數學傳播 45卷1期, pp. 104-108

一道 2018 年重慶數學夏令營試題的另解與推廣

鄭　峰

本文旨在一道 2018 年重慶數學夏令營試題第壹試第 11 題, 利用柯西不等式給出另解; 在此基礎上給出一個推廣、一個結論、兩個變式, 最後給出一個總結。

問題呈現

設 a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 均爲正實數, 且滿足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2018$, 若

$$\sqrt{{a_1}^2+3^2}+\sqrt{{a_2}^2+5^2}+\sqrt{{a_3}^2+7^2}+\cdots+\sqrt{{a_n}^2+(2n+1)^2}$$

的最小值爲整數, 求項數 n 的值。

命題組給出的解法雖然巧妙, 但沒考慮 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 與已求

$$p=\sqrt{{a_1}^2+3^2}+\sqrt{{a_2}^2+5^2}+\sqrt{{a_3}^2+7^2}+\cdots+\sqrt{{a_n}^2+(2n+1)^2}$$

的最小值 $p_{\min}$ 之間的關係; 筆者就這一問題給出一個 s_n 與 $p_{\min}$ 之間的等量關係。

問題解答

解: 記

$$\begin{aligned}p&=\sqrt{{a_1}^2+3^2}+\sqrt{{a_2}^2+5^2}+\sqrt{{a_3}^2+7^2}+\cdots+\sqrt{{a_n}^2+(2n+1)^2}\\&=\frac{{a_1}^2}{\sqrt{{a_1}^2+3^2}}+\frac{{a_2}^2}{\sqrt{{a_2}^2+5^2}}+\frac{{a_3}^2}{\sqrt{{a_3}^2+7^2}}+\cdots+\frac{{a_n}^2}{\sqrt{{a_n}^2+(2n+1)^2}}\\&\quad+\frac{3^2}{\sqrt{{a_1}^2+3^2}}+\frac{5^2}{\sqrt{{a_2}^2+5^2}}+\frac{7^2}{\sqrt{{a_3}^2+7^2}}+\cdots+\frac{(2n+1)^2}{\sqrt{{a_n}^2+(2n+1)^2}},\end{aligned}$$

由分式型柯西不等式得:

$$p\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2}{p}+\frac{(3+5+7+\cdots+2n+1)^2}{p}=\frac{2018^2+(n^2+2n)^2}{p},$$

則 $p^2\geq 2018^2+(n^2+2n)^2$, 因爲 $p>0$, 所以 $p\geq\sqrt{2018^2+(n^2+2n)^2}$ 。等號成立只須

$$\frac{a_1}{3}=\frac{a_2}{5}=\frac{a_3}{7}=\cdots=\frac{a_n}{2n+1}=\frac{2018}{n^2+2n}$$

即可。所以 $\sqrt{2018^2+(n^2+2n)^2}$ 爲所求最小值, 設 $\sqrt{2018^2+(n^2+2n)^2}=m\in Z$, 即 $2018^2+(n^2+2n)^2=m^2$, 則 $[m-(n^2+2n)][m+(n^2+2n)]=2018^2=(2\times 1009)^2$ 。由 n^2+2n-m 與 n^2+2n+m 奇偶性相同, 且 1009 爲質數, 可得

$\begin{cases} m-(n^2+2n)=2\\ m+(n^2+2n)=2\times 1009\end{cases}$, 於是 $n^2+2n=1009^2-1$, 故 $n=1008$ 。

準備工作:

給定 R^+, 若已知 $a_1,a_2,a_3\in R^+$, 且滿足 $a_1+a_2+a_3=k$, 求

$$\sqrt{{a_1}^2+3^2}+\sqrt{{a_2}^2+5^2}+\sqrt{{a_3}^2+7^2}$$

的最小值。

分析: 給定 $k\in R^+$, $a_1,a_2,a_3\in R^+$, 且滿足 $a_1+a_2+a_3\in R^+$, 且滿足 $a_1+a_2+a_3=k$ 爲定值條件, 從取等號條件入手確定 $\lambda=\dfrac{15}{k}$。

解: 由柯西不等式得 $({a_1}^2+3^2)\Big[1+\Big(\dfrac{15}{k}\Big)^2\Big]\geq\Big(a_1+\dfrac{45}{k}\Big)^2$,

$$({a_2}^2+5^2)\left[1+\left(\frac{15}{k}\right)^2\right]\geq\Big(a_2+\frac{75}{k}\Big)^2,\qquad ({a_3}^2+7^2)\left[1+\left(\frac{15}{k}\right)^2\right]\geq\Big(a_3+\frac{105}{k}\Big)^2$$

即

$$\sqrt{{a_1}^2+3^2}\geq\frac{a_1k+45}{\sqrt{k^2+225}},\quad \sqrt{{a_2}^2+5^2}\geq\frac{a_2k+75}{\sqrt{k^2+225}},\quad \sqrt{{a_3}^2+7^2}\geq\frac{a_3k+105}{\sqrt{k^2+225}},$$

則

$$\sqrt{{a_1}^2+3^2}+\sqrt{{a_2}^2+5^2}+\sqrt{{a_3}^2+7^2}\geq\frac{(a_1+a_2+a_3)k+225}{\sqrt{k^2+225}}=\sqrt{k^2+225}.$$

當且僅當 $a_1=\dfrac{k}{5}$, $a_2=\dfrac{k}{3}$, $a_3=\dfrac{7k}{15}$ 時取等號,

$\sqrt{{a_1}^2+3^2}+\sqrt{{a_2}^2+5^2}+\sqrt{{a_3}^2+7^2}$ 的最小值爲 $\sqrt{k^2+225}$ 。

從取等號條件發現 $a_1=\dfrac{k}{5}$, $a_2=\dfrac{k}{3}$, $a_3=\dfrac{7k}{15}$, 猜想 $a_4=\dfrac{3k}{5}$,

當給定 $k\in R^{+}$, $a_1,a_2,a_3\in R^{+}$, 且滿足 $a_1+a_2+a_3+a_4=\dfrac{8k}{5}$,

取得 $\sqrt{{a_1}^2+3^2}+\sqrt{{a_2}^2+5^2}+\sqrt{{a_3}^2+7^2}+\sqrt{a_4^2+9^2}$ 的最小值。

解: 同上,

$$\begin{aligned}\sqrt{{a_1}^2+3^2}&\geq\frac{a_1k+45}{\sqrt{k^2+225}}, &\qquad \sqrt{{a_2}^2+5^2}&\geq\frac{a_2k+75}{\sqrt{k^2+225}},\\ \sqrt{{a_3}^2+7^2}&\geq\frac{a_3k+105}{\sqrt{k^2+225}}, &\qquad \sqrt{a_4^2+9^2}&\geq\frac{a_4k+135}{\sqrt{k^2+225}},\end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned}\sqrt{{a_1}^2+3^2}+\sqrt{{a_2}^2+5^2}+\sqrt{{a_3}^2+7^2}+\sqrt{a_4^2+9^2}&\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4)k+360}{\sqrt{k^2+225}}\\ &=\frac{\frac{8}{5}k^2+360}{\sqrt{k^2+225}}=\frac{8}{5}\sqrt{k^2+225}\end{aligned}$$

當且僅當 $a_1=\dfrac{k}{5}$, $a_2=\dfrac{k}{3}$, $a_3=\dfrac{7k}{15}$, $a_4=\dfrac{3k}{5}$ 時取等號, 猜想成立。

$\sqrt{{a_1}^2+3^2}+\sqrt{{a_2}^2+5^2}+\sqrt{{a_3}^2+7^2}+\sqrt{a_4^2+9^2}$ 的最小值爲 $\dfrac{8}{5}\sqrt{k^2+225}$ 。

由上述解法可以遞推 $a_1=\dfrac{k}{5}$, $a_2=\dfrac{k}{3}$, $a_3=\dfrac{7k}{15}$, $a_4=\dfrac{3k}{5}$, $\ldots$, $a_n=\dfrac{(2n+1)k}{15}$,

其前 n 項和記 $S_n=\dfrac{(n^2+2n)k}{15}$ $(n\geq 2$, 且 $n\in N^*$, $k\in R^{+})$ 。

設 $b_1=\dfrac{45}{k}$, $b_2=\dfrac{75}{k}$, $b_3=\dfrac{105}{k}$, $b_4=\dfrac{135}{k}$, $\ldots$, $b_n=\dfrac{15(2n+1)}{k}$ $(n\geq 2$, 且 $n\in N^*$, $k\in R^{+})$,

其前 n 項和爲 $p_n=\dfrac{15(n^2+2n)}{k}$ 。

一個推廣: 已知 a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 均爲正實數, 給定 $n\in N^*$, $k\in R^{+}$, 且滿足

$$s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{(n^2+2n)k}{15},$$

則 $p=\sqrt{{a_1}^2+3^2}+\sqrt{{a_2}^2+5^2}+\sqrt{{a_3}^2+7^2}+\cdots+\sqrt{{a_n}^2+(2n+1)^2}$ 的最小值

$$p_{\min}=\frac{(n^2+2n)\sqrt{k^2+225}}{15}.$$

證明: 同上,

$$p = \sqrt{{a_1}^2 + 3^2} + \sqrt{{a_2}^2 + 5^2} + \sqrt{{a_3}^2 + 7^2} + \cdots + \sqrt{{a_n}^2 + (2n+1)^2}$$
$$\geq \frac{k(s_s + p_n)}{\sqrt{k^2+225}} = \frac{k\Big[\dfrac{(n^2+2n)k}{15} + \dfrac{15(n^2+2n)}{k}\Big]}{\sqrt{k^2+225}} = \frac{(n^2+2n)\sqrt{k^2+225}}{15},$$

當且僅當 $a_1 = \dfrac{k}{5}$, $a_2 = \dfrac{k}{3}$, $a_3 = \dfrac{7k}{15}$, $a_4 = \dfrac{3k}{5}$, $\ldots$, $a_n = \dfrac{(2n+1)k}{15}$ 時取等號,

$$p_{\min} = \frac{(n^2+2n)\sqrt{k^2+225}}{15}.$$

另一解法可用分式型柯西不等式來完成。

回到上述問題令 $\dfrac{(n^2+2n)k}{15} = 2018$, 則

$$p_{\min} = \frac{(n^2+2n)\sqrt{k^2+225}}{15} = \sqrt{2018^2 + (n^2+2n)^2}$$

爲整數, 求解的項數 n 的值同上, $n = 1008$ 。

一個結論: 等量關係 $\dfrac{p_{\min}}{s_n} = \dfrac{\sqrt{k^2+225}}{12}$.

兩個變式:

壹、設 a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 均爲正實數, 給定 $n \in N^*$, $k \in R^+$, 且滿足

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n(n+1)k}{12},$$

則 $p = \sqrt{{a_1}^2 + 2} + \sqrt{{a_2}^2 + 8} + \sqrt{{a_3}^2 + 18} + \cdots + \sqrt{{a_n}^2 + 2n^2}$ 的最小值

$$p_{\min} = \frac{n(n+1)\sqrt{k^2+72}}{12}.$$

貳、設 a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 均爲正實數, 給定 $n \in N^*$, $k \in R^+$, 且滿足

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n(n+3)k}{18},$$

則 $p = \sqrt{{a_1}^2 + 4} + \sqrt{{a_2}^2 + 9} + \sqrt{{a_3}^2 + 16} + \cdots + \sqrt{{a_n}^2 + (n+1)^2}$ 的最小值

$$p_{\min} = \frac{n(n+3)\sqrt{k^2+81}}{18}.$$

總結:

一般地, 設 a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 均爲正實數, 給定 $n\in N^*$, 且滿足 $s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$, 爲變量, s_n 爲定值, c_n 爲正項遞增的等差數列或正項遞增的等比數列, 記數列 $\{c_n\}$ 的前 n 項和爲 q_n, 則

$$p=\sqrt{{a_1}^2+{c_1}^2}+\sqrt{{a_2}^2+{c_2}^2}+\sqrt{{a_3}^2+{c_3}^2}+\cdots+\sqrt{{a_n}^2+{c_n}^2}$$

的最小值爲

$$p_{\min}=\sqrt{{s_n}^2+{q_n}^2},\qquad \frac{p_{\min}}{s_n}=\frac{\sqrt{{s_n}^2+{q_n}^2}}{s_n}$$

其結果取決於 c_1, 得到的通式不同, 下文再探究。

—本文作者任教中國武漢職業技術學院—