數學傳播 45卷2期, pp. 44-53

格子圖形中的格子直線數

范谷瑜 · 林鳳美

在 k 維空間中, 由 k 個整數爲坐標的點 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 稱爲格子點。以格子點爲頂點的圖形稱爲格子圖形。皮克 (Pick, 1859~1942) 在 1899 年提出一個計算格子單純多邊形 (simple polygon) 的面積公式, 這公式僅需要知道多邊形中邊上及內部格子點的個數就可算出面積, 這是一個簡單又實用的計數方式。

本文選定某些特定格子圖形作探討, 計算通過特定格子圖形內所有點所需的格子直線之個數, 此個數簡稱格子直線數。注意本文所談的格子直線必過原點 O 且過非原點的格子點所成的連線。首先選定特定格子圖形是平面上的格子三角形, 計算格子直線數中, 進而探究出歐拉函數 (totient function) 的恆等式 (異於 (1) 式的式子)。爲了推廣, 將歐拉函數記作 $\varphi_1(n)$, 其中

$$\varphi_1(n) \text{ 表示爲不大於 } n \text{ 且與 } n \text{ 互質的正整數個數且 } \varphi_1(1)=1,$$

而歐拉函數 $\varphi_1(n)$ 的推廣爲喬丹函數 (Jordan's totient function), 記作 $\varphi_k(n)$, 即

$$\varphi_k(n) = n^k\Big(1-\frac{1}{p_1^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_2^k}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{p_m^k}\Big),\ \text{其中}\ \ \varphi_k(1)=1, \tag{1}$$

$p_1, \ldots, p_k$ 爲質因數。注意 (1) 式中 $k=1$ 時, 指常見的歐拉函數 $\varphi_1(n)$。

本文遵循歐拉函數出發與類推, 再配合平面至空間類推概念, 首先選定平面上的格子正方形及空間中的格子立方體來同步探究, 逐步發現其一般的規律, 因而擴充得到格子 k–超立方體 (k-hypercube) 的喬丹函數之恆等式, 驚喜地推導出兩個恆等式。

從選定某些特定圖形中, 配合特例, 進而發現規律到一般化的論證過程, 都富有創造性的思考啟發性, 值得追根究柢。

1. 歐拉函數的恆等式

甲、問題探原

歐氏幾何告訴我們「相異兩點決定一直線」, 由於同一條格子直線上有無限多個非原點的格子點型如:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k), (2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_k), \ldots, (dx_1, dx_2, \ldots, dx_k),\ \text{其中}\ d\ \text{爲正整數。}$$

事實上, 此格子直線可由原點 O 與非原點的格子點 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 所決定。

換言之, 所決定非原點的格子點爲滿足 $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$ 的格子點。因此, 非原點的格子點滿足 $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$ 的個數等於格子直線數。

例 1: 計算圖 1 中底與高皆爲 3 的格子三角形中格子直線數爲 $1 + \sum_{i=1}^{3} \varphi_1(i)$。

解答: 用描點法可知格子直線是由原點 O 分別與格子點 $(1,0), (1,1), (2,1), (3,1), (3,2)$ 五點連線所決定, 所以格子直線數爲 5。

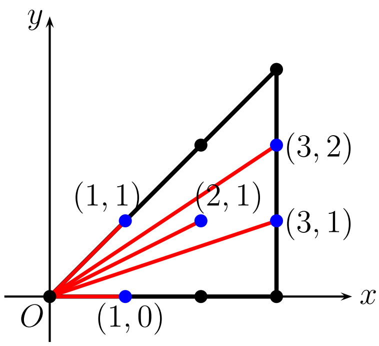

圖 1：底與高皆爲3的格子三角形

我們不妨考慮將圖1中格子三角形之格子直線數以歐拉函數 $\varphi_1(n)$ 來表示, 這絕對可辦到的。因爲非原點的格子點滿足 $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$ 的個數等於格子直線數, 而 $\gcd(x_1, x_2) = 1$ 這概念正符合歐拉函數, 建構方式是將非原點的格子點用直線 $x = i$ 上來區分 $(i = 1, 2, 3)$, 分成三類:

(i) 在直線 $x = 1$ 上：包含格子點有 $(1,0)$ 與 $(1,1)$。由於 $\gcd(1,0) = 1$, 可決定一條格子直線, 方便推廣將此格子直線數特別定義爲 $\varphi_0(1) = 1$。
又由於 $\gcd(1,1) = 1$, 可決定一條格子直線, 此格子直線數視爲 $\varphi_1(1) = 1$。

(ii) 在直線 $x = 2$ 上：滿足 $\gcd(2, x_2) = 1$ 的格子點僅有 (2,1), 可決定一條格子直線, 此格子直線數視爲 $\varphi_1(2) = 1$。

(iii) 在直線 $x = 3$ 上：滿足 $\gcd(3, x_2) = 1$ 的格子點有 $(3,1)$, $(3,2)$, 可決定二條格子直線, 此格子直線數視爲 $\varphi_1(3) = 2$。

因此, 由 (i)∼(iii) 知底與高皆爲 3 的格子三角形中的格子直線數爲

$$\varphi_0(1) + \varphi_1(1) + \varphi_1(2) + \varphi_1(3) = 1 + \sum_{i=1}^{3} \varphi_1(i)。 \qquad \square$$

由例 1 給我們二個啟發:

一、可用歐拉函數 $\varphi_1(n)$ 來協助計算格子三角形中的格子直線數。

二、在平面上, 由格子點 $(n,1),(n,2),\ldots,(n,t),\ldots,(n,n)$ 所成線段, 此線段上滿足 $\gcd(n,t)=1$ 的格子點個數為 $\varphi_1(n)$, 其中 $n\geq 2$, $t=1,2,\ldots,n$。

當然將格子點 (n,t) 改為 (t,n) 也成立。

同理, 推廣至 k 維空間中, 歐拉函數 $\varphi_1(n)$ 可視為滿足 $\gcd(n,n,n,\ldots,t)=1$ 的格子點 $(n,n,n,\ldots,t)$ 之個數, 其中 $t=1,2,3,\ldots,n$。

當然將格子點 $(n,n,n,\ldots,t)$ 改為 $(n,n,\ldots,t,n)$、$\cdots$、$(t,n,n,\ldots,n)$ 均成立。

乙、計數格子直線數

給定圖 1 中的格子三角形一般定義:

定義 1: 在平面上, 滿足 $0\leq x_2\leq x_1\leq n$ 的所有格子點所成的集合, 稱為底與高皆為 n 的格子三角形, 記作 $S([0,n]^2)$, 參見圖 1 中格子三角形 $S([0,3]^2)$。令 $a_2(n)$ 表示過原點且過在 $S([0,n]^2)$ 中非原點的格子點之格子直線數。

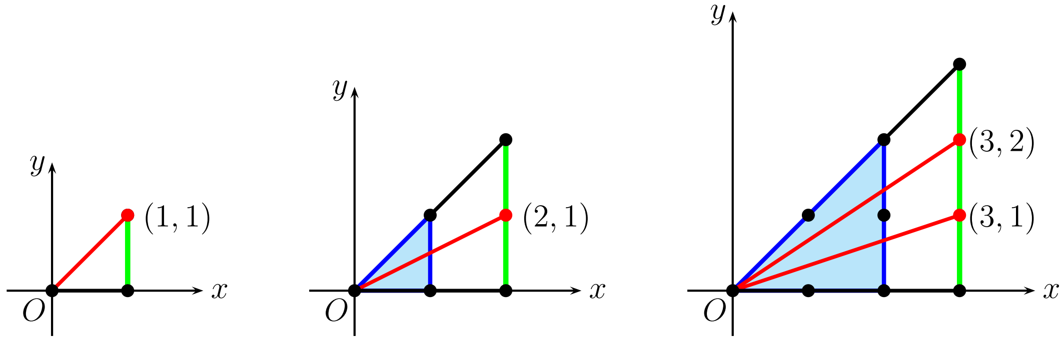

圖 2：格子三角形

例 1 中想用歐拉函數來協助計算格子直線數, 於是定義在 $S([0,n]^2)$ 而不在 $S([0,n-1]^2)$ 滿足 $\gcd(x_1,x_2)=1$ 的格子點稱為新增格子點, 連接原點 O 與新增格子點的直線稱為新增格子直線, 即新增格子直線數為 $a_2(n)-a_2(n-1)$。又從例 1 中得知 $a_2(n)-a_2(n-1)=\varphi_1(n)$, 參見圖 2, 即

$$a_2(n)=a_2(n-1)+\varphi_1(n),\ \text{其中}\ \varphi_1(1)=1\text{。}\tag{2}$$

如此一來, 歐拉函數 $\varphi_1(n)$ 可視為

$$S([0,n]^2)\ \text{而不在}\ S([0,n-1]^2)\ \text{的新增格子點之個數。}$$

同樣地, 當後面計算在格子 k-超立方體中的格子直線數也是類推如 (2) 式的遞迴關係來協助計數。

定理 1: (**計算在格子三角形中的格子直線數**)設 $a_2(n)$ 爲在格子三角形 $S([0,n]^2)$ 中的格子直線數, 則 $a_2(n)=1+\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(i)$。

證明: 由 (2) 式知 $a_2(n)=a_2(n-1)+\varphi_1(n)$。由遞迴關係可求得

$$a_2(n)=a_2(1)+\varphi_1(2)+\varphi_1(3)+\cdots+\varphi_1(n)。$$

又 $a_2(1)=2$, $\varphi_1(1)=1$ 所以

$$a_2(n)=1+(\varphi_1(1)+\varphi_1(2)+\cdots+\varphi_1(n))=1+\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(i)。\qquad\square$$

2. 喬丹函數的恆等式

甲、推導恆等式 (I)

前面推導歐拉函數 $\varphi_1(n)$ 的恆等式是針對滿足 $\gcd(n,t)=1$ 的格子點個數, 其中 $t=1,2,3,\ldots,n$。根據平面至空間類推概念, 可猜測喬丹函數 $\varphi_k(n)$ 的恆等式也可針對滿足 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_k,n)=1$ 的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 個數, 不妨採用格子正方形及格子立方體來思考是否可推導出 $\varphi_2(n)$ 與 $\varphi_3(n)$, 然而其推廣圖形即格子 k-超立方體, 定義爲

定義 2: 在 k 維空間中, 若滿足 $m\le x_i\le n$ $(i=1,2,\ldots,k)$ 的所有格子點形成的集合, 記爲 $[m,n]^k$, 其中 m,n 爲整數。當 $m=0$, $n>0$ 時, 則 $[0,n]^k$ 是一個邊長爲 n 的格子 k-超立方體 (k-hypercube), 含有 $(n+1)^k$ 個格子點, 參見圖 3 與圖 4。當 $n=0$ 時, 則 $[0,n]^k$ 恰含一個唯一的格子點, 就是原點 $O(0,0,\ldots,0)$。

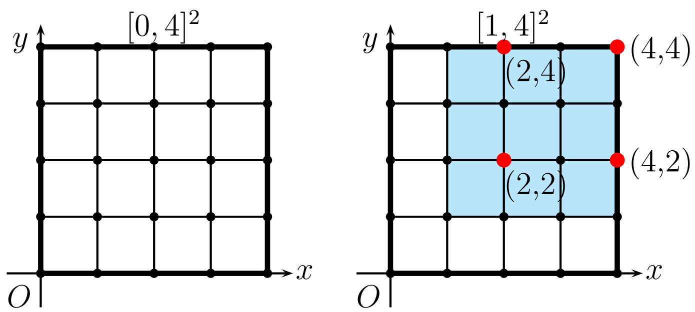

圖 3：格子正方形 $[0,4]^2$ 與 $[1,4]^2$

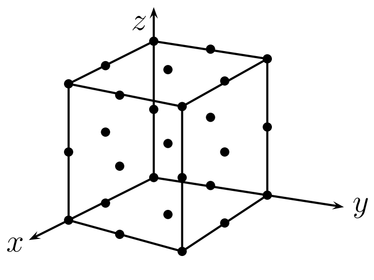

圖 4：格子立方體

我們可以考慮 $[1,n]^k$ 或 $[0,n-1]^k$, 底下就先從 $[1,n]^k$ 著手, 先觀察兩個特例。

例 2: 計算在 $[1,4]^2$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,4)=1$ 的格子點 (x_1,x_2) 個數爲 $\varphi_2(4)$。

解答: 由定義 2 知 $[1,4]^2$ 中含有 16 個格子點, 但若要滿足 $\gcd(x_1,x_2,4)=1$ 的格子點, 必須刪掉四個格子點 (2,2), (2,4), (4,2), (4,4), 所以得到 12 個格子點, 參見圖 3。又 $\varphi_2(4)=4^2\Big(1-\dfrac{1}{2^2}\Big)=12$, 故這樣的格子點個數剛好等於 $\varphi_2(4)$。 □

例 3: 計算在 $[1,2]^3$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,x_3,2)=1$ 的格子點 (x_1,x_2,x_3) 個數爲 $\varphi_3(2)$。

解答: 由定義 2 知 $[1,2]^3$ 中含有 8 個格子點, 但若要滿足 $\gcd(x_1,x_2,x_3,2)=1$ 的格子點, 必須刪掉格子點 (2,2,2), 所以得到 7 個格子點, 參見圖 5。

又 $\varphi_3(2)=2^3\Big(1-\dfrac{1}{2^2}\Big)=7$, 故這樣的格子點個數剛好等於 $\varphi_3(2)$。 □

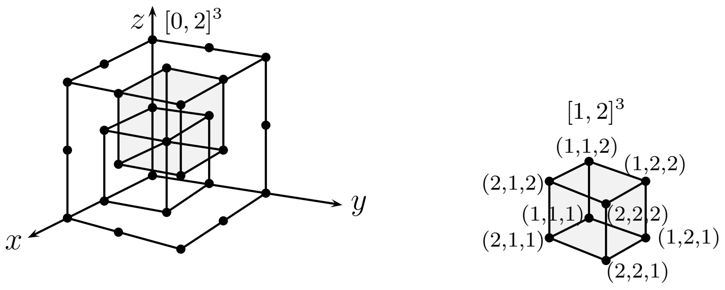

圖 5：格子立方體 $[0,2]^3$ 與 $[1,2]^3$

由例 2 與例 3 中可推測知喬丹函數 $\varphi_k(n)$ 表示在格子 k-超立方體 $[1,n]^k$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_k,n)=1$ 的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 的個數。特別是 $[1,1]^k$ 含 1 個格子點, 不難看出 $\varphi_k(1)=1$, 當 $n>1$, 則有定理 2。

定理 2: (**喬丹函數的恆等式** (I)) 設 n 的標準分解式爲 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$, 其中 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 爲相異質數且 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in N$, 若 $\varphi_k(n)$ 爲 k-超立方體 $[1,n]^k$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_k,n)=1$ 的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 的個數, 則

$$\varphi_k(n)=n^k\Big(1-\frac{1}{p_1^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_2^k}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{p_m^k}\Big),\quad \text{其中 } \varphi_k=1。$$

證明: 底下就來證明 $n>1$ 的情形。若 d 爲 n 的正因數, 令 M_d 是在 $[1,n]^k$ 中滿足坐標 $x_1,x_2,\ldots,x_k$ 都是 d 的倍數的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 所成的集合。
因爲每個整數都是 1 的倍數, 得到 $M_1=[1,n]^k$。

由於 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in M_d$ 的充要條件爲 $x_i\in\Big\{1d,2d,\ldots,\Big(\dfrac{n}{d}\Big)d\Big\}$, 所以 $|M_d|=\Big(\dfrac{n}{d}\Big)^k$。因此, 由取捨原理知

$$\begin{aligned}
\varphi_k(n) &= \big|[1,n]^k - M_{p_1}\cup M_{p_2}\cup\cdots\cup M_{p_m}\big|\\
&= \big|[1,n]^k\big| - \sum_{1\le i\le m}|M_{p_1}| + \sum_{1\le i<j\le m}\big|M_{p_i}\cap M_{p_j}\big| - \cdots + (-1)^m\,|M_{p_1}\cap M_{p_2}\cap\cdots\cap M_{p_m}|\\
&= |M_1| - \sum_{1\le i\le m}|M_{p_1}| + \sum_{1\le i<j\le m}|M_{p_ip_j}| - \cdots + (-1)^m|M_{p_1p_2\cdots p_m}|\\
&= \Big(\frac{n}{1}\Big)^k - \sum_{1\le i\le m}\Big(\frac{n}{p_i}\Big)^k + \sum_{1\le i<j\le m}\Big(\frac{n}{p_ip_j}\Big)^k - \cdots + (-1)^m\Big(\frac{n}{p_ip_j\cdots p_m}\Big)^k\\
&= n^k\Big\{1 - \sum_{1\le i\le m}\frac{1}{p_i^k} + \sum_{1\le i<j\le m}\frac{1}{p_i^k}\cdot\frac{1}{p_j^k} - \cdots + (-1)^m\frac{1}{p_i^k}\cdot\frac{1}{p_j^k}\cdots\frac{1}{p_m^k}\Big\}\\
&= n^k\Big(1-\frac{1}{p_1^k}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_2^k}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{p_m^k}\Big).
\end{aligned}$$

乙、推導恆等式 (II)

現在從 $[0,n-1]^k$ 中推導喬丹函數的第二個恆等式, 先觀察一個特例:

例 4: 計算在 $[0,3]^2$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,4)=1$ 的格子點 (x_1,x_2) 個數爲 $\varphi_2(4)$。

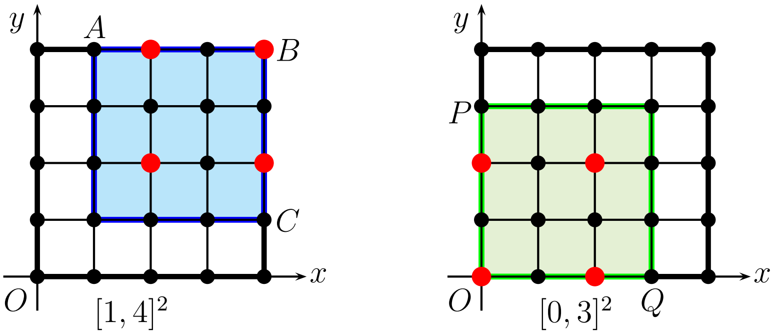

圖 6： 格子正方形 $[1,4]^2$ 與 $[0,3]^2$

解答: 考慮 $[1,4]^2$ 與 $[0,3]^2$ 中不重疊的格子點 (x_1,x_2), 參見圖 6, 在 $[1,4]^2$ 中爲 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 上的格子點, 而在 $[0,3]^2$ 中爲 $\overline{OQ}$ 與 $\overline{OP}$ 上的格子點。由於 $OP\equiv n(\bmod n)$, 所以 $[1,4]^2$ 中 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 上滿足 $\gcd(x_1,x_2,4)=1$ 的格子點 (x_1,x_2) 分別對應 $\overline{OQ}$ 與 $\overline{OP}$ 上滿足 $\gcd(x_1,x_2,4)=1$ 的格子點 (x_1,x_2), 所以在 $[1,4]^2$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,4)=1$ 的格子點 (x_1,x_2) 個數等於在 $[0,3]^2$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,4)=1$ 的格子點 (x_1,x_2) 個數, 因此, 由定理 2 知在 $[0,3]^2$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,4)=1$ 的格子點 (x_1,x_2) 個數爲 $\varphi_2(4)$。

由例 4 可推論出k-超立方體 $[0,n-1]^k$ 中 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_k,n)=1$ 的格子點個數爲 $\varphi_k(n)$, 爲了區別證明, 將 $[0,n-1]^k$ 中 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_k,n)=1$ 的格子點個數記作 $\varphi_k^*(n)$, 於是 $\varphi_k^*(n)=\varphi_k(n)$。

定理 3:(**喬丹函數的恆等式** (II)) 設 $\varphi_k^*(n)$ 爲 k-超立方體 $[0,n-1]^k$ 中 $\gcd(x_1,x_2,\ldots,x_k,n)=1$ 的格子點 $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ 的個數, 則 $\varphi_k^*(n)=\varphi_k(n)$, 其中 $\varphi_k(1)=1$ 及 $\varphi_0^*(n)=\begin{cases}1, & \text{當 } n=1\\ 0, & \text{當 } n\neq 1\end{cases}$。

證明: 當 $n=1$ 時, $[0,n-1]^k$ 恰含唯一的格子點, 即原點 $O=(0,0,\ldots,0)$。又 $\gcd(0,\ldots,0,1)=1$, 所以 $\varphi_0^*(1)=1$。當 $n\neq 1$ 時, $\gcd(0,\ldots,0,1)\neq 1$, 所以 $\varphi_0^*(n)=0$。其餘的情形仿照定理 2來證明。將定理 2 中 $\left\{1d,2d,\ldots,\left(\frac{n}{d}\right)d\right\}$ 以 $\left\{0,1d,2d,\ldots,\left(\frac{n}{d}-1\right)d\right\}$ 取代, 並討論之, 同時也可以得到 $\varphi_k(n)$ 也是在 $[0,n-1]^k$ 中滿足條件 $\gcd(0,\ldots,0,1)=1$ 的格子點個數。 □

3. 計數格子直線數

現在要採用喬丹函數來計算在 $[0,n]^k$ 中的格子直線數, 於是令 $b_k(n)$ 表示過原點且過在 $[0,n]^k$ 中非原點的格子點之格子直線數。定義在 $[0,n]^k$ 而不在 $[0,n-1]^k$ 滿足 $\gcd(x_1,x_2)=1$ 的格子點稱爲*新增格子點*, 連接原點 O 與新增格子點的直線稱爲*新增格子直線*, 即新增格子直線數爲 $b_k(n)-b_k(n-1)$。

(2) 式談到新增格子直線數 $a_2(n)-a_2(n-1)=\varphi_1(n)$, 但此時

$$\text{新增格子直線數 } b_k(n)-b_k(n-1)\neq\varphi_k^*(n)。$$

這乃是類推至高階的妙趣所在, 就從一個特例一看究竟。

例 5: 計算在 $[0,n]^2$ 中的格子直線數爲 $b_2(n)=3+C_1^2\sum_{i=2}^{n}\varphi_1^*(i)$。

解答: 顯然在 $[0,1]^2$ 中但不在 $[0,0]^2$ 的新增格子直線數爲 2^2-1, 即 $b_2(1)=3$。

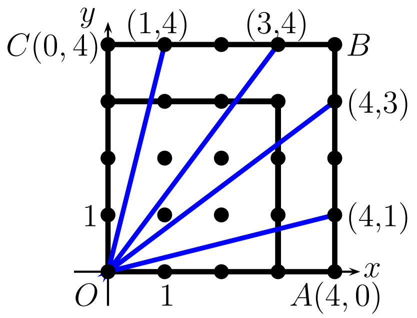

圖7 : 計算 $[0,n]^2$ 的格子直線數

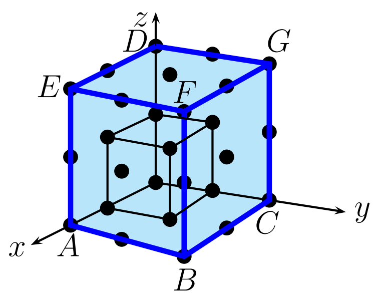

圖8 : 計算 $[0,n]^3$ 的格子直線數

由圖 7 知新增格子點落在線段 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 上的格子點, 這些格子點型如:

$$(t,n) \text{ 及 } (n,t) \text{ 等二種情形, 其中 } 0 \le t \le n。$$

又每種滿足 $\gcd(t,n)=1$ 的格子點個數等於 $\varphi_1^*(n)$, 所以

$$b_2(n) - b_2(n-1) = 2\varphi_1^*(n),\ \text{即 } b_2(n) = b_2(n-1) + 2\varphi_1^*(n)。$$

由遞迴關係可求得

$$b_2(n) = b_2(1) + 2(\varphi_1^*(2) + \varphi_1^*(3) + \cdots + \varphi_1^*(n))。$$

又 $b_2(1)=3$, 因此,

$$b_2(n) = 3 + 2\sum_{i=2}^{n}\varphi_1^*(i),\ \text{方便推廣寫成 } b_2(n) = 3 + C_1^2\sum_{i=2}^{n}\varphi_1^*(i)。 \qquad \square$$

底下要計數在 $[0,n]^3$ 中的格子直線數, 仿照例 5 的推導方式。

定理 4: (**計算在 $[0,n]^3$ 中的格子直線數**) 設 $b_3(n)$ 爲在 $[0,n]^3$ 中的格子直線數, 則

$$b_3(n) = 7 + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{n} C_j^3\varphi_j^*(i)。$$

證明: 顯然在 $[0,1]^3$ 中但不在 $[0,0]^3$ 的新增格子直線數爲 2^3-1, 即 $b_3(1)=7$。底下 $n\ge 2$ 的情形, 欲求新增格子直線數 $b_3(n)-b_3(n-1)$, 即求新增格子點數。由圖 8 知新增格子點落在平面 $DEFG$、$ABFE$ 與 $BCGF$ 上的格子點 (x_1,x_2,x_3), 將 x_1,x_2,x_3 排序 $x_{(3)} \le x_{(2)} \le x_{(1)} = n$ 分成互斥 2 類:

(i) 當 $0 \le x_{(3)} \le x_{(2)} \le x_{(1)} = n$ 時, 是指圖 8 中不含 $\overline{BF}$、$\overline{EF}$ 及 $\overline{FG}$ 的平面 $DEFG$、$ABFE$ 與 $BCGF$ 上的格子點。又每種平面上的格子點個數爲 $\varphi_2^*(n)$, 共有三種, 所以新增格子直線數爲 $3\varphi_2^*(n)$, 方便推廣可寫成 $C_2^3\varphi_2^*(n)$。

(ii) 當 $0 \le x_{(3)} \le x_{(2)} = x_{(1)} = n$ 時, 是指圖 8 中 $\overline{BF}$、$\overline{EF}$ 及 $\overline{FG}$ 的上的格子點, 又每種線段上的格子點個數爲 $\varphi_1^*(n)$, 共有三種, 所以新增格子直線數爲 $3\varphi_1^*(n)$, 方便推廣可寫成 $C_1^3\varphi_1^*(n)$。

由 (i) 與 (ii) 知故 $b_3(n)-b_3(n-1) = C_1^3\varphi_1^*(n) + C_2^3\varphi_2^*(n)$, 即

$$b_3(n) = b_3(n-1) + \sum_{j=1}^{2} C_j^3\varphi_j^*(n)。$$

由遞迴關係可求得

$$b_3(n)=b_3(1)+\sum_{j=1}^{2}C_j^3\varphi_j^*(2)+\sum_{j=1}^{2}C_j^3\varphi_j^*(3)+\cdots+\sum_{j=1}^{2}C_j^3\varphi_j^*(n)。$$

又 $b_3(1)=2^3-1=7$, 因此, $b_3(n)=7+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{n}C_j^3\varphi_j^*(i)$。 □

仿照定理 4 推廣至 k 維, 同樣地可用 $\varphi_1^*(n),\varphi_2^*(n),\ldots,\varphi_{k-1}^*(n)$ 來計數格子直線數 $b_k(n)$, 參見定理 5。

定理 5: (**計算在** $[0,n]^k$ **中的格子直線數**) 設 $b_k(n)$ 爲在 $[0,n]^k$ 中的格子直線數, 則

$$b_k(n)=(2^k-1)+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=2}^{n}C_j^k\varphi_j^*(i)。$$

特別的, 考慮 0 維的情形, 可將式子再改寫成 $b_k(n)=\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}C_j^k\varphi_j^*(i)$。

4. 結語

本文探討某特定格子圖形中過原點的格子點的直線數, 若計數不採新增格子點方式來看, 相當困難的, 於是爲了克服計算部分, 不停地在數量上做些改變, 驚喜地得到了喬丹函數的二個恆等式, 因而在計數上化繁爲簡。

這裡探究過程中正符合是古希臘哲學家蘇格拉底所採用的「*產婆法*」–知識是一種「發現」, 強調「引出」、「誘發」, 從解決「計算格子直線數」這單純問題, 建構一套合理的論述, 再由數學概念理解發展至理論化, 驚喜開拓了喬丹函數的數學世界, 也享受開啟數學知識的喜悅。

此外, 若配合由平面上格子三角形類推空間中格子三角錐來聯想, 理論上還可以擴充至格子 k-單體 (simplex), 這圖形內格子點較特殊, 將成另一篇文章展現, 敬請期待, 有興趣讀者, 不妨試一試。

數學家拉普拉斯 (Laplace, 1749∼1827) 說:

讀 Euler, 讀 Euler, 他是我們全能的大師。

Read Euler, read Euler, he is the master of us all.

有人將歐拉比擬爲數學界的莎士比亞 (the Shakespeare of Mathematics):

普世性, 鉅細靡遺, 取之不盡, 用之不竭。

Universal, richly detailed, and inexhaustible.

可見歐拉活在的每個數學角落裡, 他提出的數學創作值得我們永恆地拜讀, 甚至使之美麗。

本文是指導范同學參賽 2017 年台灣區國際科展作品 :「格子直線數與歐拉函數之探討與推廣」, 提及在特定格子圖形中利用喬丹函數來計算格子直線數, 這是一個美妙的發想。有感指導參賽作品內容複雜且難以閱讀, 於是改寫參賽作品中最精髓部分將它描述清楚, 使成為更清晰可見的文章。再者, 分享計數上一個不錯的結果, 也作為喬丹函數的應用範疇。最後深深感謝審稿教授對此文章的指正與建議, 使本文有更好論述的標題及內容。

參考文獻

1. Andrica, D. and Piticari, M., On some extensions of Jordan's arithmetic functions. *Acta Univ. Apulensis Math. Inf.*, No.7, 13-22, 2004.
2. Dickson, L., *History of The Theory of Numbers.* I, Chelsea Publishing Co., New York, 1996.

—本文作者范谷瑜投稿時為清華大學數學系大四學生, 林鳳美任教於臺北市立成淵高級中學—