數學傳播　45卷2期, pp. 76-80

“光棍數”的數論性質和分數小數互化問題討論

李織蘭・蔣曉雲*

摘要: 分數與小數互化問題包括“分數化爲小數”和“小數化爲分數”兩大部分。“分數化爲小數”研究的文獻資料不多, 已有的文獻資料中的證明用了大量的整除性理論的知識, 證明過程相對比較複雜。本文對“光棍數”的數論性質進行了研究, 並利用“光棍數”這些性質簡化了“分數化爲小數”的證明過程, 還得到“循環節的長度只與分母有關, 與分子完全無關”, “循環節的長度就不會超過分母的長度”等循環節長度研究的結論。

關鍵字: 光棍數, 分數與小數互化, 循環節。

每年的 11 月 11 日被年輕人稱爲光棍節, 它已成爲中國特有的娛樂性節日。作爲數學工作者, 我們可以把“1、11、111、1111、$\cdots$”這樣的全部由阿拉伯數字 1 構成的十進位制自然數, 定義爲“光棍數”(英文叫“repunit number”, 可翻譯爲“疊一數”)。

如果光棍數由 n 個 1 組成, 我們稱這個光棍數 $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}1}$ 的長度爲 n。

1. 關於光棍數的數論性質

命題 1: 任何一個不含有質因數 2 和 5 的數 m 都存在一個光棍數倍數。

證明: 將 $m+1$ 個光棍數 1, 11, 111, $\ldots$, $\underbrace{11\cdots1}_{m+1\text{個}1}$ 模 m 取餘數, 由抽屜原理, 一定存在兩個數 $\underbrace{11\cdots1}_{j\text{個}1}$, $\underbrace{11\cdots1}_{k\text{個}1}$, 除以 m 後所得餘數相同 (不妨設 $1\le j<k\le m+1$), 從而 $\underbrace{11\cdots1}_{k\text{個}1}-\underbrace{11\cdots1}_{j\text{個}1}$ 模 m 取餘數爲 0, 即 $\underbrace{11\cdots1}_{k-j\text{個}1}\underbrace{00\cdots0}_{j\text{個}0}=\underbrace{11\cdots1}_{k-j\text{個}1}\times10^j$ 能被 m 整除。

*通訊作者: 蔣曉雲

而 $10^j = 2^j \times 5^j$, 2與5 是質數且不是 m 的因數, 由質數的性質有: 2 和 5 都與 m 互質, 由互質的性質有: $2^j \times 5^j$與m 互質, 即 10^j 與 m 互質, 由互質的性質 $\underbrace{11\cdots1}_{k-j\text{ 個 }1}$ 能被 m 整除。即存在 $1 \le n = k-j < k$, $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{ 個 }1}$ 是 m 的倍數, 命題得證 □

從證明過程有 $1 \le j < k \le m+1$, 可以將命題 1 的結論強化得:

推論 1: 任何一個不含有質因數 2 和 5 的數 m 都存在長度不超過 m 的光棍數倍數。

命題 2: 任何一個不含有質因數 2 和 5 的數 m 都存在一系列 (無窮多) 光棍數倍數。

證明: 若 m 的光棍數的倍數中長度最小的是 d, 則長度爲 $2d, 3d, 4d, \ldots$ 的光棍數均爲 m 的倍數。

去掉題設要求 m 不含質因數 2 和 5, 我們可得到所有正整數的一條性質:

命題 3: 任何一個正整數 m, 如果將其分解 $m = 2^k \cdot 5^l \cdot C$ (其中 C 不含質因數 2 和 5), 記質因數 2, 5 的較高次數爲 $s = \max(k, l)$, 則 m 存在形如 $11\cdots100\cdots0$ 的倍數, 其中 1 的個數在 C 個以內, 0 的個數爲 s。

證明: $m = 2^k \cdot 5^l \cdot C$ (其中 C 不含質因數 2 和 5), 由命題 1, 一定存在一個光棍數 $P = \underbrace{11\cdots1}_{d\text{ 個 }1}$ 爲 C 的倍數, 顯然 $Q = 2^s \cdot 5^s$ 是 $2^k \cdot 5^l$ 的倍數, 所以 $P \times Q = \underbrace{11\cdots1}_{d\text{ 個 }1} \times (2^s \cdot 5^s) = \underbrace{11\cdots1}_{d\text{ 個 }1}\underbrace{00\cdots0}_{s\text{ 個 }1}$ 爲 m 的倍數。

推論 2: 任何一個正整數 m, 如果將其分解 $m = 2^k \cdot 5^l \cdot C$ (其中 C 不含質因數 2 和 5), 記質因數 2, 5 的較高次數爲 $s = \max(k, l)$, 則 m 存在形如 $11\cdots100\cdots0$ 的一系列 (無窮多) 的倍數, 其中最短的是 d 個 1, s 個 0 組成 (d 不大於 C), 則 1 的個數可以爲 $2d$, $3d$, $\ldots$, kd, $\cdots$ 直到無窮, 同時 0 的個數爲 s 的任何數 $11\cdots100\cdots0$ 均爲 m 的倍數。

2. 關於分數與小數互化問題的討論

2.1. 小數化為分數

任何一個小數都可以化成一個分數。

(1) 有限小數 $a.a_1a_2\cdots a_n$ 化爲分數比較簡單, 有 n 位小數就向右移動 n 位小數點, 得出整數作爲分子, 10^n 作爲分母, $a.a_1a_2\cdots a_n = \dfrac{aa_1a_2\cdots a_n}{10^n}$, 然後在進行約分化簡。

(2) 純循環小數 $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}=0.a_1a_2\cdots a_na_1a_2\cdots a_n\cdots a_1a_2\cdots a_n\cdots$, 我們可以把它看成無窮級數。

$$\begin{aligned}0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}&=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n}+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^{2n}}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^{kn}}+\cdots\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^{kn}},\end{aligned}$$

求其和爲：$\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n-1}$, 所以 $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}=\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 個 }9}}$。

以循環節爲分子, 以和循環節數字個數相同的 9 所組成的數爲分母, 再把這個分數進行約分化簡, 就得到了該純循環小數所對應的分數。

例如: $0.\overline{2}=\dfrac{\overbrace{2}^{\text{循環組}}}{\underbrace{9}_{1\text{ 個 }9}}$, $0.\overline{3}=\dfrac{\overbrace{3}^{\text{循環組}}}{\underbrace{9}_{1\text{ 個 }9}}=\dfrac{1}{3}$, $0.\overline{73}=\dfrac{\overbrace{73}^{\text{循環組}}}{\underbrace{99}_{2\text{ 個 }9}}$, $0.\overline{1357}=\dfrac{\overbrace{1357}^{\text{循環組}}}{\underbrace{9999}_{4\text{ 個 }9}}$。

(3) 混循環小數

$$\begin{aligned}a.b_1b_2\cdots b_k\overline{a_1a_2\cdots a_n}&=a+0.b_1b_2\cdots b_k+\frac{1}{10^k}\times0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}\\&=a+\frac{b_1b_2\cdots b_k}{10^k}+\frac{1}{10^k}\times\frac{a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 個 }9}}.\end{aligned}$$

對於混循環小數, 可以先把該小數分爲有限不循環部分和無限循環部分, 有限不循環部分採用 (1) 中方法, 無限循環部分首先轉化爲純循環小數, 再採用 (2) 中方法。然後二者通分相加。

例如:
$$\begin{aligned}12.1356\overline{234}&=12.1356+0.0000\overline{234}=12.1356+\frac{1}{10^4}\times0.\overline{234}\\&=\frac{121356}{10000}+\frac{1}{10^4}\times\frac{234}{999}=\frac{121234878}{9990000}.\end{aligned}$$

2.2. 分數化為小數

有了光棍數的數論性質, “分數一定能化爲小數” 的證明也就不難了。

定理 1: 如果分數 $\dfrac{P}{Q}$ (不妨設 P、Q 互質) 的分母中只含有質因數 2 和 5, 即 $Q=2^k\times5^l$, 那麼這個最簡分數一定可以化成的有限小數, 小數部分的位數就等於分母中質因數 2 和 5 中個數較多的那個數的個數。

證明: $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{P}{2^k\times5^l}=\dfrac{P\times2^{s-k}\times5^{s-l}}{10^s}$ 其中質因數 2, 5 的較高次數爲 $s\equiv\max(k,l)$, 因

此, 分數 $\dfrac{P}{Q}$ 可以化爲的小數是將整數 $P\times 2^{s-k}\times 5^{s-l}$ 向左移動 s 位小數點得到。

定理2: 如果分數 $\dfrac{P}{Q}$ (不妨設 P、Q 互質, 且 $P<Q$) 的分母 Q 不含有 2 和 5 的質因數, 那麼這個分數化成的小數一定是純循環小數。

證明: 因爲分母 Q 不含有 2 和 5 的質因數, 由命題 1, Q 有一個長度最短的光棍數倍數 $B=\underbrace{11\cdots1}_{d\text{ 個 }1}$, 即 $\underbrace{11\cdots1}_{d\text{ 個 }1}=Q\times A$, 這時 $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{P\times A}{Q\times A}=\dfrac{P\times A}{\underbrace{11\cdots1}_{d\text{ 個 }1}}=\dfrac{P\times A\times 9}{\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}}$.

由於 $P\times A\times 9<\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}$, $P\times A\times 9$ 的位數不超過 d 位, 不妨記 $P\times A\times 9=a_1a_2\cdots a_d$, 則由小數化分數的 (2) 的逆過程知道: $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{P\times A\times 9}{\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}}=\dfrac{a_1a_2\cdots a_d}{\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}}=0.\overline{a_1a_2\cdots a_d}$ 爲純循環小數。

定理3: 如果分數 $\dfrac{P}{Q}$ (不妨設 P、Q 互質, 且 $P<Q$) 分母中既含有質因數 2 和 5, 又含有 2 和 5 以外的質因數, 那麼這個分數化成的小數一定是混循環小數, 小數部分不循環的位數就等於分母中質因數 2 和 5 中個數較多的那個數的個數。

證明: 將分母分解因數 $Q=2^k\cdot 5^l\cdot C$ (其中 C 不含質因數 2 和 5), $s\equiv\max(k,l)$。由命題 3, Q 存在形如 $11\cdots100\cdots0$ 的一系列 (無窮多個) 的倍數, 其中最短的是 d 個 1 (d 不大於 C), s 個 0 組成, 即 $\underbrace{11\cdots1}_{d\text{ 個 }1}\underbrace{00\cdots0}_{s\text{ 個 }0}=Q\times M$, 這時, $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{P\times M}{Q\times M}=\dfrac{P\times M}{\underbrace{11\cdots1}_{d\text{ 個 }1}\underbrace{00\cdots0}_{s\text{ 個 }0}}=\dfrac{P\times M\times 9}{\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}\times 10^s}$, 又 $P\times M\times 9<\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}\underbrace{00\cdots0}_{s\text{ 個 }0}$, 所以 $P\times M\times 9$ 除以 $\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}$ 的商數爲 A, 餘數爲 R, 即 $P\times M\times 9=\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}\times A+R$, 則 $A<10^s$, $R<\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}$, 不妨記 $A=a_1a_2\cdots a_s$, $R=b_1b_2\cdots b_d$ 則

$$\begin{aligned}\frac{P}{Q}&=\frac{P\times M\times 9}{\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}\underbrace{00\cdots0}_{s\text{ 個 }0}}\\&=\frac{\overbrace{99\cdots9}^{d\text{ 個 }9}\times A+R}{\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}\times 10^s}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{A}{10^s}+\frac{R}{\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}\times10^s}\\
&=\frac{a_1a_2\cdots a_s}{10^s}+\frac{b_1b_2\cdots b_d}{\underbrace{99\cdots9}_{d\text{ 個 }9}}\times\frac{1}{10^s}\\
&=0.a_1a_2\cdots a_s+0.\overline{b_1b_2\cdots b_d}\times\frac{1}{10^s}\\
&=0.a_1a_2\cdots a_s\overline{b_1b_2\cdots b_d},
\end{aligned}
$$

化成的小數是混循環小數, 小數部分不循環的位數就等於分母中質因數 2 和 5 中個數較多的那個數的個數 s, 循環節的長度不大於 C。

3. 後記

3.1. 有限小數 + 無限循環小數 = 分數

分數就是有理數, 就是有限或無限循環小數; 反過來, 有理數就是分數。

我們怎樣知道 $\sqrt{2}$ 是無理數, 即無限不循環小數, 能靠觀察嗎? 顯然不能無窮無盡地看下去。我們可以用間接的方法：證明 $\sqrt{2}$ 不是分數, 它就一定是無限不循環小數。

3.2. 分數化小數時, 循環節長度的一些結論

通過計算發現 $\frac{1}{31}=0.0322580645161290322580645161 29\cdots$ 它是個無限循環小數, 它的循環節為 032258064516129 有 15 位之長。引起很多人對循環節長度的好奇心, 也得到了一些猜想。

在定理 2 和定理 3 的證明過程中, 實際上我們得到了分母 Q 的形如 $11\cdots100\cdots0$ 的倍數, 其中最短的是 d 個 1 (d 不大於 C), s 個 0 組成, d 就是循環節的長度。很容易得到循環節長度的一些結論, 證實了先前的一些猜想, 如:

結論 1: 循環節的長度確實與分子完全無關, 只與分母有關。

結論 2: 任何一個分數化為小數時, 循環節再長也不會超過分母中的不含 2 和 5 的最大因數 C。

—本文作者李織蘭, 蔣曉雲任教中國桂林師範高等專科學校—