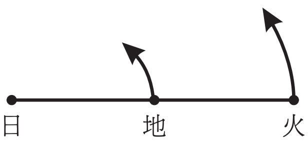
$$\cos\beta\cos\lambda(1,0,0) + \cos\beta\sin\lambda(0,\cos\varepsilon,\sin\varepsilon) + \sin\beta(0,-\sin\varepsilon,\cos\varepsilon). \tag{2}$$

令 (1) = (2) 就得到第一組換算公式, 至於第二組, 可由第一組中 ε 代以 $-\varepsilon$, (λ, β) 和 (α, δ) 交換而得。

註七: 蔡聰明, 星空燦爛的數學 (I) — 托勒密如何編製弦表?, 數學傳播 23 卷 2 期, 1999。

註八: 英文行星一詞“planet”源於古希臘文, 意爲「漫遊者」(wanderer)。

註九: 當時從地球觀測到每隔780天, 會發生一次太陽、地球和火星三連星, 如圖所示。



已知地球繞日的週期是365天, 如何求火星繞日的週期 T(天)? 這是一個逆時鐘問題 (時鐘問題是問長短針多久重合一次)。我們以下列公式列式:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{365} - \dfrac{1}{T}} = 780,$$

式中的 1 代表一圈, $\dfrac{1}{365}$ 代表每天地球繞 $\dfrac{1}{365}$ 圈, 解出 $T = 686$ 天。

註十: 項武義、張海潮、陳鵬仁、姚珩, 重訪克卜勒　地球的面積律與橢圓律, 數學傳播34卷2期, 2010。

地球公轉軌道是橢圓, 但離心率很小, 只有 0.017, 此處爲了方便, 假設是圓。

—本文作者爲台大數學系退休教授—