數學傳播 45卷2期, pp. 81-82

蜜蜂問題與無窮級數

範花妹 · 秦慶雄

這是關於 20 世紀最傑出的數學家馮 · 諾伊曼 (John von Neumann, 1903∼1957) 的一段軼事, 相信大多數讀者都知道。

馮 · 諾伊曼不僅頭腦敏銳, 而且心算能力也異於常人。常常有人向他提出茶餘飯後的趣題, 作爲遊戲, 看他如何作答。據說有一次有人向他提出這樣的一個問題：

兩列火車 A、B 相距 200 公里相向而行, 它們時速均爲 50 公里。一隻時速 75 公里的蜜蜂從火車 A 飛向火車 B, 碰到火車 B 便轉頭飛向火車 A, 碰到火車 B 便轉頭飛向火車 A, 如此這般來回穿梭, 直到兩列火車相遇, 問：蜜蜂一共飛了多少公里?

據說那人剛說完了題目, 馮 · 諾伊曼想了一想便回答：「150公里。」對方便說 :「哦, 你一定曾經碰到過這個問題, 而且曉得解題的捷徑!」馮 · 諾伊曼有點愕然：「什麼捷徑? 我只是計算蜜蜂來來回回每次飛多遠, 把它加起來, 求一個無窮級數的和而已。」

快捷解法: A、B 兩列火車相遇需要時間：$\dfrac{200}{50+50}=2$ (小時), 這期間蜜蜂一直在飛, 所以它飛了 2 小時, 因而蜜蜂一共飛了 $2\times 75=150$ (公里)。

那馮 · 諾伊曼無窮級數求和的方法又是如何?

級數解法: 蜜蜂開始從 A 出發首次與 B 相遇用時 $\dfrac{200}{75+50}=\dfrac{8}{5}$ 小時, 行程 $75\times\dfrac{8}{5}=120$ 公里, 此時兩車相距 $200-\dfrac{8}{5}\times(50+50)=40$ 公里, 即原來距離的 $\dfrac{1}{5}$。

蜜蜂再由 B 折返 A 時, 只飛行原來距離的 $\dfrac{1}{5}$。而且每次蜜蜂折返時, 都只飛行了它在上一次飛行距離的 $\dfrac{1}{5}$。依此分析, 蜜蜂在兩車相遇時共飛行:

$$120+\frac{1}{5}\times 120+\frac{1}{5^2}\times 120+\cdots=120\Big(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\Big).$$

仔細看上述式子, 你會發現括弧內是一個無窮等比級數。馮 · 諾伊曼是如何把這個公比爲 $\dfrac{1}{5}$ 的無窮等比級數加起來的呢?

如圖 1 所示, 是一個把 $1+r+r^2+r^3+\cdots$ 加起來的辦法, 式中 $0<r<1$。

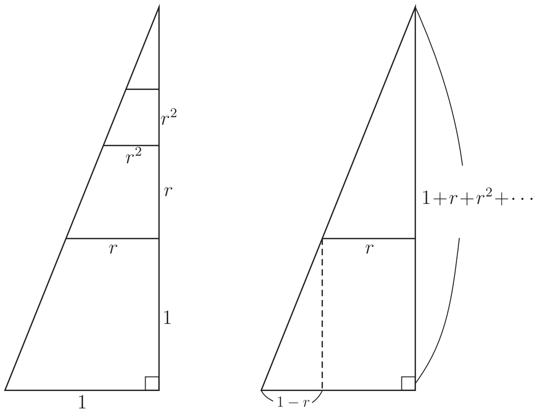

圖1

從圖 1 右圖中的相似三角形, 可以看出 $1+r+r^2+r^3+\cdots=\dfrac{1}{1-r}$, 這正是無窮等比級數的求和公式。把 $1+r+r^2+r^3+\cdots$ 加起來, 還可以通過一個簡單的技巧算出: 記

$$S=1+r+r^2+r^3+\cdots. \tag{1}$$

將 (1) 式兩邊同乘以 r, 得到

$$rS=r+r^2+r^3+r^4+\cdots. \tag{2}$$

用 (1)$-$(2), 得

$$(1-r)S=1,\ 因此,\ \ S=\frac{1}{1-r}.$$

所以, $1+r+r^2+r^3+\cdots=\dfrac{1}{1-r}$, 其中 $0<r<1$。

從而, 蜜蜂在兩車相遇時共飛行 : $120\times\left(1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}+\cdots\right)=120\times\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{5}}=150$(公里)。

從上述分析過程可以看出, 如果你直接從蜜蜂往返飛行的路程去求解, 那就很複雜了; 而間接用蜜蜂飛行的時間去求解, 就非常簡單。

此題也說明, 每個人的思考方式和路徑不一定相同, 無需強迫人人都用同一種方法去解決問題。

參考文獻

1. 張海潮著。當火車撞上蘋果: 走近愛因斯坦和牛頓。三民書局, 2020年。

—本文作者任教雲南省大理州漾濞縣第一中學 (高中部)—