

## 編者的話

黃武雄教授日前推出巨著《大域微分幾何》三冊。為輔助初入門者，將重新出版《初等微分幾何講稿》。黃老師概要解說了大書和小書的關聯。而如葉宗樺先生所言，黃老師其實想和讀者分享一個精彩的故事。容我也來說這個故事。

1827年，Gauss 提出 Theorema Egregium，證明高斯曲率  $K$  是曲面的內在 (intrinsic) 不變量，在局部等距變換下保持不變。繼之，古典 Gauss-Bonnet 定理說：對封閉有向的二維黎曼流形  $M$ ，有  $\int_M K dA = \chi(M)$ ，其中  $\chi(M)$  是  $M$  的尤拉示性數。1931年，Heinz Hopf 提問：Gauss-Bonnet 定理可否推廣至任意偶數維度？1943年，Allendoerfer 及 André Weil 解決了此問題，論證繁複。1944年，陳省身先生套用 Élie Cartan 的活動標架理論，對此提出內在證明，簡潔俐落，影響深遠。此即所謂的 Gauss-Bonnet-Chern 定理；對封閉有向的偶數  $d$  維黎曼流形  $M$ ，該定理說： $\int_M \Omega = \chi(M)$ ，其中  $\Omega$  為曲率 2-form 建構出的內在  $d$ -form。

在大域幾何，由於微分式 (differential form) 與代數拓樸的深刻關聯，曲率 form 比曲率張量好用些。而陳先生應用了 Poincaré-Hopf 指標定理，把大域的拓樸資訊局部化，將  $\chi(M)$  計為向量場零點的 degree 總和。

考慮  $M$  上的投影球叢 (projective sphere bundle)  $SM$ 。利用投影  $\pi : SM \rightarrow M$  將  $\Omega$  拉回  $SM$ ，陳先生證明：存在  $SM$  上的  $(d-1)$ -form  $\Pi$  使得  $\pi^*\Omega = d\Pi$ 。現選取  $M$  上具孤立奇異點  $\{x_i, i \in I\}$  的球面束  $S$ ；用  $\pi|_S$  將  $\int_{M \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{B(x_i)}} \Omega$  拉回  $S$ ，其中  $B(x_i)$  是環  $x_i$  的小球。於是有  $\int_{M \setminus \bigcup_{i \in I} \overline{B(x_i)}} \Omega = \int_S d\Pi|_S = \int_{\pi|_S^{-1}(\bigcup_{i \in I} \overline{B(x_i)})} \Pi$ 。由 Poincaré-Hopf 指標定理知：當球  $B(x_i)$  的半徑趨近於零，上述積分趨近於  $\chi(M) \int_{SM_x} \Pi$ 。但  $\int_{SM_x} \Pi = 1$ ，故證得 Gauss-Bonnet-Chern 定理。

去讀黃老師的書，聽他說故事，和他一起探索，尋幽訪勝，分享他獨到的眼光和視野。

張海潮教授講述「微積分基本定理」，並且以速度、加速度的運動學觀點，解釋二次微分如何決定函數圖形的凹凸性。張教授沒用任何術語，寫下高中生都能看懂的文章。

在數學課堂上，老師傳達給學生的，不僅是知識，還有對數學的熱情及自信。遠距教學時、閱讀文章時亦是如此。人與人的連結總是存在，真實不虛。

大疫，祝安好。

數學傳播電子版網址：

<https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/>

梁惠禎

2021年6月

# 數學傳播 178

第四十五卷  
第二期

## 目錄

小書與大書 —— 《初等微分幾何講稿》增訂版序 .....	黃武雄	3
初等微分幾何講稿與我		
一段引人入勝又興味十足的閱讀經驗 .....	葉宗樺	9
教高中生微積分基本定理 .....	張海潮	12
從運動學的觀點看描繪函數圖形 .....	張海潮	18
矩形電阻網路串並聯順序及相關不等式的推導	林福林 · 林子喬	21
9 的倍數的數字和是 9 的幾倍 .....	張進安	29
使用歐拉公式來求解一些平面分割數的問題 .....	許閎揚	38
格子圖形中的格子直線數 .....	范谷瑜 · 林鳳美	44
<i>k</i> -generalized Fibonacci Numbers		
的完全齊次對稱多項式表示法 .....	陳建燁	54
為何會多出一個根呢? .....	連威翔	68
“光棍數”的數論性質和分數小數互化問題討論	李織蘭 · 蔣曉雲	76
蜜蜂問題與無窮級數 .....	範花妹 · 秦慶雄	81
變形式定圓運動 求最值動中取靜 .....	張小川	83
一個定理的初等證明及兩個幾何不等式的空間推廣 .....	趙忠華	89
一道最小值問題的六種解法及推廣 .....	鄒 峰 · 衛 鋒	96