數學傳播 45卷2期, pp. 29-37

9 的倍數的數字和是 9 的幾倍

張進安

這個題目聽起來有點像繞口令, 大部分人從小學五年級起就知道:『9 的倍數的數字和一定是 9 的倍數』, 也知道它的充要條件『數字和是 9 的倍數的數一定是 9 的倍數』。可是一定還有很多像我這樣一個學數學、教數學合起來超過 50 年的人, 卻從來不曾考慮這個問題 —『9 的倍數的數字和到底是 9 的幾倍?』

對一個大數 n, 如果能在 $n\times 9$ 尚未算出積之前, 就有一套公式或方法來直接判斷 $9n$ 的數字和是 9 的幾倍, 也許就比較像個能掌握整數的人了。譬如有人先預告說: 123456789×9 的積的數字和只有 9; 而 987654321×9 的積的數字和是 81; 不知道會不會先引起你的懷疑, 再激起你的興趣, 這事兒值得拿起計算機驗證一下:

$123456789\times 9=1111111101$, 數字和正好是 9;
$987654321\times 9=8888888889$, 數字和 81 正好是 9 的 9 倍。

顯然 9 的倍數的數字和大小, 和被乘數字串的遞增或遞減有很大的關係。可是人生際遇的數常不是如此單調。例如有名的 Martin Gardner 九位數 381654729, (指 1 到 9 數字各用一次, 使得前兩位是 2 的倍數, 前三位是3的倍數 $\cdots$ 依此類推到 9 的唯一解。) 高低起伏變化大, 乘以 9 的積的數字和恐怕就不太容易掌握了。好在現代手機的計算器功能強大, 能處理三十位左右的有效數字; 加上已知這個積的數字和原數字串的遞增或遞減大有關係, 萬事俱備, 應該可以找到一個公式或通則來嚇大家一跳吧!

為了研究及表達的統一與方便, 我們先定義一個函數:

$$f(n)=\frac{n\times 9\text{的數字和}}{9}.$$

所以 $f(n)$ 是一個正整數對應到正整數的函數。例如

$$f(1957)=\frac{1957\times 9\text{的數字和}}{9}=\frac{17613\text{的數字和}}{9}=\frac{1+7+6+1+3}{9}=2.$$

現在我們可以由簡到繁逐步來建立一套規則:

規則一: n 是常數字串。(即形如 5, 22, 3333, 777777, 888888888 $\cdots$ 等等)。則 $f(a\cdots a)=a$ 的字串個數。

顯然 $f(5)=\dfrac{4+5}{9}=1$, $f(22)=\dfrac{1+9+8}{9}=2$,

$f(3333)=\dfrac{2+9+9+9+7}{9}=4$,

$f(777777)=\dfrac{6+9+9+9+9+9+3}{9}=6$,

$f(8888888888)=\dfrac{7+9+9+9+9+9+9+9+9+9+2}{9}=10$。

證明如下: 設 a 大於 0, 因爲 $aa\cdots aa\times 9=aa\cdots aa\times(10-1)=aa\cdots aa0-aa\cdots aa$, 寫成直式爲:

$$\begin{array}{cccccccc} & a & a & a & \cdots\cdots & a & 0 \\ - & & a & a & \cdots\cdots & a & a \\ \hline & (a-1) & 9 & 9 & \cdots\cdots & 9 & (10-a) \end{array}.$$

所以當 n 是連續 k 個相同的非 0 字串 $aa\cdots aa$ 時, 上列算式除了最高位之外, 每一位都必須借位來減, 必有中間連續 $k-1$ 個 9, 加上首位數 $a-1$ 及個位數 $10-a$, 消去 a 之後, 數字和正好是 k 個 9, 所以 $f(a\cdots a)=a$ 的字串個數。

規則二: n 是遞增數列字串 (不必嚴格遞增), (即形如 123, 255566, 677789999 $\cdots$ 等等)。則 $f(n)=n$ 的最大數字字元的個數。即

$f(123)=1$, 最大數字 3 有 1 個;

$f(255566)=2$, 最大數字 6 有 2 個;

$f(677789999)=4$, 最大數字 9 有 4 個;

簡單的證明如下: 設 $n=abcde\cdots rs\cdots s$ 爲遞增字串, 最大數字 s 連續 k 個。

即 $a\le b\le c\le d\le\cdots\le r<s$, 也因 $r<s$ 則 $s-1-r\ge 0$,

所以 $n\times 9=n\times(10-1)=n\times 10-n$, 寫成直式爲:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & a & b & c & d & \cdots\cdots & r & s & s & \cdots\cdots & s & 0 \\ - & & a & b & c & d\ \cdots\cdots & & r & s & \cdots\cdots & s & s \\ \hline & a & (b-a) & (c-b) & (d-c) & \cdots\cdots & \cdots & (s-1-r) & 9 & \cdots\cdots & 9 & (10-s) \end{array}.$$

因爲 $a\le b\le c\le d\le\cdots\le r<s$, 所以除了個位數之外, 其餘每一位數都不需借位來減。因此這個算式結果的數字和, 自左到右爲 $(a)+(b-a)+(c-b)+(d-c)+\cdots+(s-1-$

$r)+9+\cdots+9+(10-s)=9+9+\cdots+9=9\times k$, 恰好消去所有符號, 只留下和 s 的個數相等的 k 個 9 相加, 所以 $f(n)=\dfrac{9\times k}{9}=k=$ 最大數字字元的個數。

規則三: n 是遞減數列字串 (不必嚴格遞減), (即形如 321, 6642211, 9865222000 $\cdots$ 等等)。則 $f(n)=n$ 的非 0 字串位數, 即

$f(321)=3$, 3 位遞減;

$f(6642211)=7$, 7 位遞減;

$f(9865222000)=7$, 非 0 的 7 位遞減。

證明如下: 設 $n=abcd\cdots xy$, $a\geq b\geq c\geq d\geq\cdots\geq x\geq y>0$, 為遞減的 k 位數, (末尾的 0 或連續的 0 不用考慮, 應該是很明顯的吧。)

因為 $9\times n=n\times(10-1)=n\times 10-n$, 寫成直式

$$\begin{array}{cccccccc}
 & a & b & c & d & \cdots\cdots\ x & y & 0 \\
- & & a & b & c & d\ \cdots\cdots & x & y \\
\hline
 & (a-1) & (10+b-1-a) & (10+c-1-b) & (10+d-1-c) & \cdots\cdots\ \cdots & (10+y-1-x) & (10-y)
\end{array}.$$

因為 $a\geq b\geq c\geq d\geq\cdots\geq x\geq y>0$, 所以除了最高位的 a 之外, 每一位都必須進行借位減法, 因此差的數字和自左到右為為 $(a-1)+(10+b-1-a)+(10+c-1-b)+(10+d-1-c)+\cdots+(10+y-1-x)+(10-y)=9+9+\cdots+9=9\times k$, 恰好消去所有符號, 所以 $f(abcd\cdots xy)=\dfrac{9\times k}{9}=k$。

到此為止, 你大概可以發現：規則一其實就是規則二和規則三的特例, 也是兩條規則的交集, 實際運用起來才不會產生矛盾。

規則四: 當 n 同時有遞增及遞減字串。將 n 視為字串的折線, 依遞增及遞減分段, 利用規則二和規則三, 決定每段的數字和是 9 的幾倍, 逐段累加, 再用規則一減去每一段重疊部分 (包括只重疊一位數的), 即可求出 $f(n)$ 的值。

舉 $n=1234321$ 為例說明一下, 是一個倒 V 型的折線, 其中 1234 遞增, 4321 遞減, 重疊的 4 有 1 位, 所以 $f(1234321)=f(1234)+f(4321)-f(4)=1+4-1=4$ 。

實際驗證 $1234321\times 9=11108889$, 3 個 1, 3 個 8, 1 個 9, 所以 $f(1234321)=4$, 正確無誤。

又如 $n=87655557899$, 是一個 U 型的折線, 其中 8765555 遞減, 55557899 遞增, 重疊的 5555 有 4 位, 所以 $f(87655557899)=f(8765555)+f(55557899)-f(5555)=7+2-4=$

5, 實際驗證 $87655557899 \times 9 = 788900021091$, 兩個 9, 兩個 8 和 1, 1 個 7 和 2, 好 5 個 9, 正確無誤。

再舉一個更複雜的例子, $n = 12533338999$, 是 N 型的折線, 其中 125 遞增, 53333 遞減, 33338999 遞增, 重疊的 5, 3333 兩段; 所以

$$f(12533338999) = f(125)+f(53333)+f(33338999)-f(5)-f(3333) = 1+5+3-1-4=4.$$

驗證 $12533338999 \times 9 = 112800050991$, $9 + 9 + (8 + 1) + (5 + 2 + 1 + 1) = 36$, 所以 $f(12533338999) = 4$, 正確無誤。

規則四當然應該證明, 可是 n 的遞增、遞減、重疊的各段長度都是不定的, 折線折了幾次也是不定的, 本應該像數學歸納法的證明那樣, 先證明 n 只有一段折線時, 無論是常數或遞增或遞減, 都可依規則一、二、三之一, 使 $f(n)$ 成立; 並假設 n 有 k 段折線時, $f(n)$ 依規則四成立; 最後證明當 n 再多出一段折線時, 也能依規則四, 分已完成的 k 段折線和新增的第 $k+1$ 段折線, 使得 $f(n)$ 成立。但表達起來太麻煩了, 所以偷懶一下, 這裡只證明由遞增轉爲遞減, 及由遞減轉爲遞增這兩種基本形式, 爲何都要減去中間重疊的那一段。請特別注意這兩種基本問題大不一樣, 一種是重複計算要扣除, 另一種是只算一次的也要扣除。

假設 ABC 是由遞增轉爲遞減的字串, 其中 B 是重疊的常數字串, 則因爲 $f(AB) = f(B)$; 且 BC 是遞減字串, 所以 $f(BC) = f(B) + f(C)$, 顯然 $f(ABC) = f(B) + f(C)$ 而已, 否則若 $f(ABC) = f(B)+f(BC) = f(B)+f(B)+f(C)$, $f(B)$ 重複計算極不合理, 將有可能使 $f(ABC)$ 大於字串 ABC 的位數, 造成矛盾, 所以 $f(ABC) = f(B) + f(C) = f(B) + f(BC) - f(B)$。

若 BCD 是由遞減轉爲遞增字串, 其中C是重疊的常數字串, 因爲BC遞減, 則 $f(BC) = f(B)+f(C)$; 且 CD 是遞增字串, 則, $f(CD) = f(D)$, 原以爲 $f(BCD) = f(B)+f(C)+f(D)$ 會成立, 沒想到舉幾個實例計算都失敗了。例如 $f(5433367) = \dfrac{48900303\text{ 的數字和}}{9} = 3 \neq f(54) + f(333) + f(67)$ 而是等於 $f(54) + f(67)$, 可見重疊的 $f(333)$ 必須扣除, 這將是本研究最困難的部分, 只好回到最原始的方法了。

設 BCD 爲由遞減轉爲遞增的字串, 其中 $B = b_1b_2\cdots b_s$, $C = cc\cdots c$ (k 個 c), $D = d_1d_2\cdots d_t$。所以 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_s > c < d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_t$。

因爲 $BCD \times 9 = BCD \times (10-1) = BCD \times 10 - BCD$, 將字串展開寫成直式爲:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & b_1 & b_2\cdots\cdots & b_s & c & c\ \cdots\ c & d_1 & d_2 & \cdots & \cdots & d_t & 0 \\
- & & b_1\ b_2\ \cdots & b_{s-1} & b_s & c\ \cdots\ c & c & d_1 & d_2 & \cdots\ d_{t-1} & & d_t \\
\hline
 & (b-1) & \cdots\cdots & & (10+c-b_s) & 0\ \cdots\ 0 & (d_1-1-c) & & \cdots & \cdots & & (10-d_t)
\end{array}.$$

觀察上列算式 B 部分是遞減字串, 由規則三得知此段數字和爲 $9\times f(B)+c$;

觀察上列算式 D 部分是遞增字串, 由規則二得知此段數字和爲 $9\times f(D)-c$;

觀察上列算式 C 部分是常數字串, 但因爲 $d_1>c$, 所以 $d_1-1-c\geq 0$, 此項之後的 $c-c$ 都不必被借位, 將會出現連續 $k-1$個 0。

所以 $BCD\times 9$ 的數字和爲 $9\times f(B)+c+9\times f(D)-c=9\times f(B)+9\times f(D)$,

所以 $f(BCD)=f(B)+f(D)=f(BC)+f(CD)-f(C)$。

其實由遞增轉爲遞減字串也可以用上面的方法來證明, 只是中間重疊的 B 部分, 每一位都需要借位相減, 將會有 $k-1$ 個 9, 所以 $f(ABC)=f(B)+f(C)=f(B)+f(BC)-f(B)$ 才得證。現在我們終於弄明白了, 由遞增轉爲遞減的字串, 重疊的常數字串是因爲重複計算所以要扣除; 由遞減轉爲遞增的字串, 重疊的常數字串是因爲錯一位相減時不必借位, 造成連續的 0 才要扣除。所以重疊的部分, 不論是波峰或波谷都必須扣除。

規則五: 當 n 的字串中有 0 時, 無論 0 連續幾個, 將每一段的 0 視爲斷點, 直接分段再依前述四條規則計算。例

$$\begin{aligned}f(202003211145)&=f(2)+f(2)+f(3211145)\\&=f(2)+f(2)+f(32111)+f(11145)-f(111)\\&=1+1+5+1-3=5\end{aligned}$$

驗證 $202003211145\times 9=1818028900305$, 所以 $f(202003211145)=5$, 正確無誤。

這個規則比較容易明白, 如果 $n=A0B$, 其中 A 和 B 是字串, 假設 0 是在 10 的 k 次方位置上, 那麼 $B\times 9$ 進位到 10 的 k 次方位的數最多是 8, 和 $A\times 9$ 的最低位 (10 的 $k+1$ 次方位) 毫不相干, 當然數字和可以分段計算了。不過若不是 0, 就不能當斷點分開; 若不是遞增或遞減的折線的端點, 也不能用規則四來處理, 否則就不正確了。例如 $f(1233888652)$ 若拆成 $f(1233)+f(888652)$ 兩相比較一下:

正確解法 $f(1233888652)=f(1233888)+f(888652)-f(888)=3+6-3=6$,

錯誤解法 $f(1233888652)=f(1233)+f(888652)=2+6=8$,

驗算 $1233888652\times 9=11104997868$, 所以 $f(1233888652)=6$。

綜合上述的規則, 我們也可以採取 step by step 的方式, 來觀察 $f(n)$ 的變化:

$$\begin{aligned}
&f(1)=1\\
&f(12)=1\\
&f(123)=1\\
&f(1235)=1\\
&f(12355)=2\\
&f(123555)=3\\
&f(1235556)=1 \qquad \text{— 這裡會變小, 也是令人討厭的地方}\\
&f(12355566)=2\\
&f(123555665)=3\\
&f(1235556654)=4\\
&f(12355566548)=4\\
&f(123555665489)=4
\end{aligned}$$

設 n 的字串爲 N, 在 N 的末尾再加一個字元 x, 觀察 $f(Nx)$ 的變化, 可以歸納出一些規律。對 N 的最後一個字元 s 而言, x 和 s 的大小關係, 將是 $f(Nx)$ 變化的關鍵:

$$\begin{aligned}
&\text{若 } x=0 \text{ 則 } f(Nx)=f(N),\\
&\text{若 } x=s \text{ 則 } f(Nx)=f(N)+1,\\
&\text{若 } x<s \text{ 則 } f(Nx)=f(N)+1.
\end{aligned}$$

都是很明顯的結果; 只有在 $x>s$, 且 N 的最後字元是連續的 k 個 s 時, $f(Nx)=f(N)-k+1$, 才是所有變化中的最大麻煩, 也是最令人不滿意的地方。

承蒙數學傳播審稿老師的指導, 我把這個 step by step 的方向反過來, 從最低位值的字元開始來觀察 $f(n)$ 的變化:

當 $a\neq 0$ 時 $f(a)=1$, 且 $a\times 9=(a-1)\times 10+(10-a)$, 所以 $(a-1)$ 將進到下一位, 留下 $(10-a)$ 在原位值。考慮 $f(ba)$ 因爲 $b\times 9=(b-1)\times 10+(10-b)$, 如果進位過來的 $(a-1)$ 加上留在原位的 $(10-b)$ 小於或等於 9, 則 $f(ba)=2$。意思是說 a 和 b 各乘以 9 的數字和, 因爲未進位而保留兩個 9 的和; 如果 $(a-1)+(10-b)\geq 10$, 則 $f(ba)=1$ 意思是說 a 和 b 各乘以 9 的數字和因進位而減少了一個 9。回頭整理這個條件:

$$\begin{aligned}
(a-1)+(10-b)\leq 9 \text{ 則 } a-b\leq 0,\\
\text{即 } b\geq a \text{ 時 } f(ba)=2;\\
\text{所以 } b<a \text{ 時 } f(ba)=1\text{。}
\end{aligned}$$

從這個分析過程, 我們得到一個重要的結論, 甚至可以稱爲:

$9n$ 的數字和定理:

$$f(n) = (n \times 9 \text{ 的數字和})/9 = n \text{ 的非 0 字元個數減去加法的進位次數}$$
$$= n \text{ 的非 0 字元自右向左不遞減的次數。}$$

這裡必須說明：每一個 n 的非 0 字元乘以 9, 都會得到兩個和爲 9 的數, 如果都不進位, 數字和就是 9 的 (n 的非 0 字元個數) 倍; 但因爲位值的問題, 當兩個同位值的數的和大於或等於 10, 就必須進位。例如 5+7 本來是 12, 進位以後的數字和是 1+2, 只等於 3, 相當於少了一個 9。所以我們只要知道 n 的字元個數, 減去 $n \times 9$ 過程中加法的進位次數, 就可以得到 $f(n)$ 了。可是我們原來的目標是, 在不乘開 $n \times 9$ 的限制下求出 $f(n)$, 幸好上述：$b \geq a$ 時, $f(ba) = 2$; 及 $b < a$ 時, $f(ba) = 1$ 的證明過程, 淸楚的告訴我們, 進位的時機一定發生在『相鄰的高位値字元小於低位値字元』時, 所以還是可以在不乘開的條件下判斷出進位的次數。

因爲 $n \times 9$ 的運算從右到左一固定就不再變動, 所以我們可以得到一個更簡單的方法來處理這個問題：當 $f(aN) = k$ 爲已知, 其中 aN 是一字串, a 是此字串的最高位。在 aN 之前加一數字 b, 若 $b > a$ 時, $f(baN) = k + 1$, 若 $b < a$ 時, $f(baN) = k$。若 $b = a$ 且 a 在字串自右算起爲遞增狀態, 則 $f(baN) = k + 1$; 若 $b = a$ 且 a 在字串自右算起爲遞減狀態, 則 $f(baN) = k$。

這個定理的運作方式很簡單, 從 $f(n)$ 的 n 的右邊先加個 0 (個位), 開始向左計數, 每遇到一位遞增或相等就加 1, 如果左邊的數字比較小就不加, 直到最後一位, 計數到多少 $f(n)$ 就是多少了。以前一個問題爲例:

$$f(123555665489) = f(123555⑥⑥⑤48⑨0) = 4,$$

其中 0 到 9 遞增一次, 4 到 5 遞增一次, 5 到 6 遞增一次, 6 到 6 相等 (視爲) 遞增一次, 所以計數爲 4。被圈起來的 6659 四個數, 只是作爲遞增或相等的記號而已, 你可以用自己喜歡的方式來標記。

現在我們可以來計算一下, 有名的 Martin Gardner 九位數 381654729 乘以 9 的數字和是 9 的幾倍了。

$$f(381654729) = f(3⑧1⑥⑤4⑦2⑨0) = 5.$$

驗證 $381654729 \times 9 = 3434892561$, 就算用計算機按出這個答案, 恐怕你也懶得加起來了吧!

回顧這個定理『$f(n) = n$ 的非 0 字元個數減去加法的進位次數』, 你會發現原來的規則一、二、三、四、五, 都只是它的推論而已, 而我卻花了很多工夫在這些規則的證明, 這是研究時

出發點的問題。在數學發展的歷史上, 這應該是常見的現象, 不能視爲徒勞無功, 就像有了餘弦定理, 卻沒有人忘記畢氏定理的證明一樣。所以我還是保留這些只是推論的規則, 讓讀者知道這個問題發展的過程。

9的倍數的種種性質一直都是數論中有趣的問題, 如果不想玩得太複雜, 只用規則二和規則三就可以設計出很有趣的數學遊戲。例如 $f(11223344556677889)=1$, 意味著

$$11223344556677889\times 9=101010101010101001,$$

就能使中小學生睜大眼睛了 (好多 101 阿!)。讓高中生用 1 到 8 隨機寫一個遞增的 29 位數, 老師再加上一個 9 到末尾, 乘以 9 之前, 全班來估計這個有 31 位數的積, 0 到 9 各個數字各出現多少次, (這裡恐怕不隨機了)。別懷疑! 當然很不平均, 數字 0 出現的比率會大得出乎意料, 其餘數字少的可憐, 還可以保證不會出現 9 這個數字。(因爲數字和只有 9 嘛!) 如果改玩遞減的字串, 老師甚至可以連一個數字都不加, 哪一個數字出現的機率最高應該很清楚了吧!

再如 $f(6777777777)=9,$

$f(7777777776)=10,$

$f(7777777777)=10,$ 但

$f(7777777778)=1,$ 意味著

$6777777777\times 9=60999999993$ 數字和很大,

$7777777776\times 9=69999999984$ 數字和很大, 6 在頭在尾只差一個 9;

$7777777777\times 9=69999999993$ 數字和很大,

$7777777778\times 9=70000000002$ 數字和很小, 爲何一落千丈?

(其實看成上一式的 69999999993 加 9 還比較清楚),

或者可以當一個數學問題中『差之毫釐失之千里』的例子。

從證明過程中還可發現, 規則二有一個有趣的性質, 例如 $f(123555555)=6$, 不只知道 123555555×9 的數字和是 54, 還能確定積的倒數 2 到 6 位數字都是 9, 累加數字和的時候其實是很快的。請看 $123555555\times 9=1111999995$, 是不是一切都在掌握之中呢!

希望你可以利用這個結果, 設計更多有趣的遊戲來提高學生對數學的興趣。

後記與推論

本文的主題『9 的倍數的數字和是 9 的幾倍』決定於 n 的字串的遞增遞減位數及序列。根據定理, 如果 n 和 m 的遞增遞減位數及序列完全相同, 則 $f(n)=f(m)$ 必然是成立的。例如 $f(1232)=f(1573)=2$。感謝數學傳播審稿老師的指正, 使這些證明更精簡。但這個定理

只限於 9 的倍數嗎? 顯然關鍵在我們用的是十進位, 所以當我們把問題推廣到任意 k 進位 (當然 $k \in N$, $k \geq 2$), 在 k 進位的系統下, n 的 $(k-1)$ 倍的數字和當然是 $(k-1)$ 的倍數, 而且這個倍數是幾倍的算法, 應該準用本文的定理和五個規則。經推廣後可以下這樣的結論 :『在 k 進位系統中, n 的 $(k-1)$ 倍的數字和是 $(k-1)$ 的幾倍, 決定於 n 字串由右向左的遞增次數。』因為在本文的證明中, 最重要的借位減法過程, 或加法的進位情形, 對所有的 k 進位系統都是成立的。例如我們可以說 : 在八進位的系統中, n 的 7 倍的數字和一定是 7 的倍數, 而且是 7 的 (n 的非 0 字元個數減去加法進位的次數) 倍。

參考資料

1. Arthur Benjamin 著, 王君儒 譯。數學大觀念。貓頭鷹出版社。

—本文作者為高雄市中正高中退休教師—