數學傳播 45卷2期, pp. 54-67

# $k$-generalized Fibonacci Numbers的完全齊次對稱多項式表示法

陳建燁

## 壹、前言

著名的費氏數, 有著各式各樣的推廣。其中一種方式, 是所謂的「$k$-generalized Fibonacci Numbers」(參考資料 [1]), 可翻譯成「$k$-推廣的費氏數」, 定義如下:

設 $k\geq 2$, 若遞迴數列 $\langle F_n^{(k)}\rangle$ 滿足初始條件 $F_{-(k-2)}^{(k)}=\cdots=F_{-1}^{(k)}=F_0^{(k)}=0$ 與 $F_1^{(k)}=1$, 且滿足遞迴關係 $F_n^{(k)}=F_{n-1}^{(k)}+F_{n-2}^{(k)}+\cdots+F_{n-k}^{(k)}$, 其中 $n\geq 2$, 則稱 $F_n^{(k)}$ 爲「$k$-推廣的費氏數」。特別地, 當 $k=2$ 時, $F_n^{(2)}$ 即爲費氏數 $F_n$。

另一方面, 定義 $h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$, 稱爲「變數 $a_1$, $a_2,\ldots,a_n$ 的 $k$ 次完全齊次對稱多項式」。

注意到 $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}=h_{n-1}(\alpha,\beta)$, 其中 $n\geq 1$, 且 $\alpha$ 與 $\beta$ 爲 $x^2-x-1=0$ 的兩根。此式將費氏數 $F_n$ 用完全齊次對稱多項式 $h_{n-1}(\alpha,\beta)$ 加以表示。

既然 $F_n^{(k)}$ 是費氏數 $F_n$ 的一種推廣, 那麼, $F_n^{(k)}$ 是否也可用完全齊次對稱多項式加以表示? 這是本文的研究動機。經過一番探索之後, 發現答案是肯定的:

設 $k\geq 2$, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 爲 $x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1=0$ 的 $k$ 個相異根, 則有

$$F_n^{(k)}=h_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k),\ \text{其中 } n\geq 1。$$

將此式稱爲 $F_n^{(k)}$ 的完全齊次對稱多項式表示法, 此爲本文前半部的工作重點。

此外, 在查閱相關文獻之後, 得知 $F_n^{(k)}$ 的另外兩種表示法:

$$F_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i-1}{2+(k+1)(\alpha_i-2)}\alpha_i^{n-1}\qquad [1]\quad 與$$

$$F_n^{(k)}=\frac{\det(V_1^{(k)})}{\det(V)}\qquad [2],$$

在本文的後半部, 將分別證明 $h_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=\sum_{i=1}^{k}\dfrac{\alpha_i-1}{2+(k+1)(\alpha_i-2)}\alpha_i^{n-1}$ 與 $h_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=\dfrac{\det(V_1^{(k)})}{\det(V)}$, 最後再用「推廣的 Vandermonde 行列式(最右行升次型)」[3] 一文中的觀點, 將 $F_n^{(k)}$ 的三種表示法作一個統整。

## 貳、用到的記號、性質與公式說明

### 1. $k$-推廣的費氏數 ($k$-generalized Fibonacci Numbers)

設 $k\geq 2$, 若遞迴數列 $\langle F_n^{(k)}\rangle$ 滿足初始條件 $F_{-(k-2)}^{(k)}=\cdots=F_{-1}^{(k)}=F_0^{(k)}=0$ 與 $F_1^{(k)}=1$, 且滿足遞迴關係, $F_n^{(k)}=F_{n-1}^{(k)}+F_{n-2}^{(k)}+\cdots+F_{n-k}^{(k)}$, 其中 $n\geq 2$, 則稱 $F_n^{(k)}$ 爲「$k$-推廣的費氏數」。

當 $k=3,4,5$ 時, $F_n^{(k)}$ 分別稱爲 Tribonacci Numbers, Tetranacci Numbers, Pentanacci Numbers。在此列出各數列的前幾項:

| $n$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n^{(3)}$ | | | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 7 | 13 | 24 | 44 | 81 |
| $F_n^{(4)}$ | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 | 15 | 29 | 56 | 108 |
| $F_n^{(5)}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 31 | 61 | 120 |

### 2. 完全齊次對稱多項式 (Complete Homogeneous Symmetric Polynomial)

$h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$, 稱爲「變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的 $k$ 次完全齊次對稱多項式」。特別地, 有 $h_0(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=1$, 與 $h_k(a)=a^k$。

**例**: $h_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$。

**例**: $h_n(\alpha,\beta)=\sum\limits_{\substack{i+j=n\\ i,j\geq 0}}(\alpha^i\beta^j)=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$。

## 3. 基本對稱多項式 (Elementary Symmetric Polynomial)

**定義**: $e_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n=k\\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\le 1}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})$, 稱爲「變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的 $k$ 次基本對稱多項式」。

**例**: $e_2(a_1,a_2,a_3)=\sum\limits_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ 0\le\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\le 1}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$。

**例**: $e_0(a,b,c)=1$, $e_1(a,b,c)=a+b+c$, $e_2(a,b,c)=ab+bc+ca$, $e_3(a,b,c)=abc$。

**例**: $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-e_1(a,b,c)x^2+e_2(a,b,c)x-e_3(a,b,c)$。

**例**: $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)=e_0x^k-e_1x^{k-1}+\cdots+(-1)^je_jx^{k-j}+\cdots$
$+(-1)^{k-1}e_{k-1}x+(-1)^ke_k$, 其中 $e_j=e_j(a_1,a_2,\ldots,a_k)$。

## 4. 拉格朗日插值型式

**定義**: $L_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^k}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}$, 稱爲「變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的 $k$ 次拉格朗日插值型式」。

**註**: 以分子的次方來定義 $L$ 的下標。

**例**: $L_2(a_1,a_2,a_3)$

$$=\sum_{i=1}^{3}\frac{a_i^2}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}}(a_i-a_j)}=\frac{a_1^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}.$$

5.

(1) 當 $k\ge 2$ 時, 方程式 $x^{k+1}-2x^k+1=0$ 的各根全相異 (亦即沒有重根)。

(2) 當 $k\ge 2$ 時, 方程式 $x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1=0$ 的各根全相異 (亦即沒有重根)。

**證明**: 請見參考資料 [2], p160。

## 6. 對稱多項式的「 $e-h$ 恆等式」: (參考資料 [4])

對於變數 $a_1,a_2,\ldots,a_m$, 有 $\sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^je_j\cdot h_{n-j}=0$, 其中 $n\ge m$, 亦即
$h_n-e_1h_{n-1}+\cdots+(-1)^je_jh_{n-j}+\cdots+(-1)^me_mh_{n-m}=0$。

**說明**: 此處用 $h_j$ 表示 $h_j(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ 與 $e_j$ 表示 $e_j(a_1,a_2,\ldots,a_m)$, 以節省空間。在本文中, 用到的情形是:

設 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 爲 $x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 = 0$ 的 $k$ 個相異根, 則有

$$\begin{aligned}
&x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)\\
&= e_0x^k - e_1x^{k-1} + \cdots + (-1)^j e_j x^{k-j} + \cdots + (-1)^{k-1}e_{k-1}x + (-1)^k e_k \quad (\text{根與係數})\\
&\Rightarrow (-1)^j e_j = -1,\ \text{其中}\ j = 1, 2, \ldots, k \qquad (\text{比較係數法})\\
&\Rightarrow e_j(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = (-1)^{j+1},\ \text{其中}\ j = 1, 2, \ldots, k.
\end{aligned}$$

由 $e-h$ 恆等式, 對於變數 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, 有 $h_n - e_1h_{n-1} + \cdots + (-1)^j e_j h_{n-j} + \cdots + (-1)^k e_k h_{n-k} = 0$, 其中 $n \geq k$。

由於 $e_j = (-1)^{j+1}$, 亦即 $(-1)^j e_j = -1$, 其中 $j = 1, 2, \ldots, k$, 於是有 $h_n - h_{n-1} - \cdots - h_{n-j} - \cdots - h_{n-k} = 0$, 其中 $n \geq k$。

**註**: 這可看作數列 $h_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ 所滿足的遞迴關係式。此外, 將 $x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 = 0$ 等號兩邊同乘以 $x^{n-k}$, 得 $x^n - x^{n-1} - \cdots - x^{n-k} = 0$, 形式上, 將 $x$ 代換成 $h$, 上標換成下標, 即得 $h_n - h_{n-1} - \cdots - h_{n-k} = 0$, 這是一個較簡便的記法。

## 7. $h-L-V$ 轉換公式: (參考資料 [3])

$$\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n=k\\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\geq 0}} (a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{n+k-1}}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}(a_i-a_j)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{(n-1)+k}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{(n-1)+k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{(n-1)+k}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}\end{vmatrix}},$$

$$\left(\text{記作}\ h_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = L_{n+k-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{V_{(0,1,2,\ldots,n-2,n-1+k)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{V_{(0,1,2,\ldots,n-2,n-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)}\right).$$

**說明**: 此式可將完全齊次對稱多項式、拉格朗日插值型式與行列式, 三種型式互相轉換, 也說明了這三種型式的關聯性。

**例**: 取 $k=1$ 與 $n=3$, 有 $h_1(a,b,c)=L_3(a,b,c)=\dfrac{V_{(0,1,3)}(a,b,c)}{V_{(0,1,2)}(a,b,c)}$, 或

$$a+b+c=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}.$$

特別地, 只看 $L$ 與 $h$, 可以注意到 $L$ 與 $h$ 的下標之差, 恰爲變數個數減 1, 因此 $h-L$ 轉換公式, 也可寫成: $L_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=h_{k-(n-1)}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$。

**例**: $L_{n+2}(\alpha,\beta,\gamma)=h_n(\alpha,\beta,\gamma)$.

**例**: $L_{n+4}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=h_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$.

**例**: $L_{n+k-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=h_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$.

## 參、主要工作

### 一、「完全齊次對稱多項式」表示法

#### (一) Tribonacci Numbers **的完全齊次對稱多項式表示法**

令 $F_n^{(3)}=a_n$, 設 $n\geq 3$, 注意到

$$\begin{aligned}
&(x^3-x^2-x-1)(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\
&=a_0x^{n+3}+(a_1-a_0)x^{n+2}+(a_2-a_1-a_0)x^{n+1}+(a_3-a_2-a_1-a_0)x^n\\
&\quad+(a_4-a_3-a_2-a_1)x^{n-1}+\cdots+(a_j-a_{j-1}-a_{j-2}-a_{j-3})x^{n+3-j}+\cdots\\
&\quad+(a_n-a_{n-1}-a_{n-2}-a_{n-3})x^3+(-a_n-a_{n-1}-a_{n-2})x^2+(-a_n-a_{n-1})x-a_n\\
&=0\cdot x^{n+3}+(1-0)x^{n+2}+(1-1-0)x^{n+1}+0\cdot x^n+\cdots+0\cdot x^{n+3-j}+\cdots\\
&\quad+0\cdot x^3+(-a_{n+1})x^2+(-a_n-a_{n-1})x-a_n\\
&\Rightarrow x^{n+2}=(x^3-x^2-x-1)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}\right)+a_{n+1}x^2+(a_n+a_{n-1})x+a_n\\
&=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}\right)+R(x),
\end{aligned}$$

(其中 $\alpha,\beta,\gamma$ 爲 $x^3-x^2-x-1=0$ 的三相異根, 且令 $R(x)=a_{n+1}x^2+(a_n+a_{n-1})x+a_n$ $\Rightarrow \alpha^{n+2}=R(\alpha)$, $\beta^{n+2}=R(\beta)$, $\gamma^{n+2}=R(\gamma)$, 且 $\deg R(x)\leq 2$。

由拉格朗日插值多項式, 可得

$$R(x)=\alpha^{n+2}\cdot\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\beta^{n+2}\cdot\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\gamma^{n+2}\cdot\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

由 $x^2$ 的係數, 可知

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\qquad\text{(拉格朗日插值型式)}\\&=L_{n+2}(\alpha,\beta,\gamma)=h_n(\alpha,\beta,\gamma)\qquad(h-L\text{ 轉換公式})\\&\quad\Rightarrow\ F_n^{(3)}=a_n=h_{n-1}(\alpha,\beta,\gamma),\qquad\text{其中 }n\geq 3\text{。}\end{aligned}$$

至於當 $n=1,2$ 時,

$$\begin{aligned}F_2^{(3)}&=F_5^{(3)}-F_4^{(3)}-F_3^{(3)}=h_4-h_3-h_2=h_1\qquad(\text{由 }e-h\text{ 恆等式}),\\F_1^{(3)}&=F_4^{(3)}-F_3^{(3)}-F_2^{(3)}=h_3-h_2-h_1=h_0\qquad(\text{由 }e-h\text{ 恆等式}).\end{aligned}$$

至此, 已得到 Tribonacci Numbers $F_n^{(3)}$ 的完全齊次對稱多項式表示法, 即有 $F_n^{(3)}=h_{n-1}(\alpha,\beta,\gamma)$, 其中 $n\geq 1$。

### (二) Pentanacci Numbers **的完全齊次對稱多項式表示法**

令 $F_n^{(5)}=a_n$, 設 $n\geq 5$, 注意到

$$\begin{aligned}&(x^5-x^4-x^3-x^2-x-1)(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\&=a_0x^{n+5}+(a_1-a_0)x^{n+4}+(a_2-a_1-a_0)x^{n+3}+(a_3-a_2-a_1-a_0)x^{n+2}\\&\quad+(a_4-a_3-a_2-a_1-a_0)x^{n+1}+(a_5-a_4-a_3-a_2-a_1-a_0)x^n+\cdots\\&\quad+(a_n-a_{n-1}-a_{n-2}-a_{n-3}-a_{n-4}-a_{n-5})x^5+(-a_n-a_{n-1}-a_{n-2}-a_{n-3}-a_{n-4})x^4\\&\quad+(-a_n-a_{n-1}-a_{n-2}-a_{n-3})x^3+(-a_n-a_{n-1}-a_{n-2})x^2+(-a_n-a_{n-1})x-a_n\\&\Rightarrow x^{n+4}=(x^5-x^4-x^3-x^2-x-1)\cdot\Big(\sum_{i=0}^n a_ix^{n-i}\Big)\\&\quad+a_{n+1}x^4+(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3})x^3+(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})x^2+(a_n+a_{n-1})x+a_n\\&=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)\cdot\Big(\sum_{i=0}^n a_ix^{n-i}\Big)+R(x),\end{aligned}$$

(其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 爲 $x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0$ 的 5 相異根, 且令 $R(x)=a_{n+1}x^4+(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3})x^3+(a_n+a_{n-1}+a_{n-2})x^2+(a_n+a_{n-1})x+a_n$)

$\Rightarrow R(\alpha_i)=\alpha_i^{n+4}$, 其中 $i=1,2,3,4,5$, 且 $\deg R(x)\leq 4$,

由拉格朗日插值多項式, 可得

$$R(x)=\sum_{i=1}^{5}\alpha_i^{n+4}\cdot\frac{\prod\limits_{\substack{1\le j\le 5\\ j\ne i}}(x-\alpha_j)}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le 5\\ j\ne i}}(\alpha_i-\alpha_j)},$$

由 $x^4$ 的係數, 可知

$$a_{n+1}=\sum_{i=1}^{5}\frac{\alpha_i^{n+4}}{\prod\limits_{\substack{1\le j\le 5\\ j\ne i}}(\alpha_i-\alpha_j)}=L_{n+4}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=h_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$$

$$\Rightarrow\ F_n^{(5)}=a_n=h_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5),\qquad \text{其中 } n\ge 5。$$

至於當 $n=1,2,3,4$ 時,

$$\begin{aligned}
F_4^{(5)}&=F_9^{(5)}-F_8^{(5)}-F_7^{(5)}-F_6^{(5)}-F_5^{(5)}=h_8-h_7-h_6-h_5-h_4=h_3 &&(\text{由 } e{-}h \text{ 恆等式}),\\
F_3^{(5)}&=F_8^{(5)}-F_7^{(5)}-F_6^{(5)}-F_5^{(5)}-F_4^{(5)}=h_7-h_6-h_5-h_4-h_3=h_2 &&(\text{由 } e{-}h \text{ 恆等式}),\\
F_2^{(5)}&=F_7^{(5)}-F_6^{(5)}-F_5^{(5)}-F_4^{(5)}-F_3^{(5)}=h_6-h_5-h_4-h_3-h_2=h_1 &&(\text{由 } e{-}h \text{ 恆等式}),\\
F_1^{(5)}&=F_6^{(5)}-F_5^{(5)}-F_4^{(5)}-F_3^{(5)}-F_2^{(5)}=h_5-h_4-h_3-h_2-h_1=h_0 &&(\text{由 } e{-}h \text{ 恆等式})。
\end{aligned}$$

至此, 已得到 Pentanacci Numbers $F_n^{(5)}$ 的完全齊次對稱多項式表示法, 即
$F_n^{(5)}=h_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$, 其中 $n\ge 1$。

### (三) $k$-generalized Fibonacci Numbers 的完全齊次對稱多項式表示法

令 $F_n^{(k)}=a_n$, 設 $n\ge k$, 注意到

$$\begin{aligned}
&(x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1)(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\
&=[a_0x^{n+k}+(a_1-a_0)x^{n+k-1}+\cdots+(a_j-a_{j-1}-\cdots-a_1-a_0)x^{n+k-j}+\cdots\\
&\quad+(a_k-a_{k-1}-\cdots-a_1-a_0)x^n]+[(a_{k+1}-a_k-\cdots-a_1)x^{n-1}+\cdots\\
&\quad+(a_{n-1}-a_{n-2}-\cdots-a_{n-k}-a_{n-k-1})x^{k+1}]+[(a_n-a_{n-1}-\cdots-a_{n-k+1}-a_{n-k})x^k\\
&\quad+(-a_n-a_{n-1}-\cdots-a_{n-k+1})x^{k-1}+\cdots+(-a_n-a_{n-1})x-a_n \qquad (\text{註})\\
&=[0\cdot x^{n+k}+(1-0)x^{n+k-1}+\cdots+0\cdot x^{n+k-j}+\cdots+0\cdot x^n]+[0\cdot x^{n-1}+\cdots+0\cdot x^{k+1}]\\
&\quad+[0\cdot x^k+(-a_{n+1})x^{k-1}+(-a_n-a_{n-1}-\cdots-a_{n-k+2})x^{k-2}+\cdots+(-a_n-a_{n-1})x-a_n]\\
&\Rightarrow x^{n+k-1}=(x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1)\cdot\Big(\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}\Big)\\
&\quad+[a_{n+1}x^{k-1}+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{n-k+2})x^{k-2}+\cdots+(a_n+a_{n-1})x+a_n]
\end{aligned}$$

$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)\cdot\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}\Big) + R(x),$$

(其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 爲 $x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 = 0$ 的 $k$ 相異根, 且令 $R(x) = a_{n+1}x^{k-1} + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n-k+2})x^{k-2} + \cdots + (a_n + a_{n-1})x + a_n$)

$\Rightarrow R(\alpha_i) = \alpha_i^{n+k-1}$, 其中 $i = 1, 2, \ldots, k$, 且 $\deg R(x) \leq k-1$,

由拉格朗日插值多項式, 可得

$$R(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{n+k-1} \cdot \frac{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq k\\ j\neq i}} (x-\alpha_j)}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq k\\ j\neq i}} (\alpha_i-\alpha_j)},$$

由 $x^{k-1}$ 的係數, 可知

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^{n+k-1}}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq k\\ j\neq i}} (\alpha_i-\alpha_j)} = L_{n+k-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = h_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

$$\Rightarrow\ F_n^{(k)} = a_n = h_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \qquad \text{其中 } n \geq k。$$

至於當 $n = 1, 2, \ldots, k-1$ 時,

$$\begin{aligned}
F_{k-1}^{(k)} &= F_{2k-1}^{(k)} - F_{2k-2}^{(k)} - \cdots - F_{k}^{(k)} = h_{2k-2} - h_{2k-3} - \cdots - h_{k-1} = h_{k-2} \quad (\text{由 } e-h \text{ 恆等式})\\
F_{k-2}^{(k)} &= F_{2k-2}^{(k)} - F_{2k-3}^{(k)} - \cdots - F_{k-1}^{(k)} = h_{2k-3} - h_{2k-4} - \cdots - h_{k-2} = h_{k-3} \quad (\text{由 } e-h \text{ 恆等式})\\
&\vdots \\
F_{1}^{(k)} &= F_{k+1}^{(k)} - F_{k}^{(k)} - \cdots - F_{2}^{(k)} = h_{k} - h_{k-1} - \cdots - h_{1} = h_{0} \quad (\text{由 } e-h \text{ 恆等式})。
\end{aligned}$$

至此, 已得到 $k$-generalized Fibonacci Numbers $F_n^{(k)}$ 的完全齊次對稱多項式表示法, 即 $F_n^{(k)} = h_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, 其中 $n \geq 1$。

**註**: 當 $2 \leq j \leq k-1$ 時,

$a_j - a_{j-1} - \cdots - a_1 - a_0 = a_j - a_{j-1} - \cdots - a_1 - a_0 - a_{-1} - a_{-2} - \cdots - a_{-(k-j)} = 0$。

## 二、「單一變數化」表示法

在參考資料 [1] 中, 給出 $F_n^{(k)}$ 的一種表達式 $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\alpha_i - 1}{2+(k+1)(\alpha_i-2)}\alpha_i^{n-1}$, 與完全齊次對稱多項式 $h_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ 形式迥異, 本文在此將直接證明兩者是相等的, 亦即有如下的命題:

**命題**: $h_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{\alpha_i-1}{2+(k+1)(\alpha_i-2)}\alpha_i^{n-1}$, 其中 $n\geq 1$, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ 爲 $x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1=0$ 的 $k$ 個相異根。

**證明**: 令 $f(x)=(x-1)(x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1)=x^{k+1}-2x^k+1$。
一方面, 令 $\alpha_0=1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x)&=(x-1)(x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1)\\&=(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)=\prod_{0\leq j\leq k}(x-\alpha_j)\\ \Rightarrow f'(x)&=\sum_{p=0}^{k}\prod_{\substack{0\leq j\leq k\\ j\neq p}}(x-\alpha_j)\\ \Rightarrow f'(\alpha_i)&=\sum_{p=0}^{k}\prod_{\substack{0\leq j\leq k\\ j\neq p}}(\alpha_i-\alpha_j)=\prod_{\substack{0\leq j\leq k\\ j\neq i}}(\alpha_i-\alpha_j)\\&=(\alpha_i-1)\cdot\prod_{\substack{1\leq j\leq k\\ j\neq i}}(\alpha_i-\alpha_j),\ \text{其中 } i=1,2,\ldots,k.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}f(x)=x^{k+1}-2x^k+1\Rightarrow f'(x)&=(k+1)x^k-2kx^{k-1}\\ \Rightarrow f'(\alpha_i)&=(k+1)\alpha_i^k-2k\alpha_i^{k-1}.\end{aligned}$$

於是可得 $(\alpha_i-1)\cdot\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq k\\ j\neq i}}(\alpha_i-\alpha_j)=f'(\alpha_i)=(k+1)\alpha_i^k-2k\alpha_i^{k-1}$, 其中 $i=1,2,\ldots,k$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq k\\ j\neq i}}(\alpha_i-\alpha_j)}=\frac{\alpha_i-1}{(k+1)\alpha_i^k-2k\alpha_i^{k-1}},\ \text{其中 } i=1,2,\ldots,k.$$

再來, 由 $h-L$ 轉換公式, 有

$$\begin{aligned}h_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)&=L_{n-1+(k-1)}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=L_{n+k-2}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i^{n+k-2}}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq k\\ j\neq i}}(\alpha_i-\alpha_j)}\qquad\text{(拉格朗日插值型式)}\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i-1}{(k+1)\alpha_i^k-2k\alpha_i^{k-1}}\alpha_i^{n+k-2}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i-1}{(k+1)\alpha_i-2k}\alpha_i^{n-1}\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i-1}{2+(k+1)(\alpha_i-2)}\alpha_i^{n-1}.\end{aligned}$$

至此, 已證明了 $h_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=\sum_{i=1}^{k}\dfrac{\alpha_i-1}{2+(k+1)(\alpha_i-2)}\alpha_i^{n-1}$, 其中 $n\geq 1$。

**說明**: 拉格朗日插值型式 $\sum_{i=1}^{k}\dfrac{\alpha_i^{n+k-2}}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq k\\ j\neq i}}(\alpha_i-\alpha_j)}$ 是 $k$ 個分式之和, 每個分式 $\dfrac{\alpha_i^{n+k-2}}{\prod\limits_{\substack{1\leq j\leq k\\ j\neq i}}(\alpha_i-\alpha_j)}$ 的構成, 都用到所有的變數 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$; 相對地, $\sum_{i=1}^{k}\dfrac{\alpha_i-1}{2+(k+1)(\alpha_i-2)}\alpha_i^{n-1}$ 也是 $k$ 個分式之和, 但每個分式 $\dfrac{\alpha_i-1}{2+(k+1)(\alpha_i-2)}\alpha_i^{n-1}$ 的構成, 都只用到單一變數 $\alpha_i$, 故將此種型式, 稱爲 $F_n^{(k)}$ 的「單一變數化」表示法。

## 三、「行列式相除」表示法

在參考資料 [2] 中, 給出了 $F_n^{(k)}$ 的另一種表達式 $\dfrac{\det(V_1^{(k)})}{\det(V)}$, 在此先將 [2] 的記號與概念, 與本文作一整合:

### (一) $g_{n+k-2}^{(k)}=g_n=F_n^{(k)}$

在 [2] 中, $k$-generalized Fibonacci sequence $\{g_n^{(k)}\}$ 是這樣定義的:
$g_1^{(k)}=\cdots=g_{k-2}^{(k)}=0$, $g_{k-1}^{(k)}=g_k^{(k)}=1$, 且當 $n>k\geq 2$ 時, 有 $g_n^{(k)}=g_{n-1}^{(k)}+g_{n-2}^{(k)}+\cdots+g_{n-k}^{(k)}$。
此外, 該文還定義了 $g_n=g_{n+k-2}^{(k)}$。

比較 [2] 和本文之後, 可以看出 $g_{n+k-2}^{(k)}=g_n=F_n^{(k)}$, 說明如下:
由 $g_n=g_{n+k-2}^{(k)}$, 可得 $g_{n-(k-2)}=g_n^{(k)}$。

(1) 由 $g_{k-1}^{(k)}=g_k^{(k)}=1\Rightarrow g_{k-1-(k-2)}=g_{k-(k-2)}=1\Rightarrow g_1=g_2=1$。

(2) 由 $g_1^{(k)}=\cdots=g_{k-2}^{(k)}=0\Rightarrow g_{1-(k-2)}=\cdots=g_{(k-2)-(k-2)}=0\Rightarrow g_{-k+3}=\cdots=g_0=0$。

(3) 由 $g_n^{(k)}=g_{n-1}^{(k)}+g_{n-2}^{(k)}+\cdots+g_{n-k}^{(k)}$, 其中 $n>k\geq 2$
$\Rightarrow g_{n-(k-2)}=g_{n-1-(k-2)}+g_{n-2-(k-2)}+\cdots+g_{n-k-(k-2)}$, 其中 $n>k\geq 2$
$\Rightarrow g_n=g_{n-1}+g_n+\cdots+g_{n-k}$, 其中 $n>2$。

由 (1)(2)(3), 可知對於數列 $\{g_n\}$ 而言, 滿足 $g_1=g_2=1$, $g_{-k+3}=\cdots=g_0=0$ 與 $g_n=g_{n-1}+g_n+\cdots+g_{n-k}$, 其中 $n>2$。
回顧本篇文章 $F_n^{(k)}$ 的定義, 有 $F_1^{(k)}=1$, 與 $F_{-(k-2)}^{(k)}=\cdots=F_{-1}^{(k)}=F_0^{(k)}=0$, 其中 $k\geq 2$, 以及 $F_n^{(k)}=F_{n-1}^{(k)}+F_{n-2}^{(k)}+\cdots+F_{n-k}^{(k)}$, 可推出 $F_2^{(k)}=F_1^{(k)}+F_0^{(k)}+\cdots+F_{2-k}^{(k)}=1$。

至此, 可看出 $\{g_n\}$ 與 $\{F_n^{(k)}\}$ 有相同的初始條件(相同的前 $k$ 項): $g_1 = g_2 = 1$ 與 $g_{-k+3} = \cdots = g_0 = 0$, 以及遞迴關係式: $g_n = g_{n-1} + g_n + \cdots + g_{n-k}$, 其中 $n > 2$, 所以有 $g_{n+k-2}^{(k)} = g_n = F_n^{(k)}$。

(二) $h_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \dfrac{\det(V_1^{(k)})}{\det(V)}$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 是 $x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 = 0$ 的 $k$ 個相異根。

在 [2] 中, 定義了矩陣 $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}$ 與其轉置矩陣 $V = \Lambda^T$, 以及行列式 $\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}$ (其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ 也是 $x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 = 0$ 的 $k$ 個相異根)。較特別的是, 令 $d_i = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+i-1} \\ \lambda_2^{n+i-1} \\ \vdots \\ \lambda_k^{n+i-1} \end{bmatrix}$, 並定義 $V_j^{(i)}$ 是將 $V$ 的第 $j$ 行用 $d_i$ 取代後, 所得的一個 $k \times k$ 矩陣。接著, 本文開始證明如下的命題。

**命題**: $h_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \dfrac{\det(V_1^{(k)})}{\det(V)}$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 是 $x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 = 0$ 的 $k$ 個相異根。

**證明**:

$$\det(V_1^{(k)}) = \begin{vmatrix} \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ \lambda_2^{n+k-1} & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_k^{n+k-1} & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k) \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1^{n+k-2} & 1 & \cdots & \lambda_1^{k-2} \\ \lambda_2^{n+k-2} & 1 & \cdots & \lambda_2^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_k^{n+k-2} & 1 & \cdots & \lambda_k^{k-2} \end{vmatrix} \qquad \text{(各列分別提出 } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\text{)}$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n+k-2} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n+k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{n+k-2} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{k-1} \quad \text{(將原來的第一行換到最右一行)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n+k-2} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n+k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{n+k-2} \end{vmatrix}.$$

由 $h-L-V$ 轉換公式, 得

$$\Rightarrow \frac{\det(V_1^{(k)})}{\det(V)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n+k-2} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n+k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{n+k-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}} = h_{(n+k-2)-(k-1)}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$$

$$= h_{n-1}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = h_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k).$$

## 四、$h-L-V$ 觀點

本文到目前爲止, 已然證明了:

$$h_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i - 1}{2+(k+1)(\alpha_i - 2)} \alpha_i^{n-1} = \frac{\det(V_1^{(k)})}{\det(V)},$$

這三個形式上大相逕庭的表達式會相等, 並不是偶然的 : 注意到

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i - 1}{2+(k+1)(\alpha_i - 2)} \alpha_i^{n-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^{n+k-2}}{\prod\limits_{\substack{1 \le j \le k \\ j \ne i}} (\alpha_i - \alpha_j)} = L_{n+k-2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

以及

$$\frac{\det(V_1^{(k)})}{\det(V)}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n+k-2}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n+k-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{n+k-2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n+k-2}\\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n+k-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \alpha_k & \cdots & \alpha_k^{n+k-2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{k-1}\\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \alpha_k & \cdots & \alpha_k^{k-1}\end{vmatrix}},$$

可以看出, 在「$h-L-V$ 轉換公式」:

$$h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=L_{n+k-1}(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{(n-1)+k}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{(n-1)+k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{(n-1)+k}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}\end{vmatrix}} \text{ 之中,}$$

將 $k$ 與 $n$ 替換爲 $n-1$ 與 $k$, 並將變數 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 取爲 $x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1=0$ 的 $k$ 個相異根 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$, 即可得

$$h_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=L_{n+k-2}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n+k-2}\\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n+k-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \alpha_k & \cdots & \alpha_k^{n+k-2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{k-1}\\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \alpha_k & \cdots & \alpha_k^{k-1}\end{vmatrix}},$$

也就是

$$h_{n-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i-1}{2+(k+1)(\alpha_i-2)}\alpha_i^{n-1}=\frac{\det(V_1^{(k)})}{\det(V)},$$

至此, 已將三種表達式作了一個統整。

## 肆、結語

事實上, $F_n^{(k)}$ 有著各式各樣的表達式 (見 [1], p2), 以不同的姿態, 出現在不同的時空。本文的前半部, 先建立了在以往文獻上未見到的「完全齊次對稱多項式」表示法:

設 $k \geq 2$, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 爲 $x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1 = 0$ 的 $k$ 個相異根, 則有

$$F_n^{(k)} = h_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k),\ \text{其中 } n \geq 1。$$

並在後半部, 以 $h_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ 爲出發點, 連結到 $F_n^{(k)}$ 的另外兩個已知的表達式

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i - 1}{2 + (k+1)(\alpha_i - 2)} \alpha_i^{n-1} \quad \text{與} \quad \frac{\det(V_1^{(k)})}{\det(V)},$$

最後再以 $h - L - V$ 轉換公式, 對應出三個表達式背後的關聯性。可以說, 本文先爬上「完全齊次對稱多項式」這座山, 再從山上去看另外的兩座山, 進而辨認出連結這三座山的「$h - L - V$」山脈。

## 參考資料


1. Gregory P.B. Dresden, A Simplified Binet Formula for $k$-Generalized Fibonacci Numbers, *Journal of Integer Sequences*, Vol. 17, 2014.
2. Gwang-Yeon Lee, Sang-Gu Lee, Jin-Soo Kim and Hang-Kyun Shin, The Binet Formula and Representations of k-generalized Fibonacci Numbers, *Fibonacci Quarterly*, 39 (2001), 158-164.
3. 陳建燁。推廣的 Vandermonde 行列式 (最右行升次型)。高中數學學科中心電子報, 第 114 期 (2016), p1, 3, 11, 12。
4. 陳建燁。對稱多項式的 $e - h$ 恆等式(上)。高中數學學科中心電子報, 第124期 (2017), p1。


—本文作者任教台北市立第一女子高級中學—