數學傳播　45卷2期, pp. 89-95

一個定理的初等證明及兩個幾何不等式的空間推廣

趙忠華

定理: 在表面積相同的所有四面體中, 以正四面體體積最大 [1]。

蘇化明老師給出了一個矩陣證明, 具體可見文獻 [1], 這種證明比較高端, 有沒有中學生能夠看懂的方法呢? 本文將試給出這個定理的一個初等證明:

首先需要以下引理:

引理1: 如果正四面體棱長爲 a, 則其體積 $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$ 特別地, 如果正四面體每個面的面積爲 S, 則 $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\Big(\dfrac{4\sqrt{3}S}{3}\Big)^{\frac{3}{2}}$。

引理的前半部分證明非常簡單, 從略。如果正四面體每個面的面積爲 S, 則每條棱長爲 $\sqrt{\dfrac{4\sqrt{3}S}{3}}$ 故正四面體體積 $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\Big(\dfrac{4\sqrt{3}S}{3}\Big)^{\frac{3}{2}}$。

引理2: 設 $\triangle ABC$ 的三邊長分別爲 a,b,c 面積爲 S, 則有 $(abc)^2\ge\dfrac{64\sqrt{3}}{9}S^3$ 等號當且僅當正三角形時成立。

證明: 我們先證明 $\sin A\sin B\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ 因爲

$$\begin{aligned}\sin A\sin B\sin C&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\sin C\le\frac{1}{2}(1+\cos C)\sin C\\&=2\cos^3\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(\sin A\sin B\sin C)^2&=4\cos^6\frac{C}{2}\sin^2\frac{C}{2}=\frac{4}{3}\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{C}{2}\cdot 3\sin^2\frac{C}{2}\\&\le\frac{4}{3}\left(\frac{\cos^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}+3\sin^2\frac{C}{2}}{4}\right)^4=\frac{4}{3}\Big(\frac{3}{4}\Big)^4=\Big(\frac{3}{4}\Big)^3.\end{aligned}$$

所以 $\sin A\sin B\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, 又由正弦定理得 $\dfrac{a}{2R}\dfrac{b}{2R}\dfrac{c}{2R}\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, 即

$$abc\le 3\sqrt{3}R^3=3\sqrt{3}\Big(\frac{abc}{4S}\Big)^3=3\sqrt{3}\cdot\frac{a^3b^3c^3}{64S^3},$$

從而有 $(abc)^2\ge\dfrac{64\sqrt{3}}{9}S^3$。

引理 3: 設 $a,b,c,d\in R^+$, 則

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\ge\frac{4}{3}.$$

證明: 由柯西不等式

$$(b+c+d+a+c+d+a+b+d+a+b+c)\Big(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+b+c}\Big)\ge 16,$$

於是

$$3(a+b+c+d)\Big(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+b+c}\Big)\ge 16,$$

於是

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\ge\frac{4}{3}.$$

引理 4: 如圖 1: 設四面體體積爲 V, 頂點 A_i, 所對各面面積分別爲 S_i $(i=1,2,3,4)$, 則 $S_1+S_2+S_3+S_4\ge 6\times 3^{\frac{1}{6}}V^{\frac{2}{3}}$.

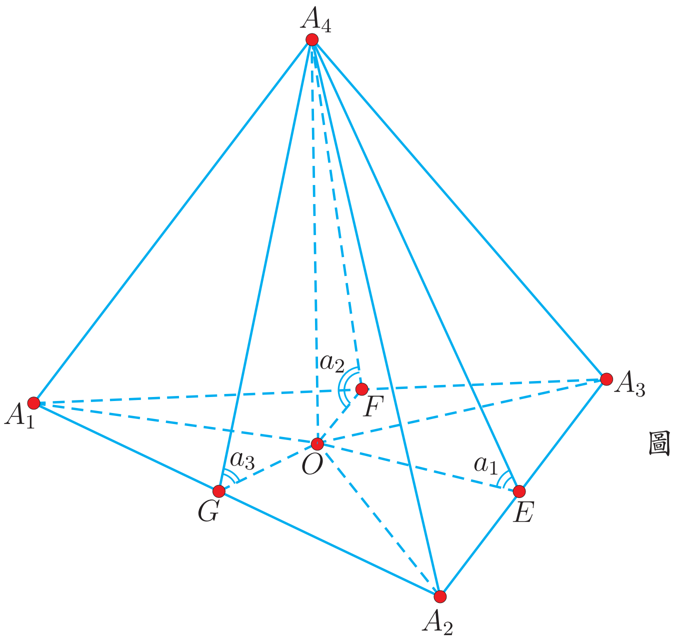

圖 1

證明: 過頂點 A_4 作 A_4O 垂直平面 $A_1A_2A_3$ 垂足爲 O, 過 O 點分別作 $OE\perp A_2A_3$, $OF\perp A_1A_3$, $OG\perp A_1A_2$, 垂足分別爲 E,F,G, 設二面角 $A_1-A_2A_3-A_4=\alpha_1$, $A_2-A_1A_3-A_4=\alpha_2$, $A_3-A_1A_2-A_4=\alpha_3$, 則

$$A_4O=A_4E\cdot\sin\alpha_1=\frac{2S_1}{A_2A_3}\cdot\sin\alpha_1,\ V=\frac{1}{3}S_4\cdot A_4O=\frac{1}{3}S_4\cdot\frac{2S_1\cdot\sin\alpha_1}{A_2A_3}=\frac{2S_1S_4\sin\alpha_1}{3A_2A_3},$$

於是

$$A_2A_3=\frac{2S_1S_4\sin\alpha_1}{3V},$$

同理

$$A_1A_3=\frac{2S_2S_4\sin\alpha_2}{3V},\quad A_1A_2=\frac{2S_3S_4\sin\alpha_3}{3V}.$$

由引理2: $(A_1A_2\cdot A_2A_3\cdot A_1A_3)^2\geq\frac{64\sqrt{3}}{9}S_4^3$, 得

$$(\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3)^{\frac{2}{3}}\geq\frac{3\sqrt{3}V^2}{(S_1S_2S_3)^{\frac{2}{3}}S_4},$$

於是

$$\sin^2\alpha_1+\sin^2\alpha_2+\sin^2\alpha_3\geq\frac{9\sqrt{3}V^2}{(S_1S_2S_3)^{\frac{2}{3}}S_4},\tag{1}$$

又 $S_1\cos\alpha_1+S_2\cos\alpha_2+S_3\cos\alpha_3=S_4$, 所以由柯西不等式得

$$(S_1^2+S_2^2+S_3^2)(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3)\geq(S_1\cos\alpha_1+S_2\cos\alpha_2+S_3\cos\alpha_3)^2=S_4^2,$$

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3\geq\frac{S_4^2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2},\tag{2}$$

(1)+(2) 得

$$\frac{9\sqrt{3}V^2}{(S_1S_2S_3)^{\frac{2}{3}}S_4}+\frac{S_4^2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}\leq 3,$$

同理

$$\frac{9\sqrt{3}V^2}{(S_1S_2S_4)^{\frac{2}{3}}S_3}+\frac{S_3^2}{S_1^2+S_2^2+S_4^2}\leq 3,$$

$$\frac{9\sqrt{3}V^2}{(S_1S_3S_4)^{\frac{2}{3}}S_2}+\frac{S_2^2}{S_1^2+S_3^2+S_4^2}\leq 3,$$

$$\frac{9\sqrt{3}V^2}{(S_2S_3S_4)^{\frac{2}{3}}S_1}+\frac{S_1^2}{S_2^2+S_3^2+S_4^2}\leq 3.$$

四式相加得

$$\frac{9\sqrt{3}V^2}{(S_1S_2S_3S_4)^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{1}{S_1^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{S_2^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{S_3^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{S_4^{\frac{1}{3}}}\right)+\Big(\frac{S_4^2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}+\frac{S_3^2}{S_1^2+S_2^2+S_4^2}+\frac{S_2^2}{S_1^2+S_3^2+S_4^2}+\frac{S_1^2}{S_2^2+S_3^2+S_4^2}\Big)\le 12,$$

而

$$\left(\frac{1}{S_1^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{S_2^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{S_3^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{S_4^{\frac{1}{3}}}\right)(S_1S_2S_3S_4)^{\frac{1}{12}}\ge 4,$$

由引理 3 得

$$\Big(\frac{S_4^2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}+\frac{S_3^2}{S_1^2+S_2^2+S_4^2}+\frac{S_2^2}{S_1^2+S_3^2+S_4^2}+\frac{S_1^2}{S_2^2+S_3^2+S_4^2}\Big)\ge\frac{4}{3},$$

由以上三式得

$$(S_1S_2S_3S_4)^{\frac{3}{2}}\ge\frac{3^7V^4}{64},$$

於是 $S_1+S_2+S_3+S_4\ge 4(S_1S_2S_3S_4)^{\frac{1}{4}}=4[(S_1S_2S_3S_4)^{\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{6}}\ge 6\sqrt[6]{3}V^{\frac{2}{3}}$, 引理 4 得證。

以下證明定理: 由引理4知 $S_1+S_2+S_3+S_4\ge 6\sqrt[6]{3}V^{\frac{2}{3}}$, 即

$$V\le\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{36}(S_1+S_2+S_3+S_4)^{\frac{3}{2}},$$

由引理1可知 $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{36}(S_1+S_2+S_3+S_4)^{\frac{3}{2}}$, 即爲每個面面積爲 $\dfrac{S_1+S_2+S_3+S_4}{4}$ 的正四面體體積, 於是定理得證。

我們知道, 三角形中有這樣兩個著名不等式:

1. Weitzenbock **不等式**: 設 a,b,c 分別表示 $\triangle ABC$ 的三邊長, S 表 $\triangle ABC$ 的面積, 則 $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$, 當且僅當 $a=b=c$ 時等號成立。[2]

證明: 由海倫公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (其中 p 是半周長), 又

$$(p-a)(p-b)(p-c)\le\Big(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\Big)^3=\Big(\frac{p}{3}\Big)^3,$$

因此 $S\le\sqrt{p\Big(\dfrac{p}{3}\Big)^3}=\dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$, 即 $(a+b+c)^2\ge 12\sqrt{3}S$, 又由柯西不等式得

$$3(a^2+b^2+c^2)=(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2\ge 12\sqrt{3}S,$$

於是 $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$。

2. Finsler-Hadwiger **不等式**: 設 a, b, c 分別表示 $\triangle ABC$ 的三邊長, S 表 $\triangle ABC$ 的面積, 則 $a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2 \geq 4\sqrt{3}S$, 當且僅當 $a=b=c$ 時等號成立。[2]

證明: 令 $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$, 這時

$$\begin{aligned}
&(a^2-(b-c)^2)+(b^2-(c-a)^2)+(c^2-(a-b)^2)\\
&\quad=4(p-b)(p-c)+4(p-a)(p-c)+4(p-a)(p-b)\\
&\quad=4(yz+zx+xy).
\end{aligned}$$

由海倫公式 $4\sqrt{3}S = 4\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)} = 4\sqrt{3(x+y+z)xyz}$, 這樣需證明 $xy+yz+zx \geq \sqrt{3(x+y+z)xyz}$, 平方後再化簡成爲 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq x^2yz+y^2xz+z^2xy$, 注意

$$x^2y^2+y^2z^2 \geq 2y^2xz, \qquad y^2z^2+z^2x^2 \geq 2z^2xy, \qquad z^2x^2+x^2y^2 \geq 2x^2yz,$$

三式相加得證。

本文試將其推廣到空間得:

定理1: 設四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱 $A_2A_4=a$, $A_3A_4=b$, $A_1A_4=c$, $A_1A_2=d$, $A_2A_3=e$, $A_1A_3=f$, 頂點 A_i 所對各面面積分別爲 S_i $(i=1,2,3,4)$, 體積爲 V, 則

$$\sum a^3 \geq 36\sqrt{2}V,$$

當且僅當四面體爲正時等號成立。(這裏 $\sum a^3=a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3$, 下同)

定理2: 設四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱 $A_2A_4=a$, $A_3A_4=b$, $A_1A_4=c$, $A_1A_2=d$, $A_2A_3=e$, $A_1A_3=f$, 頂點 A_i 所對各面面積分別爲 S_i $(i=1,2,3,4)$, 體積爲 V, 則

$$\sum a^2-\frac{1}{2}\sum(a-b)^2 \geq 12\sqrt[3]{9V^2},$$

(其中 $\sum a^2$ 意義同上, $\sum(a-b)^2$ 表示四面體所有相鄰棱差的平方和), 當且僅當四面體爲正時等號成立。

我們以下證明這兩個定理:

先證明定理1, 如圖2:

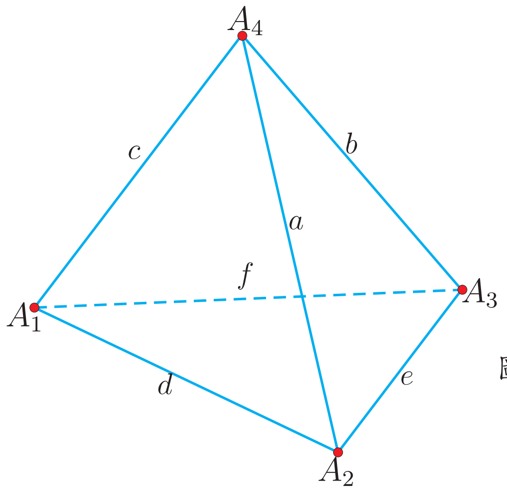

圖2

由 Weitzenbock 不等式可得

$$a^2+b^2+e^2\geq 4\sqrt{3}S_1,$$
$$b^2+c^2+f^2\geq 4\sqrt{3}S_2,$$
$$a^2+c^2+d^2\geq 4\sqrt{3}S_3,$$
$$d^2+e^2+f^2\geq 4\sqrt{3}S_4,$$

將上面四式相加得:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\geq 2\sqrt{3}(S_1+S_2+S_3+S_4).$$

由引理4得

$$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)^3\geq 24\sqrt{3}(S_1+S_2+S_3+S_4)^3\geq 24\times 648V^2,$$

由冪平均不等式

$$\Big(\frac{a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3}{6}\Big)^{\frac{1}{3}}\geq\Big(\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}{6}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

於是

$$\Big(\frac{a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3}{6}\Big)^{2}\geq\Big(\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}{6}\Big)^{3},$$

得

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3)^2\geq(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)^3\geq 24\times 648V^2,$$

兩邊開方即得 $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3\geq 36\sqrt{2}V$, 即 $\sum a^3\geq 36\sqrt{2}V$。當且僅當四面體爲正時等號成立, 命題得證。

下證明定理2:

證明: 同前假設, 由 Finsler-Hadwiger 不等式可得

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+e^2-(a-b)^2-(b-e)^2-(a-e)^2 &\geq 4\sqrt{3}S_1,\\
b^2+c^2+f^2-(b-c)^2-(c-f)^2-(b-f)^2 &\geq 4\sqrt{3}S_2,\\
a^2+c^2+d^2-(a-c)^2-(c-d)^2-(a-d)^2 &\geq 4\sqrt{3}S_3,\\
d^2+e^2+f^2-(d-e)^2-(e-f)^2-(d-f)^2 &\geq 4\sqrt{3}S_4,
\end{aligned}$$

將上面四式相加得:

$$\begin{aligned}
&2(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)\\
&\quad-[(a-b)^2+(b-e)^2+(a-e)^2+(b-c)^2+(c-f)^2+(b-f)^2+(a-c)^2\\
&\quad+(c-d)^2+(a-d)^2+(d-e)^2+(e-f)^2+(d-f)^2]\geq 4\sqrt{3}(S_1+S_2+S_3+S_4).
\end{aligned}$$

又 $S_1+S_2+S_3+S_4\geq 6\times 3^{\frac{1}{6}}\times V^{\frac{2}{3}}$, 所以

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)\\
&\quad-\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-e)^2+(a-e)^2+(b-c)^2+(c-f)^2+(b-f)^2+(a-c)^2\\
&\quad+(c-d)^2+(a-d)^2+(d-e)^2+(e-f)^2+(d-f)^2]\geq 12\sqrt[3]{9V^2},
\end{aligned}$$

定理2得證。

後來發現, 匡繼昌著《常用不等式》一書中已經有定理1, 但無定理2, 所以本文還是有一定意義。

參考文獻

1. 蘇化明。一個四面體問題的矩陣證明[J]。《曲阜師範大學學報 (自然科學版)》, 1987 (3), 101-106。
2. 匡繼昌著。常用不等式[M]。濟南：山東科學技術出版社, 2004.1。

—本文作者任教中國安徽省旌德中學—