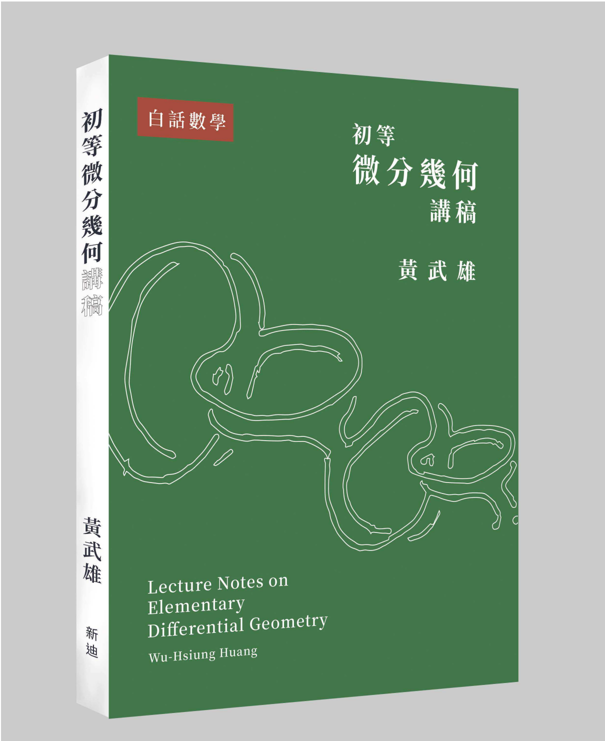
數學傳播 45卷2期, pp. 3-8

小書與大書——
《初等微分幾何講稿》增訂版序

黃武雄



一、

時日飛馳, 40 多年忽焉而逝。

今年二月台大 Press 出版我寫的三卷大書, 《大域微分幾何》(以下就簡稱爲「大書」), 內含:

上卷　Riemann 幾何基礎
中卷　活動標架法 Moving Frames
下卷　幾何變分學 Calculus of Variations in Geometry

雖然在上卷起頭, 我刻意加了 80 多頁的前篇, 簡介這三卷大書 (以下簡稱『大書』) 的基礎背景, 但對於未接觸過微分幾何的讀者來說, 直接讀大書, 還是有點吃力。台大數學研究所的葉宗樺, 建議我把 1978 年寫的一本簡潔淺顯的小書, 重新出版, 用來當銜接的橋樑。

這是好主意。小書書名叫《初等微分幾何講稿》(以下就簡稱『小書』), 是微分幾何的入門書。如果讀過小書, 正好接得上大書前篇的章 A〈大域曲面論概要〉。大書前篇的章 A, 一方面是小書的凝縮版; 另一方面則進一步, 把小書的內容挖深, 並爲大書接著探討專業研究的「大域微分幾何」鋪路。

這樣的銜接恰到好處。事實上我在大書的引言, 也提到了小書。兩書一淺一深, 相互呼應。讀來會更有心得。適巧去年 2019 年初, 新迪出版社的老友石飛益父女幫我出版《小樹的冬天》。那是一本通俗數學與少年成長的故事書。我就請飛益重新出版這本《初等微分幾何講稿》的小書。飛益二話不說, 一口慨允。真真感謝。

我建議沿用 1978 年舊版, 直接照相製版出書。不必再耗費資源與精力, 重新打字校對。而且舊版是用鉛字排版, 有復古價值。那個時代, 連 IBM 的電腦打字都還沒有出現, 遑論 LaTex? 1978 年舊版的排版及繪圖, 是我一手策劃。版面力求清晰。但有些符號例如內積 $\langle v,w\rangle$ 造型不漂亮, 排版只能打成 $<v,w>$ 這種誇張的形式。不過我們無法超越時代限制, 也只能將就。其他章節格式, 於今翻閱, 仍淸新大方。

用「小書與大書」作爲標題, 寫這篇新版序, 讓我天馬行空, 聊些涉及這小書的往事, 也談談它與大書的關連。

二、

1978 年書寫的小書, 大略是 1975-6 學年我在台大上幾何課的講稿。授課的班級是大三, 他們在 1977 年畢業 (NTU math77) 。

年輕時這班學生與我, 如朋友般親近。我帶過他們大一微積分, 又教過大三微分幾何。黃振芳、蕭美琪、劉興祥、劉之舜、齊平中、江永進、陳朝欽、林三益、馮德誠、$\cdots$ 他們後來都在國內外大學任教, 或在其他領域工作, 包括不可思議的, 周乃庚當了醫生兼模範里長。他們對數學研究、對社會進步有重大貢獻。

事隔三十多年, 他們之中有 10 多位, 相約來我山居重聚。那是2008年。初春我租的農舍在新店山上。衆人擠在幾坪大的書房, 聊著陳年往事, 談笑風生。他們也送來一座巨大的盆栽, 開滿多種美麗的花朵, 就像他們的生命, 來到這成熟的年紀百花綻放一樣。

1973 年教他們這班時, 我才 30 歲。2008 年他們造訪農舍, 我已處於入暮之年, 他們則正值社會中堅的年紀。來訪那日, 聊天歡笑, 山路漫步, 我猶識得他們中的每一個人, 腦中逐一浮起他們年輕時的神情樣貌。

小書是教他們時, 寫的講稿。隨後找友人藍坤助出版。藍當時草創「人間出版社」(非 1980

年之後陳映真那家人間)。他原是台中二中的數學教師, 因教育理念與黨國教官不符, 憤而辭職。我贊助他出書, 照例零稿費。不久之後, 人間出版社因故結束營業, 但已有兩千多本流入市面。

小書是 1978 年出版。小小的冊子, 我努力做到深入淺出, 跳過數學書一向太繁瑣的形式語言 (formal language), 一下子進入古典曲線曲面論的核心主題。尤其曲線論問題, 我試著用「問題中心」的觀點書寫, 先提出主要問題再發展理論。這些是我幾十年來, 主張白話數學的一貫精神。

三、

小書的幾個核心主題, 包括曲線論的 Jacobi 定理、曲面論的 Gauss Theorema Egregium、Gauss-Bonnet 定理、Hopf-Poincaré 標數、$\cdots$ 與 Thomas Banchoff 意義深長的組合觀點。

Jacobi 定理 [小書曲線論第五章], 容易了解, 不再多加申論。至於其他主題, 讓我分段說明它們的意義, 並簡短指出它們如何銜接大書。

(1)

Gauss Theorema Egregium [小書曲面論第五章], 開啟近代幾何學的先河, 揭示彎曲世界的第一奧秘。原來曲面內部的彎曲, **某種程度**可以與它如何放在三維空間的形狀脫鉤。直覺上, 這是難以想像的事。換句話說, 在曲面上量長度角度, 有些狀況竟然可以不管曲面在三維空間如何安裝。

一個淺顯的例子是: 把一張紙捲成筒狀, 或錐狀, 並不影響這張紙上, 兩點之間的長度 (或兩線的夾角等)。這就是說: 曲面的內在幾何, 可以從曲面安裝在三維空間的樣式中, 抽離出來。上例中, 筒狀也好、錐狀也好, 平面狀也好, 紙張上的長度角度面積等都不變。這現象, 不只對一張可以攤開在平面上的紙張正確, 對任何曲面也都一樣正確。

Gauss Theorema Egregium 的重要性, 促使 Riemann 在二十多年後 (1860 年代) 發展了影響深遠的 Riemann 幾何, 也提供 20 世紀初年愛因斯坦相對論 (狹義到廣義) 一個堅實的幾何基礎。這是數學與物理學, 在 19 世紀與 20 世紀之交的盛事。根據 Gauss 內在幾何的發現, Riemann 把它引入高維空間, 然後棒子交到 Poincaré 與 Einstein 的手上。

Riemann 的貢獻是, 把內在彎曲的概念, 延伸到高維空間中。例如: 我們生活的三維空間, 其實是彎曲的, 但它怎麼彎曲法? 我們生活其中的人, 明明直覺這三維世界是平直的。硬要說它是彎曲, 那麼彎曲是什麼意義?

這很像早期的人類, 覺得大地是平的, 後來才慢慢了解原來它是彎曲的球狀。

可是這樣的比喻, 還是不恰當。發現地面並不平坦的歷史經驗中, 人類可以察覺駛向遠方的船, 先消失的是船身, 最後才是船桅, 有這現象是因爲:我們還是看得到安裝著地球的三維空間。

但當我們進一步說 :「不只我們腳踩的大地是彎曲的, 連我們生活其中的三維空間都是彎曲。」這是什麼意義? 我們生活其中的三維空間, 並沒有安裝在更大的四維空間中。那麼空間彎曲是何意義? 我們如何確信空間是彎曲的這件事? 如何感知? 如何描述?

Riemann 把 Gauss 的第一基本式, 拿來當作高維抽象空間的尺度 (metric), 提供描述高維空間的概念與方法, 並延伸到種種不同形狀的高維空間。彎曲宇宙的形狀, 從此有了可供描述的方法。

大書的上卷, 探討 Riemann 幾何, 就承續小書曲面論的第五章, 把它推向高維空間。準確的說, 是推向高維「流形」(maniford)。就專業術語來說, 原來的曲面, 不論什麼形狀, 球面或環面或其他, 都是二維流形。

(2)

小書的另一個主題 : Gauss-Bonnet 定理 [曲面論第六章], 則把局部的尺度幾何 (metric) 與整體的拓樸 (topology), 結合起來 : 封閉曲面上高斯曲率 (Gauss curvature) 的積分, 便是尤拉數 (Euler number)。此即, 結合起微觀幾何與巨觀幾何: 高斯曲率是微觀的, 尤拉數則爲巨觀的量。

這是大域微分幾何學的里程碑。

小書第六章製作測地坐標, 以此計算高斯曲率, 導出 Gauss-Bonnet 定理。第 7 章更進一步引用 Hopf- Poincaré 標數定理, 再度證得 Gauss-Bonnet 定理。這第二種證明, 爲了 1940 年代陳省身將 Gauss-Bonnet 定理推向高維流形, 埋下伏線。

在大書上卷前篇章 A, 對於 Gauss-Bonnet 與 Hopf-Poincaré, 我做了進一步的分析。到了中卷引入活動標架法之後, 更放進陳省身重大貢獻的細節。

20 世紀後半有數學家把 Gauss-Bonnet 定理稱爲 Gauss-Bonnet-Chern 定理。因爲推向高維的證明, 確實艱難。只要閱讀陳省身之前, Allendoerfer 與 André Weil 的論文, 就知道其間繁瑣, 也才能體會陳的證明如何漂亮。

(3)

小書第七章所寫的 Hopf-Poincaré 標數 (index), 涉及水流奇點 (singularity) 的分類。把代表水流的切向量場, 在曲面上連續變形, 可以讓奇點歸併成單一點。有趣的是, 在變形過程中, 奇點的總標數不變, 而且等於尤拉數, 反映出曲面的拓樸。從這項觀察, Gauss-Bonnet 問題與 Hopf- Poincaré 標數的關聯, 便呼之欲出。這些關聯都散見於小書與大書的的相關篇章之中。

(4)

小書曲面論第八章, 我選擇探討 Thomas Banchoff 的組合觀點, 重新看 Gauss Theorema Egregium 與 Gauss-Bonnet 定理。這樣可以再撿回人原有的幾何直覺。曲面的處理涉

及無限小的累積, 我們能不能又回到有限世界, 去「洞察」無限小複雜現象的關鍵? 這是此章的意義。值得學習者細細品味。

(5)

小書的最後一章 [第九章] 開始爲黎曼幾何 (Riemann geometry) 與活動標架法鋪路。但都只蜻蜓點水。小書舊版封面有個方框, 框內的左上角, 寫著「第一卷曲線曲面論」的字樣, 這意味小書會有續集。

1978 年, 我再訪 Berkeley。與中國數學家彭家貴來往甚密。彭 (Peng) 是當時大陸第一批赴美的留學生, 與巴西幾何學家 do Carmo 合作, 證明在三維歐式空間中, 任何 stable minimal surface 必爲平面。這是一項重要而漂亮的工作, 它擴充了二維的 Berstein 定理。Peng 初訪 Berkeley 時, 我拿給他這本小書。後來他告訴我這本小書就是他快速進入微分幾何領域的入門書。彭也向陳省身提起這本小書, 陳催我早點把續集完成。

近年出版的三卷大書, 可說是小書的續集。只是完成這三卷續集, 已經是半個世紀之後的事。懷念的家貴多年失聯, 恩師陳先生亦已不在人世。

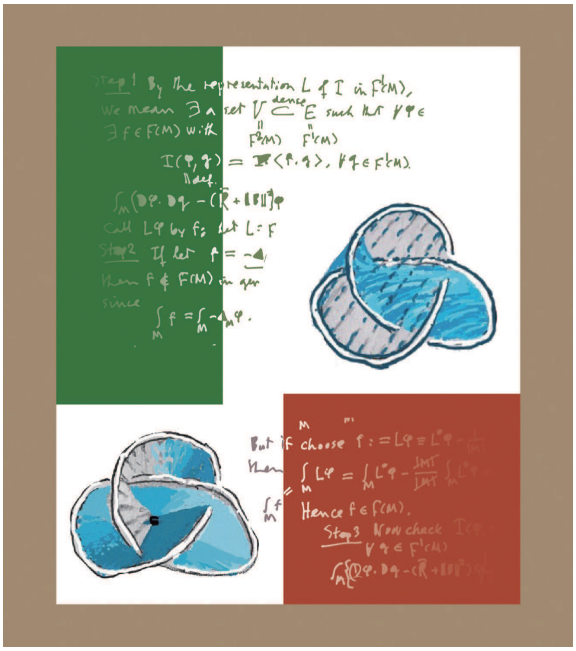
四、

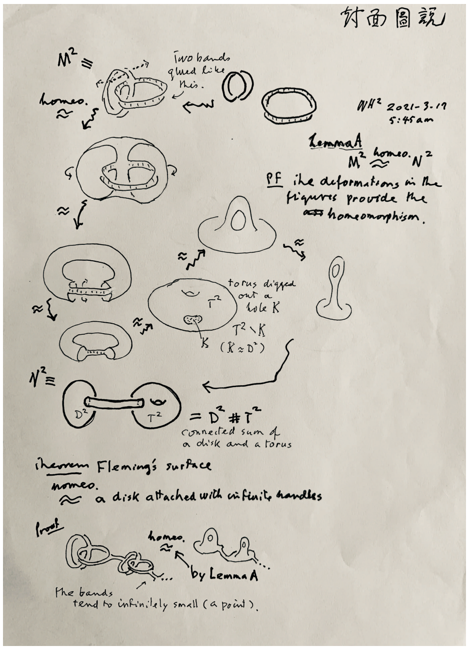
1977 級的同學來訪是 2008 年的春天。事曆上記載的是 : 3 月的第一天, 劉興祥同我聯絡相偕拜訪之意。黃振芳自稱是「探馬」, 他一向有考古的特殊才能, 班上大小事包括發生的年月日, 因時日久遠, 記憶模糊, 他都可以淸楚考證, 細說脈絡, 讓大家折服。振芳後來在台大數研所博士班與陳金次做論文, 任職中研院數學所當研究員 30 多年, 在微分方程的領域, 做了很多重要的貢獻, 至去年 2019 退休。

衆人造訪農舍那天, 是濕冷的春天。天南地北聊過一番之後, 振芳忽然問起我, 那本小書的續集什麼時候完成? 並主動表示他自願協助。果然, 這幾年我一邊撰寫大書之時, 他一邊細心幫我校對。不, 不是校對, 是細讀計算並校正。我沒給他原稿核對, 他就當初學者閱讀, 仔細計算同時了解內容, 大小 typos 都找出來, 校正完大書中卷時, 他意外大病, 鄭日新接手校完下卷。2018 大書完稿, 振芳已漸康復, 我請他與日新合寫校訂序。

小書與大書的關連, 不只是邏輯與數學, 還有人的餘溫。書架上三卷《大域微分幾何》的大書、一本舊版《初等微分幾何》的小書, 旁邊還有一本蕭美琪來訪那天送給我的著作 :《*PDE in Several Complex Variables*》(AMS International Press) 的經典。書中有很多她研究的成果, 多複變, 我不懂的領域。美琪大一那年是班代表。她們大學時, 正值我爲教育部編寫《高中數學實驗教材》, 也在中研院數學所創辦《數學傳播》季刊。很多時候她與之舜、永進都在我身旁, 陪我做編輯與校對。掀開記憶的書封, 湧入的是無數的人與故事, 三益、朝欽、平中、乃庚、· · · 。大書小書之外, 人的餘溫, 一幕幕的記憶。

還有 · · ·, 消逝的歲月。　　2020-10-25





封面設計說明:

(1) 封面的鍊狀曲線往右下無限重複, 越來越小, 最後縮成一點。這是 Fleming 製作的例子。這條曲線其實同胚於一個圓圈 (circle)。以這曲線爲邊界的最小曲面 (皀膜), 至少有兩種 : 其一同胚於一圓盤 (disk), 此爲 Douglas solution; 另一是圓盤上黏上無限多個手把 (即虧格 genus $= \infty$ 的曲面。當鍊帶夠細時, 後者才是面積爲絕對最小。所以 Douglas solution 並不一定是面積最小的解。

(2) 封底的方框象徵櫥窗, 裡頭置放數學手稿與及兩個曲面的模型。曲面模型的邊界都是莫比斯環緣。Osserman 證明左下角的模型不可能是 Douglas solution, 因爲其上有奇異點 (singularity)。真正的 Douglas solution 應該像右上角的曲面, 可以看出那曲面果然是 disk-type。

—本文作者爲台大數學系退休教授—

勘誤: 第 45 卷第 1 期 (177號)

第99頁 例5

求證: $CD \cdot CE + CD \cdot CF = AC^2 + AE \cdot AF$。

應爲 $CB \cdot CE + CD \cdot CF = AC^2 + AE \cdot AF$。