

# 幾個印度數學家與統計學家

康明昌

ISI (Indian Statistical Institute) 是 1931 年 P. C. Mahalanobis (1893~1972) 在加爾各答創立的。TIFR (Tata Institute of Fundamental Research) 則是由物理學家 Homi J. Bhabha (1909~1966) 在印度的金融中心孟買成立的。另一知名的學術機構 IISc (Indian Institute of Science) 早在 1909 年在邦加羅爾開辦, 是 1930、1940 年代的印度少數幾家有能力和有資源進行物理學研究的學校。

加爾各答 (Calcutta)、孟買 (Bombay)、邦加羅爾 (Bangalore) (註 1) 現在已改名為 Kolkata、Mumbai、Bengaluru。

ISI 成立之初, 校方只提供一間工作室讓 ISI 的人員使用, 至於運作經費與管理維修則由 Mahalanobis 設法自行解決。從 ISI 走向世界的學者至少有兩位, 一位是 C. R. Rao (1920~), 知名的統計學者, 2002 年美國 National Medal of Science 的得主; 另一位是數學家 S. R. S. Varadhan (1940~, Courant Institute 的教授, 知名的機率學者, 2007 年 Abel Prize 的得主)。

Homi Bhabha 在 Cavendish 實驗室工作, 他原本是 Paul Dirac (1902~1984) 的學生, 劍橋大學博士 (1934 年)。Dirac 是諾貝爾物理獎 1933 年得主。

Bhabha 在 1940 年回印度度假, 卻因二次大戰的緣故, 無法回到英國工作。他只好留在 IISc 工作。他的運氣不錯, 他有一個傑出的博士班學生 Harish-Chandra (1923~1983)。Harish-Chandra 的學術興趣其後從物理轉向數學, 成為二十世紀半單李群無窮維表示論的大師 [26], [20, p.532-534]。

Homi Bhabha 很早就認識核物理對於印度國防、經濟與科學發展的重要性。他在 1940 年代初期向 Tata 基金會尋求財政支援 (Sir Dorabji Tata Trust), 1945 年擔任 TIFR 的所長。初始的目的是研究核物理與宇宙線。Bhabha 的遠見之一是把數學也納入他的研究所 (School of Mathematics), 培育許多世界一流的數學家。

印度許多第一代的代數幾何學者都是出身於 TIFR, 如: M. S. Narasimhan (1932~2021), C. S. Seshadri (1932~2020), S. Ramanan (1937~)。多複變函數的 Raghavan Narasimhan (1937~2015) 與代數群的 M. S. Raghunathan (1941~) 也都是在 TIFR 從助理研究員一路成長為教授和國際知名的學者。

## 1. Mahalanobis

Prasanta Chandra Mahalanobis (1893~1972) 是印度統計學之父。他把統計學的方法與應用引入印度, 創辦 ISI (1931年) 與印度的第一本統計學期刊 Sankhya (1933年), 培育許多統計學者 (如: 本文第 2 節出現的 C. R. Rao)。

Mahalanobis 出生在加爾各答一個富裕的婆羅門家庭, 1912年在 Presidency College (Calcutta University) 物理系畢業。1913~1915 年到英國留學。

他原先的計畫是到倫敦大學唸書。開學之前, 他到劍橋大學 (Cambridge University) 遊覽。King's College 華麗的教堂與精美的內飾使他大為震撼。在流連徘徊於劍橋的自然與人文景緻之際, 他竟錯過回倫敦的最後一班火車。

當晚他借住在劍橋友人的宿舍。朋友勸他:「你這麼喜歡這裡的建築, 何不留下來在這裡唸書?」

第二天他到 King's College 面試。有意思的是, 他居然被錄取。從此他留在劍橋大學 (註 2)。

1914年他通過劍橋的畢業考 (Mathematical Tripos, Part I), 1915年他通過另一個畢業考 (National Sciences Tripos, Part II), 完成劍橋大學的學業。他還獲得一份獎學金, 準備跟隨 C. T. R. Wilson (1869~1939, 大氣電學) 教授繼續攻讀物理 (於 Cavendish Laboratory)。

在進入 Cavendish 實驗室之前, 他計畫回印度短期度假 (1915年7月)。可是第一次世界大戰已經爆發 (1914年7月), 船班不太穩定, 他只好在圖書館消磨時間, 等待船班。

這時他遇見 Macaulay。Francis Macaulay (1862~1937) 是一位高中數學教師 (St. Paul's School), 也是劍橋大學的 tutor (為劍橋學生補習以便參加 Mathematical Tripos)。

Macaulay 向他推薦一份剛裝訂好的期刊 Biometrika (註3)。Mahalanobis 瀏覽了幾篇文章, 就決定購買一整套的 Biometrika, 從第一期到最近一期, 以便在船上閱讀。

回到印度之後, Presidency College 邀請他到物理系任教, 因為有一位老師受徵召入伍, 留下一些課程需要有人接手。Mahalanobis 答應幫忙。1916 年成為 Presidency College 物理系教師, 從此他再也沒有回到 Cavendish 實驗室。

Mahalanobis 認為統計學是一門新興的科學領域, 從分析各種數據, 可以得到新的資訊, 提供決策參考。從 1920 年代初期, Mahalanobis 把統計學應用到許多領域, 如: 人類學、氣象學、農學、經濟學。他的物理實驗室慢慢地有一些人對統計學產生興趣, 有人戲稱他們是統計實驗室。

1931 年 12 月 17 日 ISI 成立, Mahalanobis 擔任 ISI 的主任與秘書, 初期的 ISI 經費拮据, 只能聘請兼職人員與研習生 (trainee)。1947年印度獨立, ISI 才獲得大量經費補助, ISI 因此突飛猛晉。

1959 年印度政府授予 ISI 一項殊榮: Institution of National Importance, ISI 不但經費充裕, 可以自行聘用教授、副教授, 還可以頒授學位 (博士、碩士、學士)。

Mahalanobis 不是一個書齋型的學者, 他參與許多文化與社會活動, 他是印度政府第二個經濟五年計劃的起草人。他與印度各個政黨的領袖都有極深的交情, Raman (1930 年諾貝爾物理獎得主) 曾這樣描述 Mahalanobis: 他永遠知道麵包的哪一面是塗上黃油的 [3, p.27]。

## 2. C. R. Rao

Calyampudi Radhakrishna Rao (1920~) 是 ISI 培養出來的頂尖統計學者, 他協助 Mahalanobis 把 ISI 建立成卓越的統計學術機構。

C. R. Rao 出生在印度東南方濱海的地區 Andhra (約在馬德拉斯北方)。他的父親是個警官, 工作地點經常變換; 他的母親是傳統的家庭主婦, 生養了十個小孩。他們在印度種姓制度下是屬於第三種姓 (註4)。

C. R. Rao 家的女孩是不受教育的, 男孩子由他的母親管教上學。C. R. Rao 描述小時候他的母親如何管教他們。每天早晨四點鐘, 她總會把 C. R. Rao 喚醒, 點亮煤油燈督促他溫習功課。

1940 年 C. R. Rao 以 Andhra 大學數學系第一名的成績畢業。他原先想繼續唸碩士學位, 卻因申請文件沒有及時送達而沒有錄取。

之後他參加公職考試, 結果也失敗了。這時第二次世界大戰已經爆發 (1939 年), 英國軍方在印度招募到北非工作的測量人員。C. R. Rao 千里迢迢地坐了 500 哩的火車從南印度到印度北方的加爾各答。他因年齡不滿 20 足歲 (他是 9 月 10 日出生的) 不被錄取。

在加爾各答旅館有人告訴他 ISI 有一個統計實習生的訓練計畫。第二天他到 ISI 面試, 很幸運的, 他被錄取了。

1941 年他考入加爾各答大學的統計研究所, 1943 年完成碩士學位, 隨即被 ISI 聘用。

King's College (劍橋大學) 遺傳學教授 R. A. Fisher 是 Mahalanobis 的好朋友。1946 年劍橋大學的人類學博物館獲得一批考古隊發掘的人類骨骼, 他們需要有人幫忙分析鑑定。C. R. Rao 熟悉 D2-statistics (Mahalanobis distance) 的方法, 因此被派往 King's College。

在博物館工作之外, 他還到 Fisher 的遺傳學實驗室學習, 並修習博士課程。1948 年獲得博士學位, 完成許多研究成果, 如: Cramer-Rao 不等式、Rao-Blackwell 定理、Rao's score test。

1948 年 C. R. Rao 回到 ISI, 1949 年升教授, 這時他才 29 歲。之後他負責 ISI 教學、研究、訓練實習生的工作, ISI 的名聲蒸蒸日上。

Mahalanobis 與 C. R. Rao 的眼光並不局限於統計學。他們也願意發展數學、資訊科學、經濟學等相關領域。

在 1956~1963 年, C. R. Rao 有四個學生研究領域都是數學, 而不是統計。他們是: V. S. Varadarajan (1937~2019, UCLA 教授), K. R. Parthasarathy (1936~, ISI 教授), R. Ranga Rao (1935~, U. Illinois Chicago 教授), S. R. S. Varadhan (1940~, Courant Institute 教授)。

他們的研究興趣是機率、李群及其表示論。名義上 C. R. Rao 是他們博士論文的指導教授, 他對於這些領域其實所知有限, 但是他仍然鼓勵這些學生聽從內心的召喚, 追求他們喜愛的研究領域。見 [7], [5], [24]。

Varadarajan 於 1957~1960 年在 ISI 就學, 他是李群與表示論的專家, 也是 Harish-Chandra 全集的編輯。Varadhan 在 ISI 的時間較晚 (1959~1962年), 他是 2007 年 Abel 獎的得主。

印度的制度要求教授在年齡滿 60 歲時退休, 因此 C. R. Rao 在 1979 年離開 ISI, 到美國匹茲堡大學任教, 1988 年 Penn. State U. in Pittsburgh 以講座大學的頭銜邀請 C. R. Rao 到 PSU in Pittsburgh。

在美國工作了三十多年的 C. R. Rao 始終生氣勃勃。2002年他獲頒 National Medal of Science, 現在是百歲人瑞。

### 3. Harish-Chandra (1923~1983)

Homi J. Bhabha (1909~1966) 來自孟買, 他的父親是個律師。Bhabha 16 歲進入劍橋大學 (Gonville and Caius College), 1930 年獲得工程學士學位, 1934 年獲得博士學位, 1934 年解釋宇宙線的現象, 他把其中出現的基本粒子定名為 meson (註5)。

1941 年他被選為倫敦皇家學會會員 (FRS), 1945 年創立 TIFR (見本文第一段), 1966 年死於空難。

Bhabha 在 1940 年回印度渡假, 卻因第二次世界大戰 (1939 年) 無法回英國工作, 這時 C. V. Raman (1930 年諾貝爾物理獎得主) 剛好是 IISc 物理系的系主任, 他勸 Bhabha 留在 IISc 工作 (物理系副教授)。就在 IISc, Harish-Chandra 成為 Bhabha 的博士班學生。

Harish-Chandra 在坎普爾 (Kanpur, 北印度的大城) 出生。1943 年他獲得 Univ. of Allahabad 的物理碩士學位 (註6), 主考官是 C. V. Raman; Raman 在考試後鼓勵他到 IISc 唸博士學位, 他因此成為 Bhabha 的學生。

由於 Bhabha 的推薦, 二次大戰結束後不久, Harish-Chandra 也來到 Gonville and Caius College, 成為 Dirac 的學生, 1947 年獲得物理學博士學位。

1947~1948 年 Harish-Chandra 跟隨 Dirac 到 Princeton 訪問 (Institute for Advanced Study, IAS)。這時 C. Chevalley 與 Emil Artin 正好在 Princeton 大學教書。Harish-Chandra 旁聽他們開的課, 他也從 Chevalley 那裡學到李群與李代數 exceptional

Lie group 的方法。

1944 年 Dirac 關於 Lorentz group (註7) 的文章發表 (無窮維表示論)。很快的有三組數學家完成無窮維表示的分類: 一組是 Harish-Chandra, 他還是個物理學家, 一組是 V. Bargmann, 他是 Princeton 大學理論物理教授, 另一組是前蘇聯的 I. M. Gelfand 與 M. A. Naimark; Gelfand (1913~2009) 是 Kolmogorov 的學生 [12, p.23]。

Harish-Chandra 到 Princeton 之後, 才發現他的證明有許多漏洞, 他很懊惱地告訴 Dirac。Dirac 冷淡地回應: 「我對證明不感興趣, 我只關心『自然的力量』(Nature) 在做什麼。」Harish-Chandra 覺得自己實在缺乏物理學家應該具備的神祕第六感 (物理直觀), 他應該從物理轉向數學 [16, p.203-204]。

1952~1953 年 Harish-Chandra 到 TIFR 訪問。Bhabha 似乎想挽留他在 TIFR 工作。幾經考慮 Harish-Chandra 還是回到美國 (Columbia 大學, 1950~1963; Princeton IAS, 1963~1983)。

由於 Harish-Chandra 在李群與李代數表示論的成果, 他獲得美國數學會 1954 年的 Cole Prize (註8)。

Harish-Chandra 是 1958 年 Fields Medals 評選時強勁的候選人之一。他與 R. Thom (1923~2002) 被評選委員認為同屬 Bourbaki 成員 [13], 因此兩個人之間只能有一個人能獲頒 Fields Medal [16, p.213]。這次獎項最後頒給 Thom 與 K. F. Roth (1925~2015) (註9)。其實 Thom 並不是 Bourbaki 成員, 他只是 Henri Cartan 的學生; Harish-Chandra 不是 Chevalley 的學生, 他只是深受 Chevalley 影響的人, 而 Cartan 與 Chevalley 都是 Bourbaki 的創始成員 [13]。

將近三十多年的研究生涯 Harish-Chandra 集中在半單李群與化約群 (reductive groups) 的表示論, 由這些群產生的齊性空間 (homogeneous spaces) 的調和分析理論 (如: Plancherel formula)。

Harish-Chandra 的論文, 除了一篇與 A. Borel 合寫的之外, 都是單一作者 (single author), 可以說, 他單獨建立他的表示論與調和分析的理論。

Harish-Chandra 喜歡簡樸深入的思考。在 IISc 時, 他常常陪 Raman 散步。他與 Bhabha 的關係似乎比較疏遠; Bhabha 來自富裕家庭, 具有精湛的藝術修養。在 Princeton 時, 他喜歡 Chevalley 與 Artin 的課, 對 Weyl 的課則不太欣賞。

Harish-Chandra 的名字本來叫做 Harishchandra。有些印度人的名字並不區分 first name 與 last name (註10)。

為什麼會有”—“ (hyphen) 出現, 是因為他早期一篇物理論文的編輯加上去的, 他也欣然接受這個新的名字 Harish-Chandra。因此她的女兒名叫 Premela Chandra。

## 4. K. Chandrasekharan

Komaravolu Chandrasekharan (1920~2017, 本文簡稱他為 KC) 來自 Andhra 地區 (第 2 節的 C. R. Rao 也來自這地區), 他在 Presidency College Madras 獲得博士學位 (1946), 指導教授是 K. Ananda Rau (1893~1966)。

Rau 比有名的 Ramanujan 年輕 6 歲, 但是境遇順遂許多。他與 Ramanujan 在 Cambridge 認識, 兩人成爲好朋友。他是 G. H. Hardy 的學生, 回到印度後他任教於 Presidency College Madras。

Rau 有許多有名的學生: S. S. Pillai (1901~1950), S. Minakshisundaram (1913~1968) 與 KC。

Pillai 的專長是數論與 Waring's problem [19, p.251]。1950 年他搭機到 Harvard 大學參加國際數學家大會, 飛機在埃及開羅墜毀身亡。

Minakshisundaram 是分析學家 (PDE, Laplace operators), 他提出 heat equation 的方法, 影響了後來 Atiyah-Bott-Patodi 的工作 [19, p.252]。Minakshisundaram 後來成爲巴基斯坦科學院的院長。

KC 在 Princeton 高等研究院 (IAS) 擔任博士後研究助理, 其中有一年是 Weyl 的助理。他跟 Princeton 大學的教授 S. Bochner 合作, 因此學到了多變數的 Fourier series 與 Fourier transforms。此外他還認識許多有名的數學家, 如: C. L. Siegel、A. Selberg、von Neumann。這幾年的經驗徹底地改變 KC。KC 的研究專長是解析數論。

1949 年 Homi Bhabha 到 Princeton 訪問, 邀請 KC 擔任 TIFR 的教授, KC 邀請 Siegel 的學生 K. G. Ramanathan (1920~1992) 一起到 TIFR 工作。

TIFR 在 1945 年成立時, Bhabha 只找到兩個數學家: D. D. Kosambi 及 F. W. Levi, 但是數學所的工作並沒有活絡起來 (註 11)。

KC 不只是優秀的數學家, 他還擅長行政與組織工作。在 KC 與 Ramanathan 的領導之下, TIFR 才成爲數學研究的卓越中心。

## 5. 助理研究員形成的研究團隊

1950年代與1960年代的印度學制, 高中畢業後的大學教育需要五年, 前兩年稱爲 Intermediate, 後三年稱爲 Honors (Mathematics Honor, Statistics Honor, Physics Honor)。以優異的成績取得 Honors 學位的人通常被視爲具有碩士學位的程度。

KC 與 Ramanathan 的眼光放在招募一批優秀的 Mathematics Honors 的畢業生, 他們進 TIFR 的目的是寫博士論文, 因此形成一個新世代的研究團隊。他們進來的時候都只是助理研究員 (博士班學生), 以後隨著研究表現, 其待遇與職稱也跟著提昇。例如: M. S. Narasimhan 與 C. S. Seshadri 是同一年 (1953年) 進入 TIFR 當助理研究員, 後來逐步升到副教授

(Reader) 與教授 (Professor)。

Raghavan Narasimhan, S. Ramanan 與 C. P. Ramanujam 在1957年加入 TIFR (助理研究員)。注意, C. P. Ramanujam 與著名的 S. Ramanujan 姓氏字母的拼法相差一個字母。

1960 年代初期 R. Narasimhan 研究多複變函數論的 Levi's problem (Hartogs' inverse problem), 他推廣了 Oka 與 Remmert 的定理, 被邀請到 ICM Stockholm (1962年) 演講。

根據 R. Narasimhan 的回憶 [19, p.256], 1950 年代 TIFR 助理研究員 (博士班學生) 的士氣非常高昂。「我們每天談的都是數學。大家認為這是天下最至高無上的事。我們努力學習各種新的概念與新的方法」。

KC 運用他的人際關係聘請第一流的學者來講學, 講學的時間大約是兩個月或更久。

Warren Ambrose (MIT 教授) 在 1953 年到 TIFR 講學。第一堂課上完, 學生紛紛表示不懂「拓樸空間」是什麼。於是 Ambrose 花了三個小時講了點集拓樸的基本事項, 然後證明 Haar measure 的存在性與 the spectral theorem, 最後證明 Peter-Weyl 定理 [23]。

第二年 Samuel Eilenberg (哥倫比亞大學教授) 來教代數拓樸。他不著痕跡地採用 category 與 functor 的觀點教代數拓樸, 而 category 與 functor 這些字眼完全沒有在他的演講出現。

接著 (1955年) Laurent Schwartz (1950 年 Fields 獎得主) 來開「複流形」的課, M. S. Narasimhan 負責為這門課做筆記。

KC的構想是挑選一個學生為一個客座教授的演講作筆記。學生不懂的地方當然要回去跟老師討論釐清, 這些筆記都要公開發行。如此, 每個客座教授做完一系列的演講, 至少有一個學生瞭解大部分的演講內容。這是 KC 訓練研究生的方法。

現在世界的知名大學都收藏 *TIFR Lectures on Mathematics and Physics*。

M. S. Narasimhan (1932~2021) 與 C. S. Seshadri (1932~2020) 在同一年出生, 同一年進大學 (Loyola College Madras), 同一年到 TIFR 當助理研究員 (1953) 年。1956 年底, KC 把他們送到法國寫博士論文 (由法國提供獎學金), 他們在 1960 年才回來。

Seshadri 在巴黎參加 Chevalley 研討會, M. S. Narasimhan 的指導教授是 Schwartz。

KC從國際數學家聯盟 (IMU) 爭取一筆經費, 每四年在 TIFR 辦理一次會議 (International Mathematics Colloquium), 從 1956 年開始, 主題是:

- (\*) zeta functions (1956年),
- (\*) function theory (1960年),
- (\*) differential analysis (1964年),
- (\*) algebraic geometry (1968年).

這些會議變成 IMU 主辦的僅次於 ICM (國際數學家大會) 的重要會議, 其會議論文集也變成該領域的重要參考文獻。

1965 年 9 月 KC 離開 TIFR, 任教於瑞士的 ETH (Zürich), 他留在瑞士直到 2017 年去世 (註 12)。Homi Bhabha 在 1966 年 1 月死於空難。

KC 為何離開 TIFR, 相信他與 Bhabha 有過嚴重的衝突。可是至今為止並沒有可靠的資料足以說明內情 (註 13)。

## 6. Father Racine

Fr. C. Racine (1897~1976) 是個天主教耶穌會的神父。他參加第一次世界大戰受傷, 因此左腳有點跛。1937 年他來到印度。1939 年起任教於 Loyola College Madras。

他是 Elie Cartan 的學生 (1934 年博士), 他與 Leray、Weil、Henri Cartan、Delsarte [13] [14] 是極為熟悉的朋友。他瞭解並且肯定他們這些人追求的數學方向。

Racine 在 1950 年代初期在 Madras 大學作過幾場「Sheaf Theory」的演講。想想看, 在 1950 年代初期全世界有幾個大學能做這樣的演講? Racine 還替德國的期刊 Zentralblatt Math. 寫過兩篇關於 Leray 的 review articles。

Racine 本人不從事數學研究, 可是他的數學視野卻是寬廣而深入的。當時印度數學界還籠罩在 Hardy 式的數學氛圍 (「summability」等題材)。Weil 說: 「Hardy 帶壞許多印度數學家。但是 Ramanujan 太好了, Hardy 無法帶壞他。」[20, p.529]。

Racine 本人喜歡在課餘時間找學生聊天, 培養他們的數學品味 (taste)。他告訴他們什麼樣的數學才是好的數學, 什麼樣的數學經得起咀嚼。

受 Racine 薰陶的學生日後都成為印度數學界的領導人物, 例如, 在上一節出現過的 Ramanathan, M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri, Raghavan Narasimhan, C. P. Ramanujam。

他引導這些學生去學習核心的數學領域, 鼓勵他們參加 TIFR 助理研究員的甄試。他在 1940 年代就認識 KC 與 Ramanathan, 他知道他們在 TIFR 想要做一番什麼樣的事業。

Racine 在 1967 年退休回到法國。可是他在印度紮的根太深了, 他深愛這塊土地。不久他重返 Loyola College Madras, 直到 1976 年去世。

## 7. 向量叢所形成的參模空間

M. S. Narasimhan 與 C. S. Seshadri 在向量叢參模空間 (the moduli space of vector bundles) 的工作把拓樸的方法與代數幾何的方法結合起來, 這個突破鼓舞 TIFR 許多人從事向量叢與代數幾何的研究。

我們將採用以下的符號:

$X$  : 緊緻連通的黎曼面;

$g$  :  $X$  的虧格;

$p : E \rightarrow X$ ,  $X$  上的全純向量叢, 簡記為  $E$ ;

$rkE$ , 向量叢  $E$  的階數, 即  $\dim_{\mathbb{C}} p^{-1}(x)$ ,  $x \in X$ ;

$\deg E$ , 向量叢  $E$  的次數, 即  $\deg \Lambda^n E$ , 其中  $n = rkE$ ;

若  $n, d$  都是整數且  $n \geq 1$ , 定義集合  $U(n, d)$  如下:

$$U(n, d) = \{[E] : [E] \text{ 是向量叢 } E \text{ 的同構類且 } rkE = n, \deg E = d\}.$$

1961~1962 年 M. S. Narasimhan 與 C. S. Seshadri 合作研究黎曼面的向量叢。當  $n = 1, d = 0$ ,  $U(1, 0)$  在 1950 年代已經有許多完整的結果, 可以在集合  $U(1, 0)$  賦予一種 abelian variety 的結構, 它也就是現在習稱的 Picard variety。

但是人們對於  $rk E \geq 2$  的向量叢及參模空間所知有限。當  $rk E \geq 2$  且  $g = 0$ , 這些向量叢的結構相當清楚 (G. D. Birkhoff, Grothendieck, Seshadri), 當  $rk E \geq 2$  且  $g = 1$ , Atiyah 已做過不少研究。

**定義 1: 酉叢與不可約酉叢** (Weil, J. Math. Pures et Appl. 17(1938), 47-87) 設  $X$  是虧格  $\geq 2$  的黎曼面,  $\tilde{X}$  是其通用覆蓋空間, 因此  $X \approx \tilde{X}/\pi$ , 其中  $\pi$  是  $X$  的基本群。令  $V$  是  $n$  維複係數向量空間,  $U(V)$  是酉群 (即  $U(V) \simeq U_n(\mathbb{C})$ )。對於任意的表示  $\rho : \pi \rightarrow U(V)$ , 恆可造出一個階數為  $n$  的向量叢  $E_\rho$  如下: 若  $g \in \pi$ , 定義

$$g \cdot (z, v) := (z \cdot g^{-1}, \rho(g) \cdot v) \in \tilde{X} \times V.$$

考慮映射  $\hat{p} : \tilde{X} \times V \rightarrow \tilde{X}$ , 其誘導的商映射  $p : \tilde{X} \times V/\pi \rightarrow \tilde{X}/\pi$  形成  $X \approx \tilde{X}/\pi$  的一個階數為  $n$  的酉叢 (unitary bundle)  $E_\rho$ , 其中  $E_\rho := \tilde{X} \times V/\pi$ 。

當  $\rho : \pi \rightarrow U(V)$  是不可約表示,  $E_\rho$  稱為表示  $\rho$  所定義的不可約酉叢 (irreducible unitary bundle)。

可以證明  $\deg E_\rho = 0$ 。

定義集合

$$U'(n, 0) = \{[E] : [E] \text{ 是 } E \text{ 的同構類, } E \text{ 是 } X \text{ 上的階數為 } n \text{ 的不可約酉叢}\}.$$

M. S. Narasimhan 與 C. S. Seshadri 證明: 有一種方法可以使  $U'(n, 0)$  變成複流形 (Math. Ann. 155(1964), 69-80)。

Harvard 大學年輕的代數幾何學者 David Mumford 在 ICM Stockholm (1962 年) 發表幾何不變量 (GIT) 的演講。

**定義 2: 穩叢與半穩叢** (stable bundle, semi-stable bundle) 全純向量叢  $E$  叫做穩叢 (半穩叢), 如果對於任意的子叢  $E' \in E$  恆有以下不等式:

$$\frac{\deg E'}{\operatorname{rk} E'} < \frac{\deg E}{\operatorname{rk} E} \quad \left( \frac{\deg E'}{\operatorname{rk} E'} \leq \frac{\deg E}{\operatorname{rk} E} \right).$$

M. S. Narasimhan 與 C. S. Seshadri 得知 Mumford 的穩叢與半穩叢的概念之後, 立印想到這些概念與酉叢可能會有一些聯繫。

他們證明: 若  $[E] \in U(n, 0)$ , 則  $E$  是穩叢的充分必要條件是  $E$  為不可約酉叢 (Ann. Math. 82(1965), 540-567)。事實上當  $E$  是  $\deg E \neq 0$  的穩叢, 也有類似酉叢的建構方法 (只是在定義 1, 要把基本群用一類 fuchsian group 代替。)

定義集合  $U^s(n, d) = \{[E] \in U(n, d) : E \text{ 是穩叢}\}$ ,  $U^{ss}(n, d) = \{[E] \in U(n, d) : E \text{ 是半穩叢}\}$ 。

回憶一下  $U'(n, 0) = \{[E] : [E] \in U(n, 0), E \text{ 是不可約酉叢}\}$ 。定義集合  $U''(n, 0) = \{[E] : [E] \in U(n, 0), E \text{ 是酉叢}\}$ ;  $U''(n, 0)$  也可寫成  $U''(n, 0) = \{[E] : [E] \in U(n, 0), E \text{ 是半穩叢}\}$ 。

Narasimhan-Seshadri 定理證明  $U'(n, 0)$  具有複流形的結構 (1964年)。Seshadri 進一步證明  $U''(n, 0)$  具有正則射影多樣體的結構 (Ann. Math. 85(1967), 303-336)。

Mumford 在 ICM Stockholm (1962 年) 證明  $U^s(n, d)$  具有平滑的擬射影多樣體的結構。因此 Seshadri 的定理可解釋成:  $U''(n, 0)$  是  $U'(n, 0)$  的自然緊緻化 (canonical compactification)。Seshadri 的方法可以推廣到  $U^{ss}(n, d)$ 。

M. S. Narasimhan 與 S. Ramanan 證明  $U(n, d) \setminus U^s(n, d)$  恰好是  $U^{ss}(n, d)$  的奇異點, 除了一個特殊情形 (Ann. Math. 89(1969), 14-51)。這個特殊情形是  $g = 2$  且  $n = 2$ ,  $d = 0$  (即  $U''(2, 0)$  的情形)。這些特殊情形蘊含一些有趣的幾何結構, 見 [21, p.22], [25, p. xxiv-xxv]。

此外, Narasimhan 與 Harder, K. Okamoto, S. Kumar, M. Nori 也有許多重要的合作工作 [25] (註14)。

## 8. 早夭的英才

C. P. Ramanujam (1938~1974)、R. Narasimhan 與 S. Ramanan 都來自 Madras, 他們在 1957 年加入 TIFR 成為助理研究員 (博士班學生), 這時 Ramanujam 才 19 歲 (見本文第 5 節), 此後 R. Narasimhan 成為芝加哥大學教授, Ramanan 成為 TIFR 教授, Ramanujam 雖然成為 TIFR 教授, 卻飽受精神分裂症 (躁鬱症?) 的折磨, 在 1974 年服用安眠藥自殺。

Ramanujam 對於許多數學分支都有深刻的理解, 不管它是複雜的解析數論或是抽象的

Grothendieck 式的代數幾何 [19, p.257]。

Raghunathan 在 1960 年加入 TIFR, 他回憶說 [20, p.543], 我們這些博士生從 Ramanujam 那裡學到許多數學, 有些數學甚至遠離他的研究領域。「我們直到深夜還在討論數學。Ramanujam 除了數學之外, 還涉獵許多領域。」

Ramanujam 替一些知名的訪問教授作演講紀錄, 如: M. Deuring (1958~1959), I. R. Shafarevich (1964~1965, Minimal models), D. Mumford (1967~1968, Abelian varieties)。

1962 年 Ramanathan 引導 Ramanujam 從事 Waring problem 的研究, 他推廣 Davenport 的方法。1964 年他被診斷出嚴重的精神分裂症 (schizophrenia)。此後十年就是病痛與研究交織的日子。病症來的時候, 他變得精神抑鬱。病症去的時候, 他就有許多精采的研究成果。

1970~1971 年英國 Warwick 大學舉辦代數幾何會議, 這時正好是 Ramanujam 病症消失的時期, 他主持兩個很成功的研討會: étale cohomology 與代數曲面的分類。在會議期間, 他跟 Mumford 討論 Kodaira vanishing theorem 的一種形式, 這就是有些人稱為 Ramanujam vanishing theorem 的東西 (註15)。

此外 Ramanujam 另有一個有名的定理。他用拓樸的方法 (contractible 與 simply connected at infinity) 刻畫仿射平面  $\mathbb{C}^2$  [18, p.636]。

Ramanujam 得病之後, 他蒐集與這病症相關的許多文獻, 並且仔細研讀。最後他得到一個結論: 這病痛是治不好的。他因此走上自殺之路。

Ramanujam 去世兩年之後, TIFR 蒙受另一個損失。這次是 V. K. Patodi。

Vijay Kumar Patodi (1945~1976) 在 1967 年加入 TIFR, 他的指導教授是 M. S. Narasimhan 與 S. Ramanan。

在 1969 年底 Patodi 看到 McKean 與 Singer 合寫的一篇論文, 這篇論文用到 Minakshisundaram (見本文第 4 節開頭, 他是 K. A. Rau 的學生之一) 關於緊緻流形上 Laplace 算子的理論。這篇論文有一個尚未解決的猜想, 這個猜想的目的是想提供另一種證明 Gauss-Bonnet 定理的方法。Patodi 開始研究這個猜想。幾個月後, 他解決這個猜想, 他的論文《Curvature and the eigenvalue of the Laplace operator》在 J. Differential Geometry 出現。Singer 邀請他到 MIT 訪問, 他因此認識 Atiyah 與 Bott。

Patodi 繼續發展第一篇論文的方法, 他完成第二篇論文《An analytic proof of the Riemann-Roch-Hirzebruch theorem for Kähler manifolds》也在 J. Differential Geometry 刊登。1971 年他獲得博士學位。

1971~1973 年他到 Princeton 高等研究院 (IAS) 與 Atiyah 工作。Atiyah、Bott、Patodi 用 heat equation 的方法找到另一個 Atiyah-Singer Index Theorem 的證明 (Invent.

Math. 19 (1973) 279-330; *ibid* 28 (1975), 277-280)。

Patodi 是個耆那教徒 (Jain), 要遵守嚴格的飲食戒律。1976 年他獲升 TIFR 的教授。但是他的腎功能已衰竭到十分嚴重的情形。醫生爲他安排一個腎臟移植手術; 手術還沒進行, 他已病情惡化, 不治去世。

## 9. 展望

印度數學家沒有人得過 Fields Medal, 但是有兩位印度裔數學家得到 Fields Medal。他們是 Bhargava (ICM 2014) 與 Venkatesh (ICM 2018)。

Manjul Bhargava (1974.8.8) 出生於加拿大一個印度家庭, 但是在美國長大 (Long Island)。他的母親是 Hofstra 大學的數學家。他在 Harvard University 念完大學 (1996年), 在 Princeton 大學取得博士學位 (2001年), 指導教授是 Andrew Wiles, 他是證明 Fermat 最後定理的有名數學家。Bhargava 現在是 Princeton 大學的教授。

Bhargava 的博士論文推廣 Gauss 在二次型的合成方法 (*Higher composition law*)。在 2015 年他與 Arul Shankar 證明 BSD 猜想 (註16) 對於許多橢圓曲線是成立的。(橢圓曲線  $E_{A,B} : y^2 = x^3 + Ax + B$  是根據它的 height 編序的。) 見 *Ann. Math.* 181 (2015), 191-242; *ibid.* 181(2015), 587-621。Shankar 來自 Chennai (Madras), 是 Bhargava 的學生 (2012 年 Princeton 大學博士)。

Bhargava 是 TIFR 的兼任教授。他的祖父 Purushottam Lal Bhargava 是知名的梵文學者 (Sanskrit)。受祖父的影響 Bhargava 很喜歡梵語詩歌。

Akshay Venkatesh (1981.11.21) 出生於新德里 (New Delhi)。他兩歲時全家移民到澳大利亞。他的母親是 Deakin 大學的 computer science 教授。他在 Princeton 大學完成博士論文 (1988~2002 年), 指導教授是 Peter Sarnak。現在他是 Princeton 高等研究所 (IAS) 的教授。

Venkatesh 的研究主題是把解析數論、homogeneous dynamics、代數拓撲與表示論綜合起來。

Venkatesh 的工作不但解決過去長期無法解決的一些問題, 他還領先探討某幾個數學領域過去不爲人知的聯繫, 這爲未來的數學家開闢一個更開闊的天地。

印度自從 1947 年獨立之後, 政府挹注更多經費在科學研究。ISI 因此迅速擴張, 現在 ISI 在印度各地至少有 10 個分支機構: ISI Kolkata, ISI New Delhi 等, 並且它還擴及其他領域。此外印度政府建立許多以訓練工科學生爲主的 Indian Institute of Technology, 如 IIT Mumbai, IIT Chennai 等。近年這些 IIT 聘請許多美國、歐洲獲得博士學位的科學家與數學家, 使 IIT 從工科大學慢慢轉型爲綜合性大學。印度的科學研究人力大幅提升。

但是學術水平的躍進需要領導者的遠見與工作人員高昂的士氣。印度數學界在 1950 年代

挾印度獨立建國之後的新銳之氣，加上 Homi Bhabha、K. Chandrasekharan 的高瞻遠矚，以及一批年輕學生（如：M. S. Narasimhan、C. S. Seshadri、R. Narasimhan、S. Ramanan、Raghunathan 等）的努力，在短短二十年間建立國際聞名的數學中心。未來印度數學界能不能再造佳績，像是 1950~1970 年發展得那麼迅猛，則有待觀察。

## 後記

印度知名的數學家有兩個人本文沒有介紹：S. Chowla (1907~1995) 與 S. S. Abhyankar (1930~2012)。Abhyankar 是 Purdue 大學的代數幾何學者 [8]。Chowla 的專長是數論，是 1931 年 Cambridge 大學的博士，隨即回印度工作。1947 年印度與巴基斯坦分治，由於 Chowla 在 Lahore 工作，而該地劃歸巴基斯坦，Chowla 全家只好逃回 Delhi，再轉往美國。Chowla 的事蹟可見 [2], [20, p.531], [19, p.243]。

## 註釋

註1: 加爾各答位於印度北部，孟買在印度西海岸，邦加羅爾 (Bangalore) 在印度南部的德干高原。

加爾各答是 1772~1911 年英屬印度的首都。諾貝爾獎得主泰戈爾 (R. Tagore, 1861~1941, 1931 年文學獎)，C. V. Raman (1888~1970, 1930 年物理獎)，德雷莎修女 (Mater Teresia, 1910~1997, 1979 年和平獎)，都曾定居於加爾各答。

此外還有一個城市，馬德拉斯 (Madras, 現已改名為 Chennai) 與印度數學淵源頗深。馬德拉斯在印度東南海岸，知名的印度數學家 Srinivasa Ramanujan (1887~1920) 就是在馬德拉斯地區成長的。許多二十世紀的印度數學家都出身於南印度 (含 Madras, Bangalore)。

註2: Mahalanobis 在劍橋大學遇到數學家 Ramanujan (1887~1920)。Ramanujan 比他年長六歲，但是自理生活的能力很差，並且 Mahalanobis 比他早一年來劍橋，因此 Mahalanobis 告訴 Ramanujan 一些如何善用宿舍設備的知識 [15]。

Ramanujan 的專長是解析數論 (尤其是模形式)。Ramanujan 許多「定理」是怎麼來的，如何結合這些結果納入主流數學，對於許多人都是一個謎。有名的數學家 Mark Kac (1914~1984) 乾脆不稱他是天才 (genius)，而是魔術師 (magician) [20, p.526]。

Ramanujan 曾有個關於 tau 函數 ( $\tau$  function) 的猜想。定義 tau 函數  $\tau(n)$  如下：

$$q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n.$$

可以證明：(i) 如果  $m$  與  $n$  是互質整數，則  $\tau(mn) = \tau(m) \cdot \tau(n)$ ；(ii) 如果  $p$  是質數且  $r \geq 2$ ，則  $\tau(p^r) = \tau(p) \cdot \tau(p^{r-1}) - p^{11} \tau(p^{r-2})$ 。

Ramanujan 的猜想是：如果  $p$  是任意質數，則  $|\tau(p)| < 2p^{11/2}$ 。

這個猜想經過 Hans Petersson (1902~1984) 的推廣，就是所謂的 Ramanujan-Petersson 猜想。1974 年 Pierre Deligne (1944~，1974 年 Fields 獎得主) 完成 Weil 猜想的證明。從 Weil 猜想可以推導出 Ramanujan-Petersson 猜想。

註3: Biometrika 是統計學家 Karl Pearson (1857~1936, 任教於 University College, London) 在 1901 年創辦的期刊。推薦 Biometrika 給 Mahalanobis 的高中老師 Macaulay 也不是等閒之輩。Macaulay 是劍橋大學畢業的 (St. John's College), 他的第一階段與第二階段的 Math. Tripos 分別是第 8 名與第 7 名 (很好的成績!)

Macaulay 當時在 St Paul's School 教一班資優班學生，這些學生日後成名的有：John E. Littlewood (1885~1977) 與 G. N. Watson (1886~1965)。

Macaulay 在中學教書倒也自得其樂。平時他寫幾篇研究論文，他從來不跟別人談論這些論文的内容。

這些論文的内容涵蓋許多多項式的基本性質 (Lasker decomposition, Gröbner bases, Cohen-Macaulay rings), 可以說是現代交換代數的基礎知識。

1928年 Macaulay 被選為皇家學會會員 (Fellow of Royal Society)。對於一個高中教師，這是絕無僅有的殊榮。

註4: 印度的種姓制度 (Caste system) 有四種階級：最高等級是婆羅門 (Brahmin, 神職人員), 其次是刹地利 (Kshatriya, 武士), 第三等級是吠舍 (Vaishya, 農工商與手工業者), 最低階級是首陀羅 (Shudra, 奴隸), 此外還有一個賤民階級 (Untouchable)。

根據 C. R. Rao 的回憶 [3, p.334], 婆羅門與較低種姓的人不可來往：untouchability, unseeability。C. R. Rao 小學的同班同學大都是婆羅門，他們可以一起玩，但是他不能到他們家。因為他的功課很好，他被特許到同學家的庭院，但是不能進去住宅。他們也不可以用杯子盛水給他 (如果他碰觸杯子，這杯子就必須被敲碎)，他應該站得遠遠的，雙手承接潑過來的水。這就是 untouchability。

Unseeability 是指，較低種姓的人如果看到婆羅門在遠方走來，就應該躲起來，不可以被婆羅門看到 [3]。

註5: 巧合的是，另一個基本粒子 boson 也跟印度物理學家有關，這是用來紀念 S. N. Bose (1894~1974)。Bose 任教於加爾各答與達卡大學 (達卡 Dhaka 是現在孟加拉國的首都)。

註6: Allahabad 在 Kanpur 東南 200 哩，這是印度獨立後的首相尼赫魯 (Jawaharlal Nehru, 1889~1964) 的故鄉。2000 年印度政府成立的 Harish-Chandra Research Institute (HCI) 就在此地。

註7: Lorentz group 可定義如下。令  $V$  是實係數的 4 維向量空間,  $GL(V)$  是  $V$  到  $V$  的所有可逆的線性變換。對於任意的向量  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ , 定義其長度  $\|x\|$ , 即  $\|x\| = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ 。Lorentz groups 是  $GL(V)$  的子群  $\{T \in GL(V) : \text{對於任意向量 } x \in V, \|Tx\| = \|x\|\}$ 。

註8: Frank Nelson Cole (1861~1926) 任教於哈佛大學、密西根大學、哥倫比亞大學, 長期擔任美國數學會的秘書, 他的專長是群論與數論。Cole Prize in Algebra 頒給在代數與數論有傑出貢獻的論文作者, 如: L. E. Dickson (1928), H. S. Vandiver (1931), A. A. Albert (1934), C. Chevalley (1941), O. Zariski (1944), H. B. Mann (1946), R. Brauer (1949), P. Erdős (1951), Harish-Chandra (1946), J. Tate (1956)。

註9: Siegel 是評選委員會的主席 [20, p.533]。他並不喜歡 Bourbaki 式的數學。

註10: 此處採用 [11] 的解釋。[16] 另有一種說法; 據 Langlands 瞭解, Harish-Chandra 的父親的 last name 是 Chandrakishore。

註11: D. D. Kosambi 在 TIFR 的時間大致是 1946~1962, F. W. Levi 在 1948 年加入 TIFR, 1952 年回到德國 (Free University of Berlin, University of Freiburg)。

Levi (1888~1966) 在亞爾薩斯 (Alsace, 當時是德國領土) 出生, 是 Heinrich M. Weber 的學生 (U. Strasbourg 博士, 1911 年), 任教於萊比錫大學 (1922~1935)。因為他的祖先是猶太人, 1935 年他被納粹政權解除教職, 隨即移居加爾各答, 擔任 Univ. Calcutta 數學系系主任。他把當時在德國興起的抽象代數引入印度數學界。

Kosambi (1907~1966) 的研究專長是微分幾何和機率統計, 據說他是 Harvard 大學 Graustein 的學生。在 1959~1968 年之間他寫了三篇關於 Riemann hypothesis 的文章, 見 [6]。

註12: 瑞士的 ETH 是國際有名的大學, 德國的 Frobenius, Hurwitz (Hilbert 大學時代的老師), Weyl, Hopf 都在這裡任教。

註13: 根據 Raghunathan 的講法 [20, p.535], 在 1949 年 Bhabha 到 Princeton 聘請 KC 不久, 有一天 IAS 的教授 J. von Neumann 與 KC 在 IAS 附近散步。他們看到愛因斯坦 (A. Einstein) 與 Bhabha 遠遠地走來。Von Neumann 問 KC: 「聽說你接受 Bhabha 的聘請要到 TIFR?」他接著說: 「他是個很好的物理學家, 但是你可不要被他的欺負, 要據理力爭。」

註14: C. S. Seshadri 一直認為以印度人口之多, 卻只有 TIFR 及 ISI 這兩個機構可以在國際數學舞台嶄露身手, 領導者實不能辭其咎。他在 1984 年離開 TIFR, 到 Madras 大學另創一個數學中心, 這就是現在的 Chennai Mathematical Institute (CMI)。Ramanan 從 TIFR

退休之後，回到 Chennai (Madras)，任教於 CMI。

註15: Ramanujam vanishing theorem 的敘述如下。若  $X$  是平滑的複射影曲面， $L$  是  $X$  上的線叢滿足  $(L \cdot C) \geq 0$  且  $(L \cdot L) > 0$  ( $C$  是  $X$  上的曲線)，則  $H^i(X, L^{-1}) = 0$ ，當  $i \neq 2$ 。

這個定理後來被 Y. Kawamata 與 E. Viehweg 推廣到高維的情形。

註16: 關於 BSD 猜想 (Birch and Swinnerton-Dyer conjecture) 請參考《*The Millennium prize problems*》，Amer. Math. Soc., 2006。

## 參考文獻

1. G. Andrews and B. Berndt (editors), *Ramanujan's lost notebook*, Part I, II, III, IV, V, Springer-Verlag.
2. R. G. Ayoub, J. H. Huard and K. S. Williams, Sarvadaman Chowla (1907~1995), *Notices AMS*, 45 (1998), 594-598.
3. A. K. Bera, The ET interview: Professor C. R. Rao, *Econometric Theory*, 19 (2003), 331-400.
4. Bhatia (editor), *Connected at infinity: a selection of mathematics in India*, Hindustan Book Agency, 2003, New Delhi.
5. B. V. Bhat, A different kind of mind, K. R. Parthasarathy, Bhavana, vol.3, no. 2, 2019.
6. S. G. Dani, Kosambi: the mathematician, *Resonance*, June (2001), 514-528.
7. R. Gangolli, In memoriam: V. S. Varadarajan, *Resonance*, 2019, September.
8. S. R. Ghorpade, Remembering Shreeram S. Abhyankar, *Asia Pacific Math. Newsletter*, 3 (2013), no. 1, 22-30.
9. G. H. Hardy, *Ramanujan: twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, reprinted by AMS Chelsea Publ. 2002.
10. G. H. Hardy, etc. (editors), *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, reprinted by AMS Chelsea Publ. 2000.
11. R. Howe, Harish-Chandra (1923~1983), *Biographical Memoirs*, National Academy of Sciences U.S.A., 2011.
12. 康明昌。Egorov 與 Luzin。數學傳播季刊, 44(2), 18-31, 2020。
13. 康明昌。Bourbaki 與 André Weil。數學傳播季刊, 44(4), 3-20, 2020。
14. 康明昌。Jean Leray (1906~1998)。數學傳播季刊, 45(1), 3-16, 2021。
15. R. Kanigel, *The man who knew infinity*, Charles Scribner's, 1991, New York.
16. R. P. Langlands, Harish-Chandra, *Biog. Mem. FRS*, 31 (1985), 189-225.
17. MacTutor, History of Mathematics Archive,  
URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>
18. M. S. Narasimhan, Algebraic geometry in India, in “*Current Trends in Science*”, 2009 Special issue, Indian Academy of Science.
19. R. Narasimhan, The coming of age of mathematics in India, in “*Miscellanea Mathe-*

- matica*” edited by P. Hilton, F. Hirzebruch and R. Remmert, Springer-Verlag, 1991, Berlin.
20. M. S. Raghunathan, Artless innocents and ivory-tower sophisticates, *Current Science*, 85 (2003), 526-536.
  21. S. Ramanan, M.S. Narasimhan: the man and the mathematician- a personal perspective, *Asia Pacific Math. Newsletter*, 3(2013), no.2, 21-24.
  22. C. R. Rao, Statistics must have a purpose, the Mahalanobis dictum, *Sankhya* 55 (1993) Series A, 331-349.
  23. S. Rao (with M.S. Narasimhan), A versatile ace at bridge building, *Bhavana*, October, 2019; reprinted in *ICCM Notices*, 8(2020), no.2, 30-48.
  24. M. Raussen and C. Skau, Interview with Srinivasa Varadhan, *Notices AMS*, 53(2008), 238-246.
  25. C. S. Seshadri, M. S. Narasimhan and his work, in “*The Collected Papers of M. S. Narasimhan*”, 2007.
  26. V. S. Varadarajan, Harish-Chandra (1923~1983), *Math. Intelligencer*, 6 (1984), 9-13, 14.
  27. Wikipedia, available via Google.

—本文作者為台大數學系退休教授—