數學傳播 45卷2期, pp. 21-28

矩形電阻網路串並聯順序及相關不等式的推導

林福林 · 林子喬

曰:「聖人重先後之序, 如天之四時, 分毫頃刻, 皆有次第, 物理自然, 不可易也。」

—黃宗義全集, 第4卷

電阻是電路學理論裡重要的元件, 它有兩個端點, 其電路符號如圖 1 所示。電路學裡的基本電路元件都可以用電流及 (或) 電壓兩種電路變數以數學方式描述, 以電阻爲例, 它的阻值即是描述材料阻礙電流流動的程度, 可以寫成 $R=\dfrac{V}{I}$, 稱爲歐姆定律。其中 V 是電壓, 單位伏特, I 是電流, 單位安培, R 是電阻, 單位歐姆。

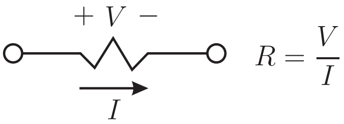

圖 1: 電阻符號及其與電壓電流關係

當兩個電阻端點形成一個節點時稱爲串聯, 串聯的電阻承載相同的電流, 如圖 2(a) 所示。利用克希荷夫電壓/電流定律, 可以得到串聯的電阻之等效值爲 $R=R_1+R_2$。當兩個電阻端點形成兩個節點時稱爲並聯, 並聯的電阻橫跨相同的電壓, 如圖 2(b) 所示。利用克希荷夫電壓/電流定律, 可以得到並聯的電阻之等效值的倒數爲 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}$。

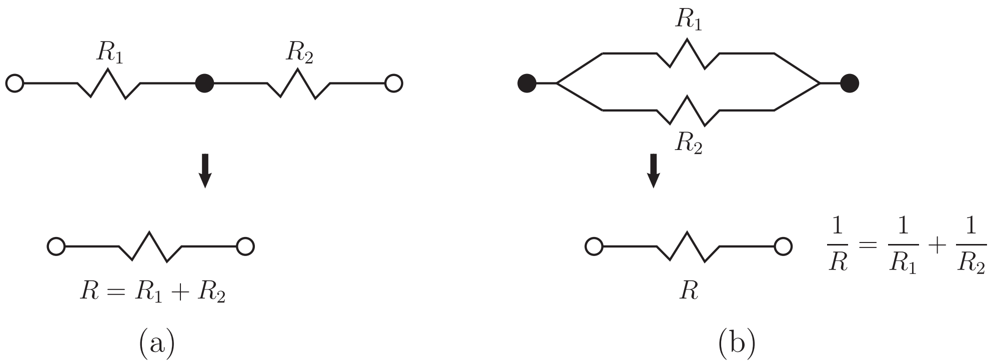

圖 2: 矩形電阻網路的兩個型態: (a) 串聯, (b) 並聯

矩形電阻網路是由 $M \times N$ 個電阻組成的雙埠電路, 以 $M = N = 2$ 爲例, 圖 3 顯示了兩種結構, 左邊稱爲先串後並電路, 電阻值表示爲 R_{SP}, 右邊稱爲先並後串電路, 電阻值表示爲 R_{PS}。通常來講, 矩形電阻網路可以矩陣的形式表示爲

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1(N-1)} & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2(N-1)} & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ R_{(M-1)1} & \vdots & \ddots & \ddots & R_{(M-1)N} \\ R_{M1} & R_{M2} & \cdots & R_{M(N-1)} & R_{MN} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中矩陣內所有元素的數值皆大於 0。本文猜想兩種結構所得到的電阻值會以不等式出現, 即 $R_{SP} \geq R_{PS}$, 且當矩陣 R 的秩 $\text{rank}(R) = 1$ 時等式成立。

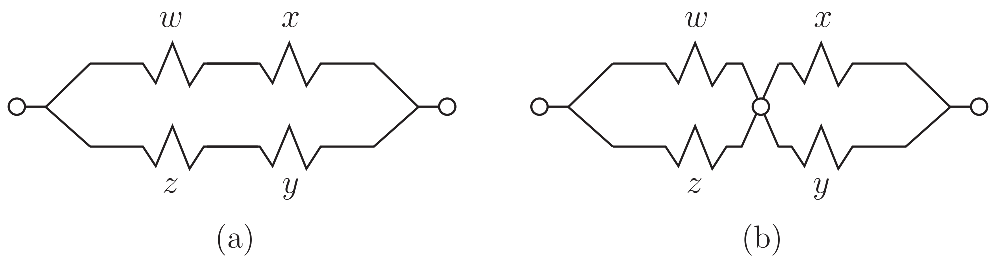

圖 3: 矩形電阻網路的兩個型態: (a) 先串後並, (b) 先並後串

我們先從最簡單的情況開始理解, 考慮 $M = N = 2$ 且 $w = y = z = 1$ 的情況, 改變 x 的數值來觀察 R_{SP} 與 R_{PS}, 結果如圖 4 所示, 可以觀察到 $R_{SP} \geq R_{PS}$, 即先串後並的電阻值一定大於等於先並後串的電阻值, 且當 $x = 1$ 時等式成立。換一種說法是設 $r = \dfrac{R_{SP}}{R_{PS}}$, 則 r (阻值比) 必定大於等於 1, 如圖 5 所示, 且當 $x = 1$ 時 $r = 1$。

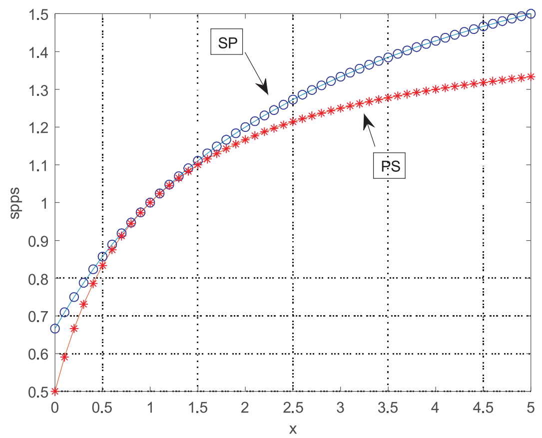

圖 4: 矩形電阻網路的兩個型態阻值比較

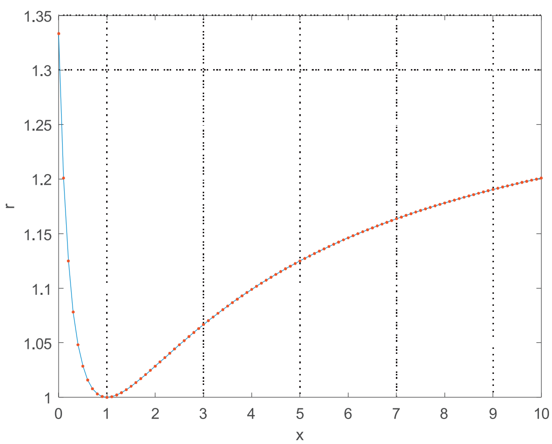

圖 5: 矩形電阻網路的兩個型態阻值比

在此簡單的情況下, 先串後並的電阻值 R_{SP} 表示為

$$R_{SP}(x) = (1+x)//(1+1) = \frac{2(x+1)}{x+3}, \tag{2}$$

先並後串的電阻值 R_{PS} 表示為

$$R_{PS}(x) = (1//x) + (1//1) = \frac{3x+1}{2(x+1)}. \tag{3}$$

觀察兩者的差可以得到

$$d(x) = R_{SP}(x) - R_{PS}(x) = \frac{(x-1)^2}{2(x+1)(x+3)} \geq 0, \tag{4}$$

且等式只有當 $x=1$ 時成立。

觀察兩者的比值可以得到

$$r(x) = \frac{R_{SP}(x)}{R_{PS}(x)} = 1 + \frac{(x-1)^2}{3x^2+10x+3} \geq 1. \tag{5}$$

由於 $x>0$, 上式的分母 $3x^2+10x+3$ 恆大於 0, 因此等式只有當 $x=1$ 時成立。

接著我們往前走一步, 一樣考慮 $M=N=2$ 但只有 $w=z=1$, 改變 x 與 y 的數值來觀察 R_{SP} 與 R_{PS}, 結果如圖 6 所示, 可以觀察到相同的結果, 即 $R_{SP} \geq R_{PS}$。從圖 6 可以看出當 $x=y$ 時等式成立。觀察兩者的比值可以得到

$$r(x,y) = \frac{R_{SP}(x,y)}{R_{PS}(x,y)} = \frac{2(x+1)(y+1)(x+y)}{(x+y+2)(x+y+2xy)} \geq 1. \tag{6}$$

簡單的說明如下： 想要證明 $r(x,y) \geq 1$ 等同於證明

$$2(x+1)(y+1)(x+y) \geq (x+y+2)(x+y+2xy). \tag{7}$$

不等式左邊展開得到 $2x+2x^2+4xy+2x^2y+2y+2y^2+2xy^2$, 右邊展開得到 $2x+2y+4xy+x^2+2xy+2x^2y+2y^2+2xy^2$, 消掉共同項, 不等式左邊剩下 x^2+y^2, 右邊剩下 $2xy$, 由於 $(x-y)^2 \geq 0$, 或者說 $x^2+y^2 \geq 2xy$ 且等式成立的條件是 $x=y$, 因此得證。

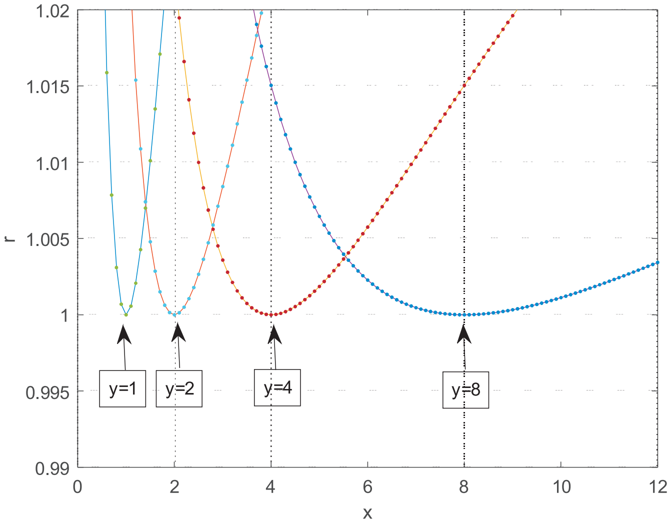

圖 6: 矩形電阻網路的兩個型態阻值比較, 當 $x=y$, 兩個型態的阻值比 $r=1$

接著我們再往前走一步, 一樣考慮 $M=N=2$ 但只有 $w=1$, 改變 x, y 與 z 的數值來觀察 R_{SP} 與 R_{PS}, 結果如圖 7 所示, 注意到四張圖的橫軸刻度是不一樣的, 由圖 7 可以觀察到相同的結果, 即 $R_{SP}\geq R_{PS}$, 且當 $\dfrac{z}{1}=\dfrac{y}{x}$ 時等式成立。觀察兩者的比值可以得到

$$r=\frac{R_{SP}}{R_{PS}}=\frac{(1+x)(x+y)(y+z)(1+z)}{(1+x+y+z)(z(x+y)+xy(1+z))}\geq 1. \tag{8}$$

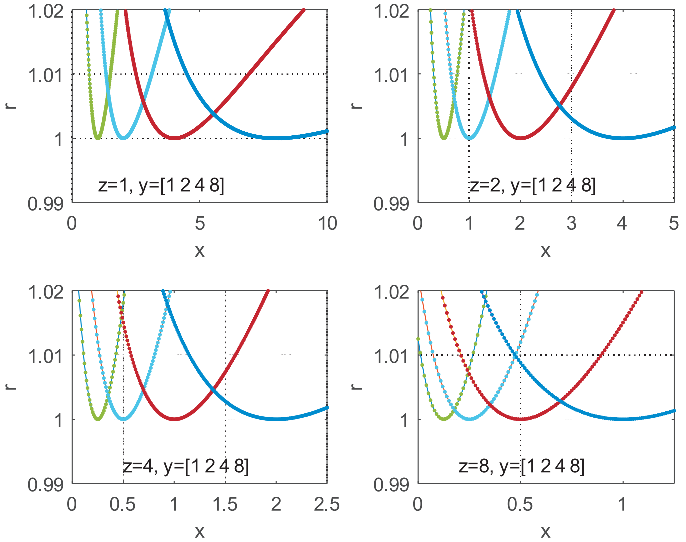

圖 7: 矩形電阻網路的兩個型態阻值比較, 當 $z:1=y:x$, 兩個型態的阻值比 $r=1$

由於 $w=1$ 只是相對的參考值, 因此我們得到一個結論: 矩形電阻網路的兩個型態阻值比較結果, $R_{SP}\geq R_{PS}$, 且當 $\dfrac{z}{w}=\dfrac{y}{x}$ 時等式成立。整理比值得到如下:

$$r=\frac{R_{SP}}{R_{PS}}=\frac{(w+x)(x+y)(y+z)(z+w)}{(w+x+y+z)(wz(x+y)+xy(w+z))}\geq 1. \tag{9}$$

(9) 式的原始寫法是

$$R_{SP}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{w+x}+\cfrac{1}{z+y}}\geq\cfrac{1}{\cfrac{1}{w}+\cfrac{1}{z}}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{y}}=R_{PS}. \tag{10}$$

證明如下: 先定義 $f(v)=w+vx$, $g(v)=z+vy$ 及 $h(v)=\cfrac{1}{\cfrac{1}{w+vx}+\cfrac{1}{z+vy}}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{f(v)}+\cfrac{1}{g(v)}}$, 因爲 w,x,y,z 皆大於 0, 所以 $h(v)$ 在 $[0,\infty)$ 皆可微,

$$h'(v)=\frac{dh(v)}{dv}=\Big(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\Big)^{-2}\Big(\frac{x}{f^2}+\frac{y}{g^2}\Big). \tag{11}$$

利用柯西不等式 $\Big(\dfrac{x}{f^2}+\dfrac{y}{g^2}\Big)\Big(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\Big)\geq\Big(\dfrac{1}{f}+\dfrac{1}{g}\Big)^2$, 代回 (11) 式整理得到

$$h'(v)=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}. \tag{12}$$

利用特殊的技巧如下

$$h(1)-h(0)=\int_0^1 h'(v)dv\geq\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{y}}. \tag{13}$$

最後代入 h 函數, $h(1)-h(0)$, 得到

$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{w+x}+\cfrac{1}{z+y}}-\cfrac{1}{\cfrac{1}{w}+\cfrac{1}{z}}\geq\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{y}}, \tag{14}$$

移項即得到 (10) 式, 證明結束。根據柯西不等式, 當 $v\in[0,1]$, 等式成立的條件是 $\dfrac{x}{f^2}:\dfrac{y}{g^2}=\dfrac{1}{x}:\dfrac{1}{y}$, 透過整理即得到 $\dfrac{z}{w}=\dfrac{y}{x}$ 爲等式成立的條件。

再來考慮稍微複雜的情況: $M=2$ 及 $N=4$, 例如設定 $R=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&u&6&8\end{bmatrix}$, 改變 u 的數值來觀察 R_{SP} 與 R_{PS} 的阻值比, 可以猜想當 $u=4$ 等式成立, 因爲若兩個列向量成比

例關係, 則等式成立。結果如圖 8 所示, 與猜想相符。再舉一個例子, $M=3$ 及 $N=4$, 例如設定 $R=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & v & 6 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, 改變 v 的數值來觀察 R_{SP} 與 R_{PS} 的阻值比, 由於不管 v 是多少, 矩陣 R 的秩 $\operatorname{rank}(R)$ 至少爲 2, 所以等式不可能成立。改變 v 的結果如圖 9 所示, 與猜想相符。

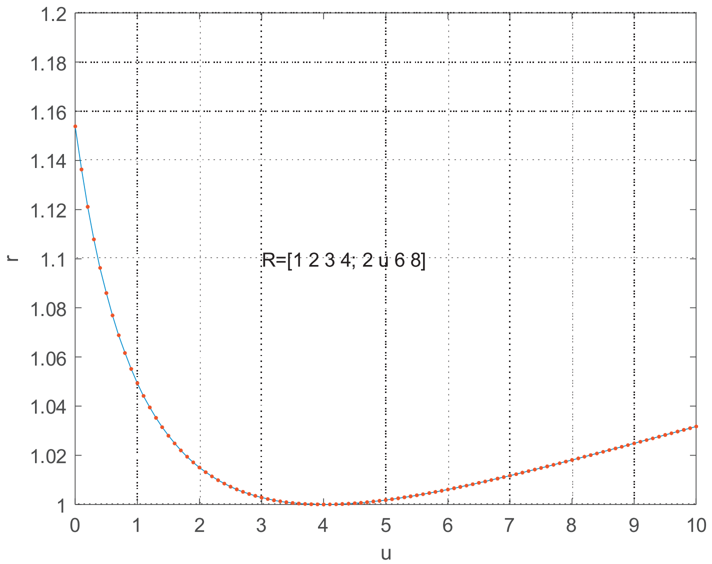

圖 8: 矩形電阻網路的兩個型態阻值比 ($M=2$ 及 $N=4$), 當 $u=4$ 時 $r=1$

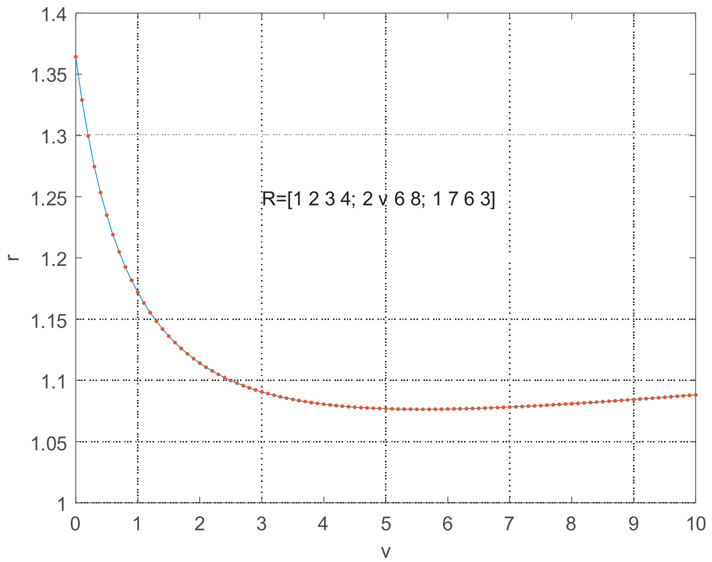

圖 9: 矩形電阻網路的兩個型態阻值比 ($M=3$ 及 $N=4$), $\operatorname{rank}(R)\geq 2$ 導致 $r>1$

經由上面的討論, 由$M\times N$個電阻組成的矩形電阻網路, 先串後並電路, 電阻值表示爲R_{SP},

$$R_{SP}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\sum_{j=1}^{N}R_{ij}}}, \tag{15}$$

先並後串電路, 電阻值表示爲 R_{PS}

$$R_{PS}=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{R_{ij}}}. \tag{16}$$

我們猜想兩種結構所得到電阻值會以不等式出現, 即 $R_{SP}\geq R_{PS}$,

$$R_{SP}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\sum_{j=1}^{N}R_{ij}}}\geq R_{PS}=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{R_{ij}}}. \tag{17}$$

當矩陣 R 的秩 $\operatorname{rank}(R)=1$ 時等式成立。(17) 式可以改寫成另外一種漂亮的不等式如下

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{R_{ij}}}\times\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\sum_{j=1}^{N}R_{ij}}\leq 1, \tag{18}$$

且當矩陣 R 的秩 $\operatorname{rank}(R)=1$ 時等式成立。

如果讀者對 (17) 式的證明有興趣, 可以考慮由 $M=N=2$ 成立爲基礎, 利用數學歸納法應可完成證明。

事實上比 (17) 式更廣義的一個不等式已經被提出並完成證明。在參考文獻 [1] 附錄中的定理3我們重新敘述如下:

考慮任意正實數矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{M1} & \cdots & a_{MN}\end{bmatrix}$, p,q 爲任意實數, 定義 p 次幂平均 (power mean): $M_p(a_1,\ldots,a_n)=M_p(\{a_i\}_{i=1}^{n})=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$, 如果 $p<q$, 則下列不等式成立

$$M_q(\{M_p(\{a_{ij}\}_{i=1}^{M})\}_{j=1}^{N})\leq M_p(\{M_q(\{a_{ij}\}_{j=1}^{N})\}_{i=1}^{M}) \tag{19}$$

等式成立的條件是矩陣 A 的秩 $\operatorname{rank}(A)=1$。

設定 $p=-1<q=1$, $a_{ij}=R_{ij}$, 根據 (19) 式, 左邊可以寫成

$$\begin{aligned}M_{q=1}(\{M_{p=-1}(\{a_{ij}\}_{i=1}^{M})\}_{j=1}^{N})=&M_{q=1}\Big(\Big\{\frac{M}{\sum\limits_{i=1}^{M}\frac{1}{R_{ij}}}\Big\}_{j=1}^{N}\Big)\\=&\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{M}{\sum\limits_{i=1}^{M}\frac{1}{R_{ij}}}=\frac{M}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{M}\frac{1}{R_{ij}}},\end{aligned}\tag{20}$$

右邊可以寫成

$$\begin{aligned}M_{p=-1}(\{M_{q=1}(\{a_{ij}\}_{j=1}^{N})\}_{i=1}^{M})=&M_{p=-1}\Big(\Big\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}R_{ij}\Big\}_{i=1}^{M}\Big)\\=&\frac{M}{\sum\limits_{i=1}^{M}\frac{1}{\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}R_{ij}}}=\frac{M}{N}\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{M}\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{N}R_{ij}}}.\end{aligned}\tag{21}$$

不等式兩邊各乘上一個比例常數 N/M 並左右對調即可由 (19) 式得到 (17) 式, 說明結束。

$q=1$ 可以比擬成串聯, $p=-1$ 可以比擬成並聯, (20) 式是先並後串, 即 (17) 式的右邊, (21) 式是先串後並, 即 (17) 式的左邊, 所以我們獲得最後的結論: 兩種結構所得到的電阻值會以不等式出現, 即 $R_{PS}\le R_{SP}$, 且當矩陣 R 的秩 $\mathrm{rank}(R)=1$ 時等式成立。

最後借韓愈《師說》的語氣做個結論,「串並有先後, 術算有專攻, 如是而已」。

參考文獻

1. T.-C. Lin and S.-M. Phoong, A New Cyclic-Prefix Based Algorithm for Blind CFO Estimation in OFDM Systems, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 15, no. 6, 3995-4008, June 2016.

—本文作者林福林任教南台科技大學 電子工程學系, 林子喬爲聯發科技資深工程師—