數學傳播 45卷2期, pp. 83-88

變形式定圓運動 求最值動中取靜

張小川

定角對定邊類問題在各地的中考試題中屢見不鮮, 且多以壓軸題的形式出現, 在此基礎上, 進一步思考: 當問題中出現“定角定高”、“定角定中線”、“定角定角平分線”時, 又該如何轉化?

爲使讀者淸楚問題的背景, 先給出定角對定邊的基本問題。如圖 1, 線段 AB 的長是定長, 在平面內一點 C, $\angle ACB$ 度數爲定值, 則點 C 的運動軌跡是三角形 ABC 外接圓上的圓弧, 解決與之相關的問題, 通常做法是作出三角形 ABC 的外接圓 [1, 2], 外接圓的位置和半徑是固定不變的。這個結論在諸多文獻都有討論, 文獻 [1] 和文獻 [2] 說明了這種方法的正確性, 本文嘗試探索“定角定高求最值”、“定角定中線求最值”、“定角定角平分線求最值”的轉化思路。

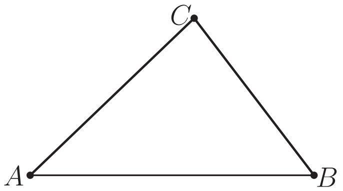

圖1

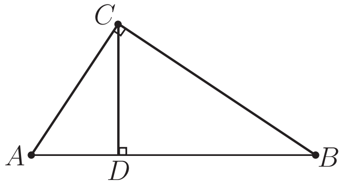

圖2

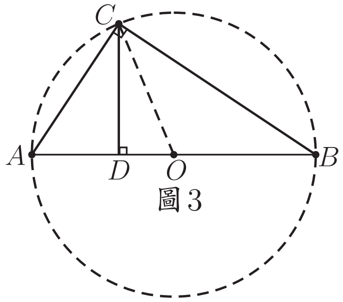

圖3

1. 定角定高求最值

1.1. 定角為直角

如圖 2, $\angle ACB = 90^\circ$ 恒定不變, 點 C 到直線 AB 的距離 $CD = a$ 爲定值, 角的兩邊與直線交於 A、B 兩點, 在 $\angle ACB$ 繞點 C 旋轉過程中, 求線段 AB 長度的最小值和 $\triangle ABC$ 面積的最小值。

分析: 如圖 3, 因爲 $\angle ACB = 90^\circ$ 保持不變, 容易想到作 $\triangle ABC$ 的外接圓 O, 設半徑爲 r。

在 $\angle ACB$ 繞點 C 旋轉的過程中, 外接圓 O 的位置和大小也隨之改變。

連接 OC, 則 $OC = r$, $AB = 2r$, 要計算 AB 的最小值, 可以計算 r 最小值。

在圓 O 的變化過程中, 始終有 $CD \leq CO$, 即始終有 $r \geq a$。

所以 $AB \geq 2a$, AB 的最小值爲 $2a$。

計算出 AB 的最小值後, 因爲 CD 的長度不變, 計算出 $\triangle ABC$ 面積的最小值爲 a^2。

1.2. 定角為銳角

如圖 4, $\angle ACB=\alpha$ 爲銳角且爲定值, $CD\perp AB$, $CD=a$ 爲定值, 在 $\angle ACB$ 繞點 C 旋轉過程中, 求 AB 的最小值和 $\triangle ABC$ 面積的最小值。

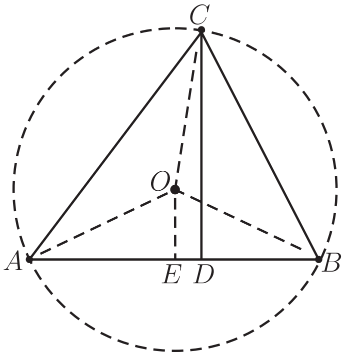

圖4

分析: 在定角爲直角時作出三角形的外接圓來探索解題思路, 定角爲銳角的情況下, 不妨也作出 $\triangle ABC$ 的外接圓 O, 設其半徑爲 r。

連接 OC, OA, OB, 則 $OA=OB=OC=r$, 可以在圓 O 中計算 AB 的最小值。

作 $OE\perp AB$, 根據垂徑定理, 有 $BE=\dfrac{1}{2}AB$, 只需要計算 BE 的最小值即可, 線段 BE 的長可以用外接圓半徑 r 表示爲 $BE=r\cdot\sin\alpha$, BE 的最小值轉化爲計算 r 的最小值。

在 $\angle ACB$ 繞點 C 旋轉過程中, 外接圓 O 的位置和半徑隨之變化, 在外接圓 O 變化的過程中總有 $OC+OE\geq CD$, $r+r\cdot\cos\alpha\geq a$,

有 $r\geq\dfrac{a}{1+\cos\alpha}$, 進而 $BE\geq\dfrac{a\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, 所以 $AB\geq\dfrac{2a\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, $S_{\triangle ABC}\geq\dfrac{a^2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$。

1.3. 定角為鈍角

如圖 5, $\angle ACB=\alpha$ 爲鈍角且爲定值, $CD\perp AB$, $CD=a$ 爲定值, 在 $\angle ACB$ 繞點 C 旋轉過程中, 求 AB 的最小值和 $\triangle ABC$ 面積的最小值。

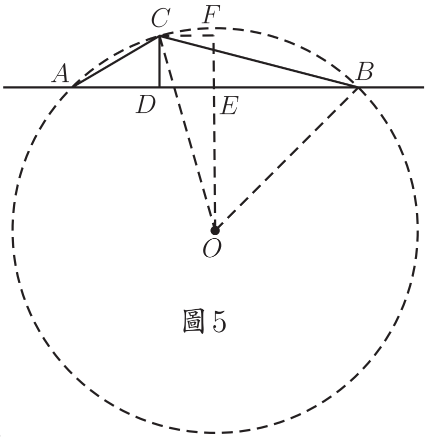

圖5

分析: 與前文定角爲直角和銳角的思路相同, 作出 $\triangle ABC$ 的外接圓 O, 其半徑爲 r, 如圖 5。

連接OB, OC, 則$OB=OC=r$, 作 $OE\perp AB$, 有 $BE=\dfrac{1}{2}AB$, 計算 AB 的最小值轉化爲計算 BE 的最小值, 由銳角三角函數計算出 $BE=r\cdot\sin(180^\circ-\alpha)$。

在圓 O 變化的過程中, 只需要計算出半徑 r 的最小值, 問題即可解決。

在圓 O 變化的過程中, $OE+CD\leq OC$, 過點 C 作 OE 延長線的垂線, 垂足爲 F, $OE+CD\leq OC$ 變化爲 $OF\leq OC$, 計算得 $r\cdot\cos(180^\circ-\alpha)+a\leq r$, 有

$r\geq\dfrac{a}{1-\cos(180^\circ-\alpha)}$。進而 $BE\geq\dfrac{a\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{1-\cos(180^\circ-\alpha)}$, 所以 $AB\geq\dfrac{2a\cdot\sin(180^\circ-\alpha)}{1-\cos(180^\circ-\alpha)}$,

$S_{\triangle ABC}\geq\dfrac{a^2\sin(180^\circ-\alpha)}{1-\cos(180^\circ-\alpha)}$。

明晰方法: 定角對定邊類問題一般的做法是作出三角形的外接圓, 定角定高求最值類問題, 也是作出三角形的外接圓, 但外接圓的半徑和位置是變化的, 在此變化過程中, 利用垂線段最短計算出外接圓半徑的最小值, 由半徑再計算出定角所對邊的最小值。圖 4 和圖 5 中, 因爲點 C 到 AB 的距離是定值, 當 AB 最小時, $\triangle ABC$ 的面積也最小。

2. 定角定中線求最值

2.1. 定角為直角

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90°$, 三角形的中線 CD 長度爲定值 a, 在 $\angle ACB$ 位置變化的過程中, 求 $\triangle ABC$ 面積的最大值。

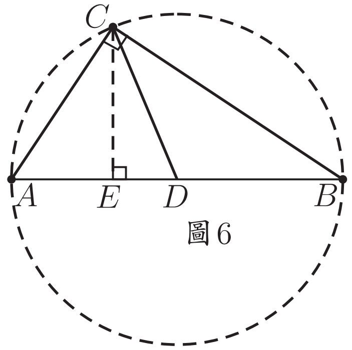

圖 6

分析: 因爲 $\angle ACB$ 恒爲 $90°$, 作出 $\triangle ABC$ 的外接圓 D, 點 C 在圓 D 上運動, $DC = r$, 如圖 6。

在直角三角形 $\triangle ABC$ 中, 斜邊上的中線 $CD = a$ 爲定值, 則 $AB = 2a$ 爲定值, 計算 $\triangle ABC$ 面積的最大值, 只需要求出 AB 邊上的高 CE 的最大值。

在 $\angle ACB$ 在圓 O 上運動過程中, 總有 $CD \geq CE$, 也就是始終有 $CE \leq a$, CE 的最大值爲 a。所以 $\triangle ABC$ 面積的最大值爲 a^2。

2.2. 定角為銳角

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = \alpha$ 爲銳角且是定值, 三角形的中線 CD 長度爲定值 a, 在 $\angle ACB$ 位置變化的過程中, 求 $\triangle ABC$ 面積的最大值。

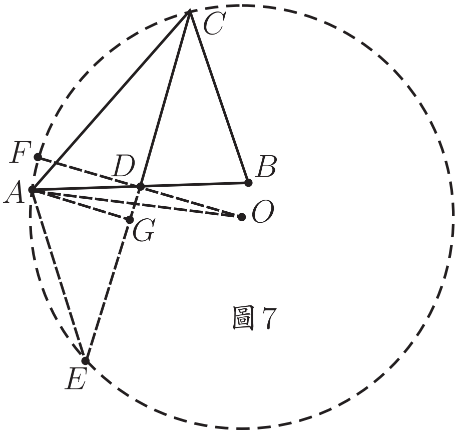

圖 7

分析: 如圖 7, 因爲中線 CD 的長度爲定值, 可以想到延長 CD 到 E, 使得 $CD = DE$, 連接 AE, 有 $\triangle BCD \simeq \triangle AED$, $\triangle ABC$ 等積變形爲 $\triangle ACE$。

在 $\triangle ACE$ 中, $\angle CAE = 180 - \alpha$ 爲定值, $CE = 2a$ 爲定值, 轉化爲定角對定邊類問題, 作出 $\triangle ACE$ 的外接圓 O, 連接 OA, $OA = r$; 連接 OD 有 $OD \perp CE$。

因爲線段 CE 的長度爲 $2a$, 作出 CE 上的高 AG, 在 $\angle ACB$ 位置變化的過程中, $\angle ACB = \alpha$ 始終不變, $\angle CAE = 180 - \alpha$ 始終不變。在圓 O 變化過程中, 有 $OA \geq OD + AG$, 觀察圖 11 發現 $AG//CD$, 延長 OD 後作 $AF \perp OD$, 就可以將線段 AG 和線段 OD 合併成爲線段 OF。

所以 $OA \geq OF$, 即 $r \geq AG + OD$。

根據垂徑定理可以計算出 $OD = \dfrac{a}{\tan\alpha}$, $r = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, 所以 $AG \leq \dfrac{a}{\sin\alpha} - \dfrac{a}{\tan\alpha}$。

所以 $\triangle ACE$ 的面積最大值爲 $a^2\Big(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\tan\alpha}\Big)$, $\triangle ABC$ 的面積最大值爲 $a^2\Big(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\tan\alpha}\Big)$。

2.3. 定角為鈍角

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=\alpha$ 爲鈍角且是定值, 三角形的中線 CD 長度爲定值 a, 在 $\angle ACB$ 位置變化的過程中, 求 $\triangle ABC$ 面積的最大值。

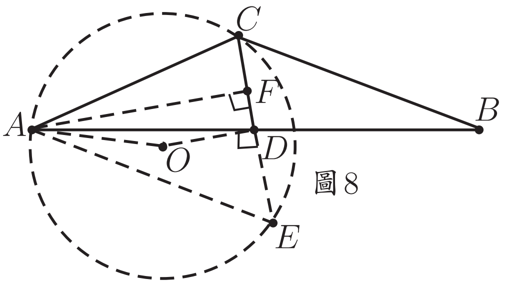

圖8

分析: 如圖 8, 與 2.2 思路類似, 先倍長中線 CD 到 E, 連接 AE。作出 $\triangle ACE$ 的外接圓 O, 連接 OA 和 OD, 則 $OA=r$, $OD\perp CE$, 且有 $r=\dfrac{a}{\sin(180^\circ-\alpha)}$。

計算 $\triangle ABC$ 的面積轉化爲 $\triangle ACE$ 的面積, 作 $AF\perp CE$ 於 F。

在圓 O 變化的過程中, 總有 $OA+OD\geq AF$, $r+r\cdot\cos(180^\circ-\alpha)\geq AF$, 得

$$AF\leq\frac{a\cdot[1+\cos(180^\circ-\alpha)]}{\sin(180^\circ-\alpha)},\ 有\ S_{\triangle ACE}\leq\frac{a^2\cdot[1+\cos(180^\circ-\alpha)]}{\sin(180^\circ-\alpha)}.$$

所以 $\triangle ABC$ 面積的最大值爲 $\dfrac{a^2\cdot[1+\cos(180^\circ-\alpha)]}{\sin(180^\circ-\alpha)}$。

明晰方法: 定角定中線類問題, 通過倍長中線, 將原三角形等積變形, 變形後的新三角形是定角對定邊三角形, 作出新三角形的外接圓後, 在圓 O 變化過程中, 根據垂線段最短可以求出新三角形底邊上高的最大值, 進而能求出新三角形面積的最大值, 也就是原三角形面積的最大值. 圖 13 中, 在 $\triangle ABC$ 轉化爲 $\triangle ACE$ 後, 屬於定角對定邊問題, 在文獻 [3] 中提及可以求出 $AE+AC$ 的最大值 [3], 而 $AE=CB$, 所以在定角定中線的原問題中, 不僅可以求出 $\triangle ABC$ 的面積最大值, 還可以求出 $CA+CB$ 的最大值 $2a\sqrt{\dfrac{2}{1-\cos(180^\circ-\alpha)}}$。

3. 定角定角平分線求最值

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=\alpha$ 爲銳角且是定值, 角平分線 CD 的長度爲定值 a, 在 $\angle ACB$ 位置變化的過程中, 求 $CA+CB$ 的最小值和 $\triangle ABC$ 面積的最小值。

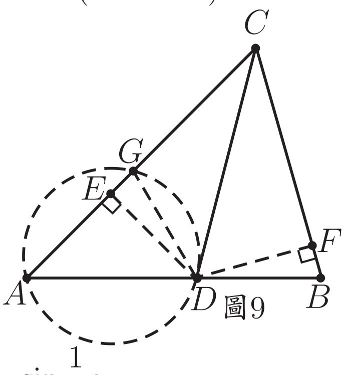

圖9

分析: 如圖 9, 因爲 CD 是角平分線, 可以想到過點 D 作 $DE\perp AC$, $DF\perp CB$, 垂足分別爲 E、F, 有 $\triangle CDE\simeq\triangle CDF$, $CE=CF=a\cdot\cos\dfrac{1}{2}\alpha$, $DE=DF=a\cdot\sin\dfrac{1}{2}\alpha$。

現在只需要計算 $AE+BF$ 的最小值。

線段 AE 和 BF 不在同一直線上, 故, 在 EC 上截取 $EG=BF$, 得到 $AG=AE+BF$, $\triangle DGE\simeq\triangle DBF$, 進而 $\angle GDE=\angle BDF$, 所以 $\angle ADG=\alpha$。

在 $\triangle ADG$ 中, $\angle ADG=\alpha$ 爲定值, $DE\perp AG$, $DE=a\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha$ 爲定值, 問題轉化爲定角定高問題, 根據前文 1.2 的敘述, 容易計算出 AG 的最小值, 進而可以計算出 $CA+CB$ 的最小值, 餘下的計算與 1.2 類似, 略。

明晰方法: 從以上的分析過程看出, 在解答定角定角平分線求最值時, 根據角平分線的性質將問題轉化爲定角定高類問題, 定角定高類問題前文已經分爲"定角爲直角"、"定角爲銳角"、"定角爲鈍角"三種情況詳細敘述, 在此只給出定角定角平分線問題中定角爲銳角的情況, 其餘的兩種情況, 有興趣的讀者可自行補充。

4. 聯繫與區別

從前文的敘述和"明晰方法"知道, 與"定角對定邊"有關的問題, 通常是作出三角形的外接圓, 且外接圓的位置和半徑是固定的; 與"定角定高"、"定角定中線"、"定角定角平分線"有關的問題也是作出三角形的外接圓, 但此時外接圓的位置和半徑是變化的, 在動態的變化中, 利用垂線段最短求最值。"定角定中線"類問題通過倍長中線將原問題轉化爲"定角對定邊"問題;"定角定角平分線"類問題通過作角兩邊的垂線, 轉化爲"定角定高"類問題。這兩類問題的轉化時所用到的輔助線都是常見的輔助線, 解法比較自然。輔助線的不同引起轉化後的問題類型不同, 不同輔助線是由原問題中不同的條件產生, 所以這兩類問題有明顯的區別, 不能一概而論。

5. 應用

例1(2019**陝西中考壓軸題**): 如圖 10, 有一座塔 A, 按規劃, 要以塔 A 爲對稱中心, 建一個面積盡可能大的形狀爲平行四邊形的景區 $BCDE$。根據實際情況, 要求頂點 B 是定點, 點 B 到塔 A 的距離爲 50 米, $\angle CBE=120°$。那麼是否可以建一個滿足要求的面積最大的平行四邊形景區 $BCDE$? 若可以, 求出滿足要求的平行四邊形 $BCDE$ 的最大面積; 若不可以, 請說明理由。(塔 A 的占地面積忽略不計)

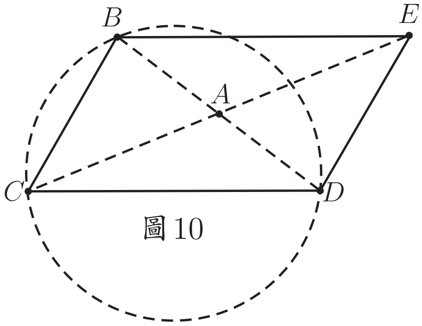

圖 10

分析: 如圖 10, 因爲點 A 爲平行四邊形 $BCDE$ 的對稱中心, 所以點 A 是 BD 和 CE 的交點。在 $\triangle CBE$ 中, $\angle CBE=120°$, 中線 $BA=50$, 是定角定中線問題。

因爲 $\angle CBE=120°$ 恒定不變, 所以 $\angle BCD=60°$ 恒定不變; 因爲 BA 長度是 50,

所以 BD 長度是 100 恒定不變。在 $\triangle BCD$ 中, $\angle BCD$ 是定角, 線段 BD 是定線段, 計算出 $\triangle BCD$ 的面積最大值, 就可以得出平行四邊形 $BCDE$ 的面積最大值。

要計算 $\triangle BCD$ 的面積最大值, 可以作出 $\triangle BCD$ 的外接圓, 下面的計算過程較易, 略。

例2 (2018**成都中考第**27**題**): 在直角三角形 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90°$, $AB=\sqrt{7}$, $AC=2$, 過點 B 作直線 $m//AC$, 將 $\triangle ABC$ 繞點 C 順時針得到 $\triangle A'B'C$ (點 A, B 的對應點分別爲 A', B') 射線 CA', CB' 分別交直線 m 於點 P, Q。

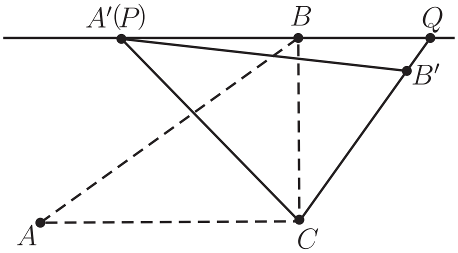

圖 11

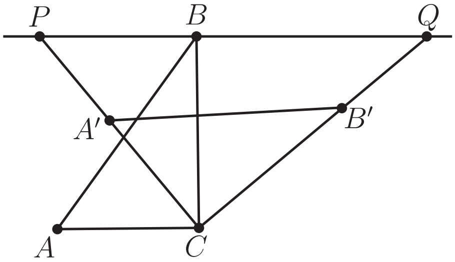

圖 12

(1) 如圖 11, 當 P 與 A' 重合時, 求 $\angle ACA'$ 的度數;

(2) 如圖 12, 設 $A'B'$ 與 BC 的交點爲 M, 當 M 爲 $A'B'$ 的中點時, 求線段 PQ 的長;

(3) 在旋轉過程時, 當點 P, Q 分別在 CA', CB' 的延長線上時, 試探究四邊形 $PA'B'Q$ 的面積是否存在最小值。若存在, 求出四邊形 $PA'B'Q$ 的最小面積; 若不存在, 請說明理由。

分析: (1)(2) 略。

(3) 因爲 $\triangle A'B'C$ 的面積是定值, 計算四邊形 $PA'B'Q$ 的最小面積可以通過計算 $\triangle CPQ$ 的面積最小值得出。

$\angle PCQ$ 的度數是定值, 點 C 到直線 PQ 的距離是定值, 這是定角定高問題, 在 $\triangle ABC$ 繞點 C 旋轉過程中, 線段 PQ 的長度存在最小值。

如圖 13 作出 $\triangle CPQ$ 的外接圓 O, 連接 OC, $OC=r$, $PQ=2r$。PQ 的最小值轉化爲 OC 的最小值, 也就是圓 O 半徑的最小值, 在 $\triangle ABC$ 繞點 C 旋轉過程中, 始終有 $CO\geq CB$。接下來的計算, 略。

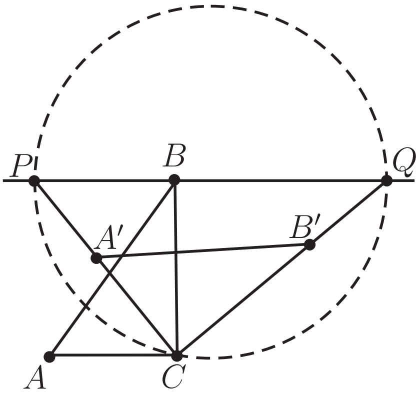

圖 13

參考文獻

1. 邵新虎。利用幾何畫板探究定弦對定角的頂點軌跡。中學數學教學參考, 2016(10), 23-24。
2. 鄭瑞。四點共圓判定定理的直接證明。中小學數學, 2019(6), 19-21。
3. 鄧文忠。利用圓的一個結論求兩線段和的最大值。中學數學雜誌, 2017(8), 38-40。

—本文作者任教中國山東高青縣實驗中學—