數學傳播 45卷2期, pp. 96-102

一道最小值問題的六種解法及推廣

鄒 峰·衛 鋒

本文就一道最小值問題, 運用局部不等式和均值不等式給出其六種解法, 其技巧性較强, 在此基礎上給出三個變式, 然後給出兩個推廣, 在推廣變形上得到 2018 年奧地利數學奧林匹克不等式試題和其推廣, 最後給出幾個結論, 希望給讀者學習與幫助。

問題呈現: (2018年南京師範大學附中等四校聯考高三數學調研試題第 14 題)

已知 $a>1$, $b>2$ 求 $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}$ 的最小值。

解法1: 易證, 當 $a>1$, $b>2$ 時, $\sqrt{a^2-1}\le\sqrt{2}a-1$, $\sqrt{b^2-4}\le\sqrt{2}b-2$, 事實上, 有

$$\sqrt{a^2-1}\le\sqrt{2}a-1\Leftrightarrow a^2-1\le 2a^2-2\sqrt{2}a+1\Leftrightarrow a^2-2\sqrt{2}a+2\ge 0\Leftrightarrow (a-\sqrt{2})^2\ge 0$$
$$\sqrt{b^2-4}\le\sqrt{2}b-2\Leftrightarrow b^2-4\le 2b^2-4\sqrt{2}b+4\Leftrightarrow b^2-4\sqrt{2}b+8\ge 0\Leftrightarrow (b-2\sqrt{2})^2\ge 0$$

所以 $\sqrt{a^2-1}\le\sqrt{2}a-1$, $\sqrt{b^2-4}\le\sqrt{2}b-2$, 取等號條件爲 $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$, 故

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}&\ge\frac{(a+b)^2}{(\sqrt{2}a-1)+(\sqrt{2}b-2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(a+b)^2}{a+b-\frac{3}{\sqrt{2}}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(t+\frac{3}{\sqrt{2}})^2}{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(t+\frac{9}{2t}+3\sqrt{2}\Big)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(2\sqrt{t\times\frac{9}{2t}}+3\sqrt{2}\Big)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 6\sqrt{2}=6,\end{aligned}$$

取等號條件爲 $t=a+b-\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, 即 $a+b=3\sqrt{2}$, 即 $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}\ge 6$, 當且僅當 $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$ 時取等號, 故 $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}$ 的最小值爲 6。

解法 1 的正切線法是證明不等式的一種重要方法, 其本質是將所考慮的函數用一次函數控

制, 通常該一次函數的圖象即爲原函數圖象在某點處的切線, 原函數的圖象恰好在切線的某一側, 且在切點處不等式等號成立, 從而得到局部不等式, 求和即能得到最終結論。

評注: 此解法先運用局部不等式—切線法的推導, 然後運用均值不等式求解。

解法 2: 設 $x=\sqrt{a^2-1}$, $y=\sqrt{b^2-4}$, 則

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}&=\frac{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4})^2}{x+y}=\frac{x^2+y^2+5+2\sqrt{(\sqrt{x^2+1})(\sqrt{y^2+4})}}{x+y}\\&=\frac{x^2+y^2+5+2\sqrt{x^2y^2+4x^2+y^2+4}}{x+y}\\&\geq\frac{x^2+y^2+5+2\sqrt{x^2y^2+4xy+4}}{x+y}\\&=\frac{x^2+y^2+2xy+9}{x+y}=\frac{(x+y)^2+9}{x+y}\geq\frac{6(x+y)}{x+y}=6,\end{aligned}$$

取等條件爲 $\begin{cases}x+y=3\\2x=y\end{cases}$, 即 $\begin{cases}\sqrt{a^2-1}=1\\\sqrt{b^2-4}=2\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=2\sqrt{2}\end{cases}$,

故當且僅當 $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$ 時, $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}$ 的最小值爲 6。

評注: 首先代數換元, 對根式平方後的處理, 然後兩次運用均值不等式, 從而獲解。

解法 3: 設 $x=\sqrt{a^2-1}$, $y=\sqrt{b^2-4}$, $x,y\in R^+$, 則

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}&=\frac{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4})^2}{x+y}\geq\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1+x)+\frac{1}{\sqrt{2}}(2+y)\right]^2}{x+y}\\&=\frac{(3+x+y)^2}{2(x+y)}\geq\frac{12(x+y)}{2(x+y)}=6,\end{aligned}$$

故當且僅當 $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$ 時, $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}$ 的最小值爲 6。

評注: 首先代數換元, 運用均值不等式 $\sqrt{x^2+1}\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+x)$ 和 $\sqrt{y^2+4}\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2+y)$, 技巧性較強, 然後運用均值不等式達到解題效果。

解法4:

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}&=\frac{(a+b)^2}{\sqrt{(a+1+b+2)(a-1+b-2)}}=\frac{(a+b)^2}{\sqrt{(a+b)^2-9}}\\&=\sqrt{(a+b)^2-9}+\frac{9}{\sqrt{(a+b)^2-9}}\\&\ge 2\sqrt{\sqrt{(a+b)^2-9}\times\frac{9}{\sqrt{(a+b)^2-9}}}=6,\end{aligned}$$

故當且僅當 $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$ 時, $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}$ 的最小值爲 6。

評注: 首先對分母中的根式平方差後運用均值不等式, 把問題轉化爲對勾函數求最小值問題; 對勾函數是一種類似於反比列函數的一般雙曲函數, 是形如 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ 的函數, 當 $x>0$ 時, $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ $(z>0,b>0)$ 有最小值, 也就是當 $x=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 時, $f(x)$ 取最小值。

解法5: 由柯西不等式易知 $\sqrt{AC}+\sqrt{BD}\le\sqrt{(A+B)(C+D)}$ $(A,B,C,D>0)$, 則

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}&=\frac{(a+b)^2}{\sqrt{(a+1)(a-1)}+\sqrt{(b+2)(b-2)}}\\&\ge\frac{(a+b)^2}{\sqrt{(a+1+b+2)(a-1+b-2)}}\\&=\frac{(a+b)^2}{\sqrt{(a+b)^2-9}}=\frac{t^2+9}{t}=t+\frac{9}{t}\ge 2\sqrt{t\times\frac{9}{t}}=6,\end{aligned}$$

其中 $t=\sqrt{(a+b)^2-9}$, 當且僅當 $\begin{cases}\sqrt{(a+b)^2-9}=3\\ \dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{b+2}{b-2}\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=2\sqrt{2}\end{cases}$, 故當且僅當 $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$ 時, $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}$ 的最小值爲 6。

評注: 此解法運用柯西不等式和對勾函數求最小值。

解法6: 如圖 1 所示, 在直線 l 上依次取點 P,O,Q, 使得 $\overline{OP}=1$, $\overline{OQ}=2$, $\overline{AP}$ 垂直於 $\overline{PQ}$ 且 $\overline{OA}=a$, $\overline{BQ}$ 垂直於 $\overline{PQ}$ 且 $\overline{OB}=b$, 四邊形 $APQA'$ 爲矩形。

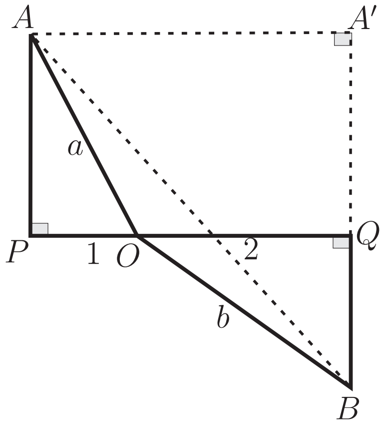

圖1

則 $\overline{AP}=\sqrt{a^2-1}$, $\overline{BQ}=\sqrt{b^2-4}$ 所以

$$\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}=\frac{(\overline{OA}+\overline{OB})^2}{\overline{AP}+\overline{BQ}}\geq\frac{(\overline{AB})^2}{\overline{A'B}}=\frac{(\overline{A'B})^2+9}{\overline{A'B}}=\overline{A'B}+\frac{9}{\overline{A'B}}\geq 6。$$

取等條件爲 A,O,B 三點共線且 $\overline{A'B}=3$, 即 $\begin{cases}b=2a\\ \sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}=3\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=2\sqrt{2}\end{cases}$,

故當且僅當 $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$ 時, $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}$ 的最小值爲 6。

評注: 此解法運用數形結合和對勾函數求最小值。

上述六種解法來求此題的最小值, 是訓練培養讀者思維靈活的一種手段, 通過“一題多解”的訓練能溝通知識之間的內在聯系, 提高讀者綜合運用所學的基礎知識和基本技能解決實際問題的能力, 逐步學會舉一反三的本領。一題多解可以拓寬思路, 增強知識間聯系, 學會多角度解題的方法和靈活的思維方式。

變式1: 若 $a>2$, $b>3$ 則 $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}}$ 的最小值爲 10。其解法可以運用上述六種解法完成, 供讀者完成, 筆者給出推廣如下:

推廣1: 已知 $a_1>b_1$, $a_2>b_2$ 且 a_1,a_2 爲變數, b_1,b_2 爲常數, 則 $\dfrac{(a_1+a_2)^2}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}+\sqrt{a_2^2-b_2^2}}$ 的最小值爲 $2(b_1+b_2)$。

證明: 設 $c_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}$, $c_2=\sqrt{a_2^2-b_2^2}$, $c_1,c_2\in R^+$, 則運用均值不等式得:

$$\begin{aligned}\frac{(a_1+a_2)^2}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}+\sqrt{a_2^2-b_2^2}}&=\frac{(\sqrt{c_1^2+b_1^2}+\sqrt{c_2^2+b_2^2})^2}{c_1+c_2}\ge\frac{\Big[\frac{1}{\sqrt{2}}(b_1+c_1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(b_2+c_2)\Big]^2}{c_1+c_2}\\&=\frac{(b_1+b_2+c_1+c_2)^2}{2(c_1+c_2)}\ge\frac{4(b_1+b_2)(c_1+c_2)}{2(c_1+c_2)}=2(b_1+b_2),\end{aligned}$$

當且僅當 $a_1=\sqrt{2}b_1$, $a_2=\sqrt{2}b_2$ 時, $\dfrac{(a_1+a_2)^2}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}+\sqrt{a_2^2-b_2^2}}$ 的最小值爲 $2(b_1+b_2)$。

證明2: 可参考圖 1, 在直線 l 上依次取點 P,O,Q, 使得 $\overline{OP}=b_1$, $\overline{OQ}=b_2$, $\overline{AP}$ 垂直於 $\overline{PQ}$ 且 $\overline{OA}=a_1$, $\overline{BQ}$ 垂直於 $\overline{PQ}$ 且 $\overline{OB}=a_2$, 四邊形 $APQA'$ 爲矩形。

則 $\overline{AP}=\sqrt{a_1^2-b_1^2}$, $\overline{BQ}=\sqrt{a_2^2-b_2^2}$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{(a_1+a_2)^2}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}+\sqrt{a_2^2-b_2^2}}&=\frac{(\overline{OA}+\overline{OB})^2}{\overline{AP}+\overline{BQ}}\ge\frac{(\overline{AB})^2}{\overline{A'B}}=\frac{(\overline{A'B})^2+(\overline{OP}+\overline{OQ})^2}{\overline{A'B}}\\&=\overline{A'B}+\frac{(b_1+b_2)^2}{\overline{A'B}}\ge 2(b_1+b_2)。\end{aligned}$$

取等條件爲 A,O,B 三點共線且 $\overline{A'B}=\overline{OP}+\overline{OQ}=b_1+b_2$,

即 $\begin{cases}a_2=b_2a_1\\ \sqrt{a_1^2-b_1^2}+\sqrt{a_2^2-b_2^2}=b_1+b_2\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a_1=\sqrt{2}b_1\\ a_2=2\sqrt{2}b_2\end{cases}$,

故當且僅當 $a_1=\sqrt{2}b_1$, $a_2=2\sqrt{2}b_2$ 時, $\dfrac{(a_1+a_2)^2}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}+\sqrt{a_2^2-b_2^2}}$ 的最小值爲 $2(b_1+b_2)$。

評注: 運用幾何概念來解題, 其根本是讓讀者更好地對根式 $\sqrt{a_1^2-b_1^2}$ 和 $\sqrt{a_2^2-b_2^2}$ 構造數形結合, 然後三點共線線段最短原理求最小值; 但其解法局限於推廣 1 問題。

當 $a_1=a+1$ $a_2=b+2$, $b_1=1$, $b_2=2$ 時, 則問題就是 2018 奧地利數學奧林匹克不等式題, 已知 $a,b\in R^+$, 則 $\dfrac{(a+b+3)^2}{\sqrt{a^2+2a}+\sqrt{b^2+4b}}\ge 6$, 取等號條件爲 $a=\sqrt{2}-1$, $b=2(\sqrt{2}-1)$。

變式2: 若 $a>1$, $b>3$, $c>5$, 則 $\dfrac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-9}+\sqrt{c^2-25}}$ 的最小值爲 18;

變式3: 若 $a>1$, $b>2$, $c>4$, 則 $\dfrac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-4}+\sqrt{c^2-16}}$ 的最小值爲 14;

其解法可以運用上述解法 1, 2, 3, 4, 5 完成, 供讀者完成, 筆者給出推廣如下:

推廣2: 已知 $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2, \ldots, a_n > b_n$ 且 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 變數, b_n 爲正項的等差數列或等比數列, 記數列 $\{b_n\}$ 的前 n 項和爲 s_n, 則 $\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}+\sqrt{a_2^2-b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2-b_n^2}}$ 的最小值爲 $2s_n$。

證明: 設 $c_1 = \sqrt{a_1^2-b_1^2}$, $c_2 = \sqrt{a_2^2-b_2^2}, \ldots, c_n = \sqrt{a_n^2-b_n^2}$, $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R^+$ 則運用均值不等式得:

$$\begin{aligned}
&\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}+\sqrt{a_2^2-b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2-b_n^2}} = \frac{(\sqrt{c_1^2+b_1^2}+\sqrt{c_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{c_n^2+b_n^2})^2}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\\
&\geq \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(b_1+c_1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(b_2+c_2)+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2}}(b_n+c_n)\right]^2}{c_1+c_2+\cdots+c_n} = \frac{(s_n+c_1+c_2+\cdots+c_n)^2}{2(c_1+c_2+\cdots+c_n)}\\
&\geq \frac{4s_n(c_1+c_2+\cdots+c_n)}{2(c_1+c_2+\cdots+c_n)} = 2s_n,
\end{aligned}$$

當且僅當 $a_1 = \sqrt{2}b_1$, $a_2 = 2\sqrt{2}b_2, \ldots, a_n = 2\sqrt{2}b_n$ 時,

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{\sqrt{a_1^2-b_1^2}+\sqrt{a_2^2-b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2-b_n^2}}$$

的最小值爲 $2s_n$。

幾個結論:

(1) 若 $b_i = i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 則 $\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{\sqrt{a_1^2-1}+\sqrt{a_2^2-4}+\cdots+\sqrt{a_n^2-n^2}}$ 的最小值爲 $n(n+1)$;

(2) 若 $b_i = i+1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 則 $\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{\sqrt{a_1^2-4}+\sqrt{a_2^2-9}+\cdots+\sqrt{a_n^2-(n+1)^2}}$ 的最小值爲 $n(n+3)$;

(3) 若 $b_i = i+k$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$, 則 $\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{\sqrt{a_1^2-(1+k)^2}+\sqrt{a_2^2-(2+k)^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2-(n+k)^2}}$ 的最小值爲 $n(n+2k+1)$;

(4) 若 $b_i = 2^{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 則 $\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{\sqrt{a_1^2-1}+\sqrt{a_2^2-4}+\cdots+\sqrt{a_n^2-(2^{n-1})^2}}$ 的最小值爲 $2(2^n-1)$;

當 $a_1=d_1+b_1,\ a_2=d_2+b_2,\ldots,a_i=d_i+b_i,\ b_i=i\ (i=1,2,\ldots,n)$, 則

$$\frac{\left[d_1+d_2+\cdots+d_n+\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{\sqrt{d_1^2+2d_1}+\sqrt{d_2^2+4d_2}+\cdots+\sqrt{d_n^2+2nd_n}}$$

的最小值爲 $n(n+1)$, 取等號條件爲 $d_1=\sqrt{2}-1,\ d_2=2(\sqrt{2}-1),\ldots,d_n=n(\sqrt{2}-1)$, 問題就是 2018 奧地利數學奧林匹克不等式題的推廣。

—本文作者鄒峰任教武漢職業技術學院商學院, 衛鋒任教山西忻州市第一中學校—