數學傳播 45卷2期, pp. 68-75

為何會多出一個根呢?

連威翔

一、前言

在建中通訊解題活動的歷年問題中, 第 48 期徵答題的第三題如下:

問題4803: $\triangle ABC$ 中, $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D 點, $\angle A=45°$、$\overline{BD}=3$、$\overline{CD}=2$, 求 $\triangle ABC$ 面積? 此問題的出處與公告解答, 請參考 [1]。

題目中提到 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D 點, 表示其垂足 D 會落在 $\overline{BC}$ 上, 又 $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ 均正, 表示 D 與 B, C 相異, 可知 $\triangle ABC$ 必然是銳角三角形。因此, 上述問題的圖形可參考下圖:

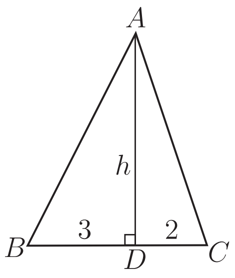

圖1

此圖形是仿照 [1] 中公告解答的附圖所繪, 其中假設高 $\overline{AD}=h$。

在 [1] 的解答中, 是先分別以圖 1 的 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 為對稱軸, 作 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$的鏡像: $\triangle ABE$ 與 $\triangle ACF$, 接著再延長 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 並設兩者相交於 G, 而得下圖:

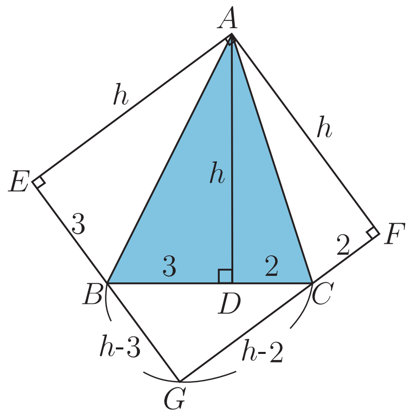

圖2

在圖 2 中, 因爲

$$\angle EAF=\angle EAD+\angle FAD=2(\angle BAD+\angle CAD)=2\times 45^\circ=90^\circ,$$

故 $\angle EAF$ 爲直角。由於 $\angle AEG$, $\angle AFG$ 兩者亦爲直角, 得知四邊形 $AEGF$ 的四個內角中有三個直角, 因此其第四個內角 $\angle EGF$ 亦爲直角, 故 $AEGF$ 爲矩形。又因爲 $AEGF$ 的兩鄰邊 $\overline{AE}$ 與 $\overline{AF}$ 等長 (長度均爲 h), 知四邊形 $AEGF$ 四邊等長, 因此它是一個邊長 h 的正方形。這樣我們就知道

$$\begin{aligned}\overline{BG}&=\overline{GE}-\overline{BE}=\overline{AE}-\overline{BD}=h-3,\\ \overline{CG}&=\overline{GF}-\overline{CF}=\overline{AF}-\overline{CD}=h-2.\end{aligned}$$

因爲圖 2 中 $\triangle BCG$ 爲直角三角形, 由畢氏定理知 $\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=\overline{BC}^2$, 即

$$(h-3)^2+(h-2)^2=25. \tag{1}$$

上式可化簡得

$$(h-6)(h+1)=0,$$

因此知 $h=6$ 或 $h=-1$。其中 $h=-1$ 不符所求, 得 $\overline{AD}=h=6$, 並可求出 $\triangle ABC$ 面積爲 15。

以上所介紹的解法, 基本上與 [1] 中的解法相同, 兩者都列出了方程式 (1), 只是上述解答將過程寫得更詳細些。不過, [1] 中的解答其內容並未提到 (1) 式有一個不合的根 -1。我們可以問, 此處所得的 $h=-1$ 這個根有它的意義嗎? 答案是肯定的, 底下筆者將爲大家介紹其意義與由來。

二、關於多出來的根

從第一節的討論, 可知 $h=-1$ 是 (1) 式的兩根之一, 注意 (1) 式中有兩個平方式: $(h-3)^2$ 與 $(h-2)^2$。因爲平方式 a^2 也可以寫成 $(-a)^2$, 所以我們可將 (1) 式改寫爲:

$$(-h+3)^2+(-h+2)^2=25, \tag{2}$$

且 $h=-1$ 也是 (2) 式的根。將 $h=-1$ 代入 (2) 式後, 可知

$$(1+3)^2+(1+2)^2=25. \tag{3}$$

從 (3) 式的結果, 我們另外知道 $h=1$ 是底下 (4) 式的根:

$$(h+3)^2+(h+2)^2=25. \tag{4}$$

同理可將 (4) 式中的兩個平方式改寫, 得知 $h=1$ 是底下 (5) 式的根:

$$(-h-3)^2+(-h-2)^2=25. \tag{5}$$

將 $h=1$ 代入上式後得

$$(-1-3)^2+(-1-2)^2=25. \tag{6}$$

最後, 由 (6) 式可知 $h=-1$ 是 (1) 式的根。

從以上的討論過程, 我們知道「$h=-1$ 是 (1) 式的根」與「$h=1$ 是 (4) 式的根」這兩件事等價, 可彼此互推。

接著, 我們不妨將問題 4803 的條件修改一下, 考慮底下的問題:

問題1: $\triangle ABC$ 中, $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D 點, $\angle A=135°$、$\overline{BD}=3$、$\overline{CD}=2$, 求 $\triangle ABC$ 面積?

注意問題 1 除了 $\angle A=135°$ 的條件外, 其餘條件都和問題 4803 相同。其參考圖形如下:

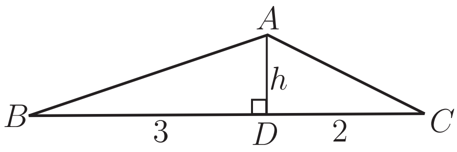

圖3

其中, 同樣假設高 $\overline{AD}=h$。問題 1 的解法如下:

解答1: 仿照第一節中求解問題 4803 時由圖 1 得圖 2 的方式對圖 3 做輔助線, 先分別以圖 3 的 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 爲對稱軸, 作 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的鏡像: $\triangle ABE$ 與 $\triangle ACF$。接著作 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 之延長線, 假設兩者相交於 G, 可得下圖:

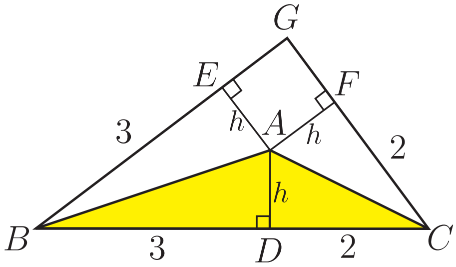

圖4

在圖 4 中, 因爲

$$\angle EAD+\angle FAD=2(\angle BAD+\angle CAD)=2\times 135°=270°,$$

可知

$$\angle EAF=360°-(\angle EAD+\angle FAD)=90°,$$

故 $\angle EAF$ 爲直角。此時, 仿照我們對圖 2 所作的討論, 同理可知圖 4 中四邊形 $AEGF$ 爲邊長 h 的正方形。這樣我們就知道

$$\overline{BG} = \overline{BE} + \overline{EG} = \overline{BD} + \overline{EA} = h + 3,$$
$$\overline{CG} = \overline{CF} + \overline{FG} = \overline{CD} + \overline{FA} = h + 2.$$

因爲圖 4 中 $\triangle BCG$ 爲直角三角形, 由畢氏定理知 $\overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = \overline{BC}^2$, 即

$$(h+3)^2 + (h+2)^2 = 25. \tag{7}$$

注意 (7) 式與本節一開始介紹的 (4) 式完全相同, 它可化簡爲

$$(h+6)(h-1) = 0,$$

得兩根爲 $h = -6$ 或 $h = 1$。但其中 $h = -6$ 不符所求, 知 $\overline{AD} = h = 1$, 並可求出 $\triangle ABC$ 的面積爲 $\dfrac{5}{2}$, 解題完畢。

看完上面解答 1 的過程, 我們知道 $h = 1$ 就是 (4) 式 (即 (7) 式) 的根。而本節一開始的那段討論, 告訴我們「$h = 1$ 是 (4) 式的根」與「$h = -1$ 是 (1) 式的根」這兩件事是等價的, 從而我們知道, 問題 4803 解答中的 (1) 式之所以會多出 $h = -1$ 這個根, 是因爲問題 1 在解答過程中由圖 4 可推得 (4) 式 (即 (7) 式), 且 $h = 1$ 是 (4) 式的一根。

而此時筆者也可另外問大家, 爲何上述解答中的 (7) 式會多出 $h = -6$ 這個根呢? 相信在看過上面的討論後, 讀者應該可以自己設法找出答案。答案是, 因爲「$h = -6$ 是 (7) 式的根」與「$h = 6$ 是 (1) 式的根」是等價的(請證明看看), 而後者早在第一節後半我們就已經知道了。

三、問題 4803 的另解

在第一節中, 筆者對問題 4803 的解法乃是參考 [1] 的解法而來。在本節中, 筆者想對該問題提出一個另解, 解法如下:

解答2: 圖 1 中, 以 $\overline{AC}$ 爲對稱軸作 $\triangle ABC$ 的鏡像 $\triangle AB'C$, 連接 $\overline{BB'}$ 後, 將如下圖:

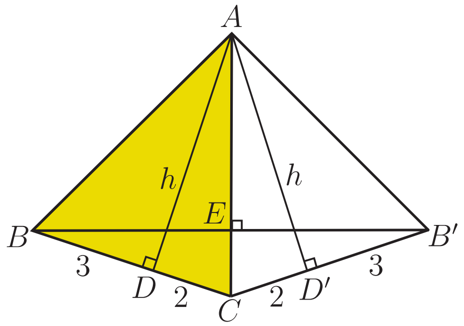

圖 5

假設 $\overline{BB'}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E, 因爲 $ABCB'$ 爲箏形, 可知 $\overline{BB'}\perp\overline{AC}$。

在圖 5 中, 因爲

$$\angle BAB' = \angle BAC + \angle B'AC = 2\times 45^\circ = 90^\circ,$$

故 $\angle BAB'$ 爲直角。此外, 因 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 爲直角三角形, 可寫下

$$\overline{AB} = \sqrt{h^2+9}, \qquad \overline{AC} = \sqrt{h^2+4}.$$

因爲 $\overline{AB} = \overline{AB'}$, 可知 $\triangle ABB'$ 爲等腰直角三角形, 而 $\triangle ABB'$ 斜邊上的高 $\overline{AE}$, 又將 $\triangle ABB'$ 切成兩個等腰直角三角形：$\triangle ABE$ 及 $\triangle AB'E$, 因此可知

$$\overline{AE} = \overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{h^2+9}}{\sqrt{2}},$$
$$\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AE} = \sqrt{h^2+4} - \frac{\sqrt{h^2+9}}{\sqrt{2}}.$$

由於 $\triangle BCE$ 爲直角三角形, 可知 $\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{BC}^2$, 因此有

$$\left(\frac{\sqrt{h^2+9}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{h^2+4} - \frac{\sqrt{h^2+9}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 25.$$

上式整理後可得

$$2h^2 - 12 = \sqrt{2}\times\sqrt{h^2+4}\times\sqrt{h^2+9}. \tag{8}$$

對 (8) 式的等號兩側取平方, 可知

$$(2h^2-12)^2 = 2(h^2+4)(h^2+9). \tag{9}$$

對 (9) 式再作化簡, 最終可得

$$(h^2-1)(h^2-36) = 0. \tag{10}$$

在已知 $h > 0$ 的前提之下, 可知上式的解爲

$$h = 1 \quad \text{或} \quad h = 6. \tag{11}$$

不過, 這兩個解都是符合圖 5 的解嗎?

且讓我們回到圖 5, 因爲 $\angle BAC = 45^\circ$, 可知

$$\angle BAD = \angle BAC - \angle CAD < \angle BAC = 45^\circ.$$

又因爲 $\angle ABD$ 與 $\angle BAD$ 互餘, 利用上式可知

$$\angle ABD = 90^\circ - \angle BAD > 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

因此有 $\angle ABD > 45^\circ > \angle BAD$。接著觀察 $\triangle ABD$, 由三角形大角對大邊的性質知 $\overline{AD} > \overline{BD}$, 即 $h > 3$, 因此在 (11) 處的兩解中, $h = 1$ 是不合的解, 應取 $h = 6$。至此, 可再次可算出 $\triangle ABC$ 面積爲 15, 解題完畢。

看完上面的解題過程, 我們發現方程式 (10) 有一個多出來的根 $h = 1$, 經過第二節的探討, 我們知道它應該與問題 1 的解 $h = 1$ 有關。底下, 我們不妨再次看問題 1, 給出其另解之後, 再仿照第二節解答 1 完成後所給出的論述, 進行類似的探討。問題 1 的另解如下:

解答3: 圖 3 中, 以直線 AC 對稱軸作 $\triangle ABC$ 的鏡像 $\triangle AB'C$, 連接 $\overline{BB'}$ 後, 將如下圖:

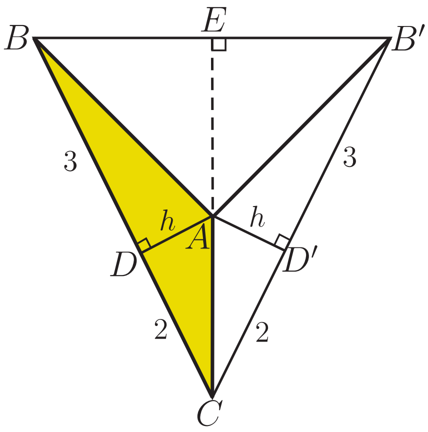

圖 6

假設 $\overline{BB'}$ 交 $\overline{AC}$ 的延長線於 E, 因爲 B, B' 兩點對直線 AC 對稱, 可知 $\overline{BB'}$ 垂直 AC 直線於 E。

在圖 6 中, 因爲

$$\angle BAB' = 360^\circ - (\angle BAC + \angle B'AC) = 360^\circ - 2 \times 135^\circ = 90^\circ,$$

故 $\angle BAB'$ 爲直角。此外, 因 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 爲直角三角形, 可寫下

$$\overline{AB} = \sqrt{h^2 + 9}, \qquad \overline{AC} = \sqrt{h^2 + 4}.$$

因爲 $\overline{AB} = \overline{AB'}$, 可知 $\triangle ABB'$ 爲等腰直角三角形, 而 $\triangle ABB'$ 斜邊上的高 $\overline{AE}$, 又將 $\triangle ABB'$ 切成兩個等腰直角三角形 : $\triangle ABE$ 及 $\triangle AB'E$, 因此可知

$$\overline{AE} = \overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{h^2 + 9}}{\sqrt{2}},$$

$$\overline{CE} = \overline{CA} + \overline{AE} = \sqrt{h^2 + 4} + \frac{\sqrt{h^2 + 9}}{\sqrt{2}}.$$

由於 $\triangle BCE$ 爲直角三角形, 可知 $\overline{BE}^2+\overline{CE}^2=\overline{BC}^2$, 因此有

$$\left(\frac{\sqrt{h^2+9}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{h^2+4}+\frac{\sqrt{h^2+9}}{\sqrt{2}}\right)^2=25.$$

上式整理後可得

$$2h^2-12=-\sqrt{2}\times\sqrt{h^2+4}\times\sqrt{h^2+9}. \tag{12}$$

對 (12) 式的等號兩邊取平方, 可知

$$(2h^2-12)^2=2(h^2+4)(h^2+9). \tag{13}$$

對 (13) 式再作化簡, 可得

$$(h^2-1)(h^2-36)=0. \tag{14}$$

在已知 $h>0$ 的前提之下, 可知上式的解爲

$$h=1 \quad \text{或} \quad h=6.$$

爲了確定上述 h 的兩解何者正確, 回到圖 6 後, 因爲 $\angle BAC=135^\circ$, 可知

$$\angle ACD=180^\circ-\angle BAC-\angle ABC<180^\circ-\angle BAC=45^\circ.$$

又因爲 $\angle ACD$ 與 $\angle CAD$ 互餘, 利用上式可知

$$\angle CAD=90^\circ-\angle ACD>90^\circ-45^\circ=45^\circ.$$

因此有 $\angle CAD>45^\circ>\angle ACD$。接著觀察 $\triangle ACD$, 由三角形大角對大邊的性質知 $\overline{AD}<\overline{CD}$, 即 $h<2$, 因此上述 h 的兩解中, $h=6$ 是不合的解, 應取 $h=1$。至此, 可再次算出 $\triangle ABC$ 面積爲 $\dfrac{5}{2}$, 解題完畢。

此時, 若回頭比較解答 2 與解答 3, 可發現解答 3 中的 (13) 式就是解答 2 中的 (9) 式。而正因爲如此, 才使得方程式 (14) 的根 $h=1$ 也出現在方程式 (10) 的根裡面; 同時, 也讓方程式 (10) 的根 $h=6$ 也出現在方程式 (14) 的根裡面。

讀者應該有注意到, (8), (12) 兩式剛好只差了一個負號, 但因爲接下來都對兩者之等號兩側取平方, 所以就得到相同的 (9), (13) 兩式。這也讓兩處得到同樣的方程式 (10), (14) 與同樣的兩根。

四、結語

透過本文前兩節的探討, 我們便明白了問題 4803 解答之中方程式 (1) 的根 $h=-1$ 的由來。而比較第三節中的兩個另解, 我們也知道解答 2 中方程式 (10) 其不符所求的根 $h=1$

剛好是解答 3 中符合所求的解。日後當我們解題時, 若發現方程式有不合題意的根, 不妨思考看看它的由來, 也許它來自於另一個相關問題。

以上就是筆者簡單的心得分享, 希望讀者喜歡。文章最後, 筆者要感謝建中通訊解題主辦單位, 因為有問題4803, 才有本文的誕生。

參考資料

1. 問題 4803, 建中通訊解題 48 期
   http://web2.ck.tp.edu.tw/~mathweb/index.php?option=com_content&view=article&id=42:2012-02-07-02-50-11&catid=19:2011-11-23-08-30-15&Itemid=37

—本文作者投稿時任職適園有限公司 (人力派遣)—