數學傳播　45卷1期, pp. 64-83

複數及複變函數的圖形表徵在數學算板中的實踐 (下)

林保平

五、複變函數的定義域著色(Domain Coloring) 繪圖

Farris (1998) 在評論 Needham (1997) 的複變新書時, 首先提出了「定義域著色」這個名詞。設 $w=f(z)$, 定義域著色繪圖首先定義前述 z-w 兩平面中, w 平面 (值域平面) 中每一點的顏色, 觀察函數值 $f(z)$ 點在 w 平面中的顏色, 並將其顏色描在 z 平面的定義域點 (z) 上, 這樣的過程稱爲定義域著色, 得到的含顏色的平面圖形, 就是定義域著色繪圖的函數圖形表徵。w 平面顏色定義其實只要看恆等函數 $f(z)=z$ 的 w 平面圖形就可以知道, 因爲此時定義域與值域相同。w 平面中各點的顏色可以透過公式或現成圖案顏色來定義, 畫圖時, 只畫出 z 平面 (參閱 Lumark, 2004)。透過公式可以定義函數值域所有點的顏色, 但透過有限的圖片或圖案, 超出展示範圍的函數值, 顏色就必須另加規定, 而且圖案的解析度爲固定, 作出的圖形就無法作細部放大。圖 20 右圖展示一個定義 w 平面顏色的貓圖片, 若 $w=u+vi$ 值超出圖片範圍, 則取圖片半長寬的模數剩餘 (也可以做其他規定)。也就是說, 若以圖片中心爲原點, 長寬半長分別爲 a,b, 且 $u=aq+r$, $v=bp+s$, $|r|<a$, $|s|<b$, 則取 $w=r+si$ 在圖片上的顏色爲 z 的顏色。圖 20 左圖展示函數 $w=z^2$ 定義域著色的繪圖, 圖中兩個主要的貓形是因平方的緣故, 可以猜測, $f(z)=z^n$, $n\in\mathbb{Z}$ 的主要圖形是 $|n|$ 個貓形, 此與函數的零點及極點有關。其他貓形是因函數值超出圖片範圍重複取色的結果。圖 21 展示 $f(z)=z^4$, 及 $g(z)=z^{-4}$ 的圖形, 前者重複部分是向外, 後者重複部分是向內, 分別是向極點或無限大之方向。

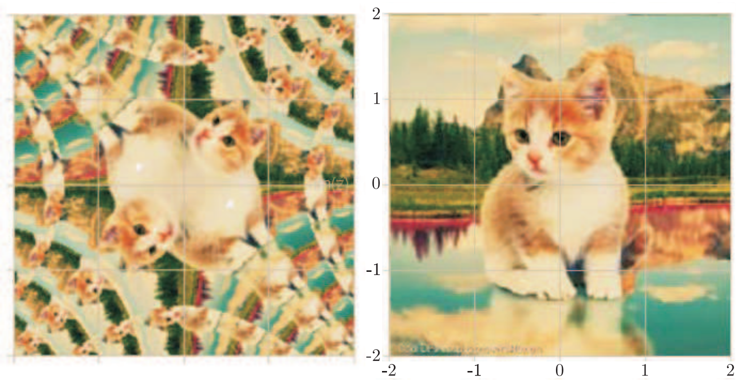

圖20: $f(z)=z^2$ 以右圖圖畫的色彩爲 w 值色彩, 繪成左圖的定義域著色

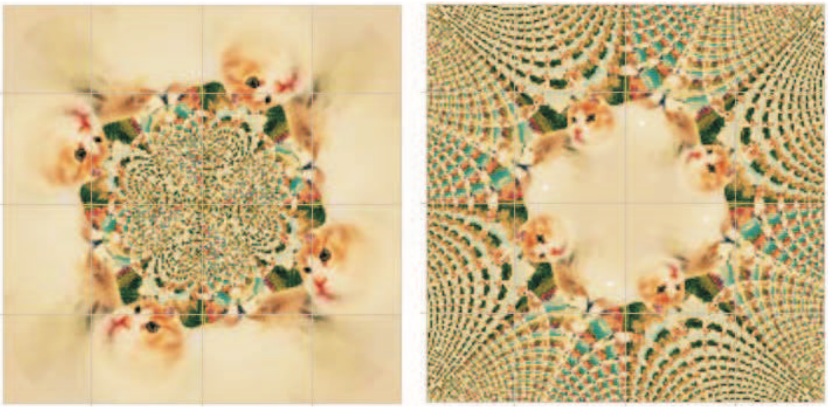

圖 21: $f(z) = z^4$, 及 $g(z) = z^{-4}$ 的圖形

由於較複雜的 3D 圖形, 有速度上的限制, 許多人就透過定義域著色的想法, 先根據函數值的模或幅角, 定義複變函數值 w 的色彩, 然後將此色彩著色於 z 平面上, 只由幅角定義顏色, 稱爲定義域角著色 (Phase Plot 或 Phaseportrait) 繪圖。Poelke et al. (2009)、Wegert (2012) 等人就曾詳細討論過。若將函數值的模作爲高度, 就可作出 3D 的定義域角著色繪圖。若將圖形畫在黎曼球面上, 那就是黎曼球面的定義域角著色繪圖 (本文後面會有說明)。

圖 22 右圖展示一個太陽光譜的光環, 它的色彩就是 HSB 顏色系統中的色彩 (hue), 連續的紅、橙、黃、綠、藍、靛、紫等色, 本質上 0 度時的顏色是紅色, 120 度時的顏色是綠色, 240 度時的顏色是藍色, 由 0∼360 度的角, 都定義了色彩, 其中青色 (cyan) 約在 180 度之處。數學算板使用這個光環的色彩來定義 w 的色彩, 並將之繪在平面上。圖 22 左圖展示 $f(z) = z$ 的定義域角著色, 函數值幅角相同的定義域點顏色相同。

圖 22: 左圖: $f(z) = z$ 的角著色平面圖形, 右圖:0∼360 度光環色彩定義的幅角色彩

數學算板中函數的輸入

數學算板中函數的展示及輸入框有許多不同的輸入方式, 除了選擇內建的函數外, 可參考已展示的函數格式, 輸入下列形式的內容 (依該程式的需要, 並非所有的都可以), 其中 n、m

爲非負整數, $n < m$:

(1) F: F 爲複變數函數式 (可含變數 z、常數 i);

(2) F, n: 表示將複變數函數 F 迭代 n 次;

(3) F, n, m: F 爲複變數函數且需含有參數 k, 表示由 $k = n$ 至 $k = m$ 的 F 級數和;

(4) F_1: F_1 爲以 x, y 爲變數的二元實函數, 程式會以 F_1 爲複變函數的實部函數, 利用麥樂尼湯森法 (Milne-Thomson Method) 公式, 求出一個複變函數

$$F(z) = 2F_1\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - F_1(0,0), \text{ 並輸入。}$$

(5) F_2: 同上 (注意 F_2 前加逗號), 但會以 F_2 爲複變函數的虛部函數, 求出一個複變函數

$$F(z) = 2iF_2\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - iF_2(0,0), \text{ 並輸入。}$$

(6) F_1, F_2: F_1, F_2 爲兩個以 x, y 爲變數的二元實函數, 程式會作出一個複變函數

$$F(z) = F_1(x,y) + iF_2(x,y), \text{ 並輸入。}$$

在 (4)、(5) 中, 若 F_1, F_2 爲調和函數 (harmonic function), 則湯森法公式求得的函數就是解析函數 (analytic function), 但若 $F_1(0,0)$ 或 $F_2(0,0)$ 不存在, 則湯森法無法使用 (參閱 Laitone, 1977)。

函數定義域角著色的零點及極點

圖 23 展示了函數 $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, 在 $n = -3, -2, -2, 1, 2, 3$ 時的定義域角著色繪圖實例。

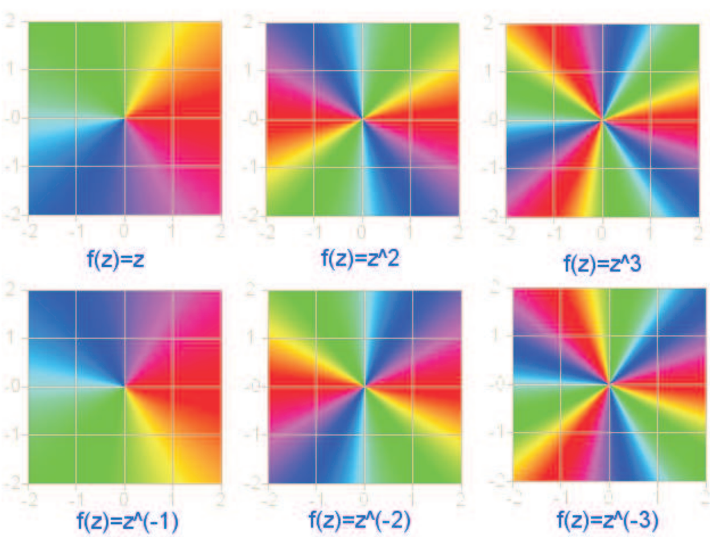

圖 23: $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$ 幾個實例的函數定義域角繪圖

可以看出前三個函數中, $z=0$ 分別爲 $f(z)=0$ 的單根、二重根及三重根。而在 $z=0$ 附近其色彩恰爲太陽光譜由紅、黃、綠 $\cdots$ 至紅, 逆時針方向迴繞一次、二次及三次。後三個函數中, $z=0$ 分別爲函數極點的單根、二重根及三重根。而在 $z=0$ 附近其色彩恰爲太陽光譜由紅、黃、綠 $\cdots$ 至紅, 順時針方向迴繞一次、二次及三次。這個現象的根源, 其實是棣美弗公式 (De Moivre's formula) — $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ 的展現, n 就是這兩個三角函數的頻率, 亦即前述色環中特定顏色出現的次數。一般來說, 一個複變函數 f (嚴格地說就是 meromorphic function) 若有 n 階零點或極點 z_0, f 可表示爲 $(z-z_0)^{\pm n}g(z)$, $n\in\mathbb{N}$ 之形式, 其定義域角著色繪圖在 z_0 附近的表現應該與函數 $z^{\pm n}$ 在 $z=0$ 附近的表現類似。因此, 要觀察函數零點或極點的階 (order), 可以透過零點或極點太陽光譜色彩迴繞該點的次數及方向觀察出來。圖 24 展示函數

$$f(z)=\frac{z-1}{z^2+z+1}、g(z)=\frac{(z+1-i)^2}{(z+i)(z-1+i)^3} \text{ 及 } h(z)=\frac{1}{z^2\sin(z)} \text{ 的圖形,}$$

觀察 f,g 兩函數的零點 (zero) $z=1$ 及 $z=-1+i$, 前者爲一階, 後者爲二階, 前者在左圖中周圍的顏色恰爲太陽光譜 (由紅、黃 $\cdots$ 至紅, 逆時針方向迴繞一次), 後者則是太陽光譜逆時針方向迴繞二次, 再觀察兩函數的極點 (pole), 前者的極點爲 $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, 其周圍色彩爲太陽光譜順時針方向迴繞一次, 而後者的極點爲 $z=-i$ 及 $z=1-i$, 分別爲一階及三階, 其周邊色彩的變化, 分別是一太陽光譜順時針方向迴繞一次及三次。觀察 h 函數, 它在 $z=0$ 的極點爲 3 階 (注意非 2 階), 但在 $z=n\pi$, $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$ 時爲 1 階, h 沒有零點。

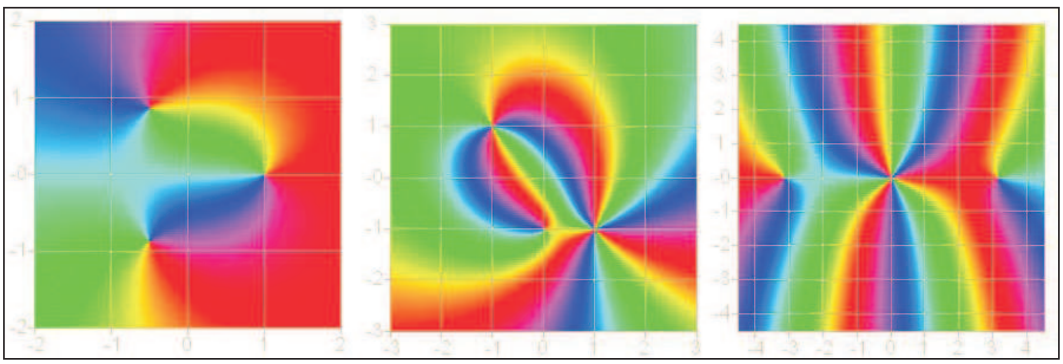

圖 24: 函數 $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+z+1}$、$g(z)=\dfrac{(z+1-i)^2}{(z+i)(z-1+i)^3}$ 及 $h(z)=\dfrac{1}{z^2\sin(z)}$ 的圖形的零點與極點

但要注意, 對於非解析的函數前述性質不一定成立, 圖 25 左圖展示的是函數 $F(z) = F(x + iy) = (x^2 - y) + i(x + y^2)$ 的定義域角繪圖, 其零點 (0,0), $(-1, 1)$ 附近的顏色未必是逆時針旋轉。

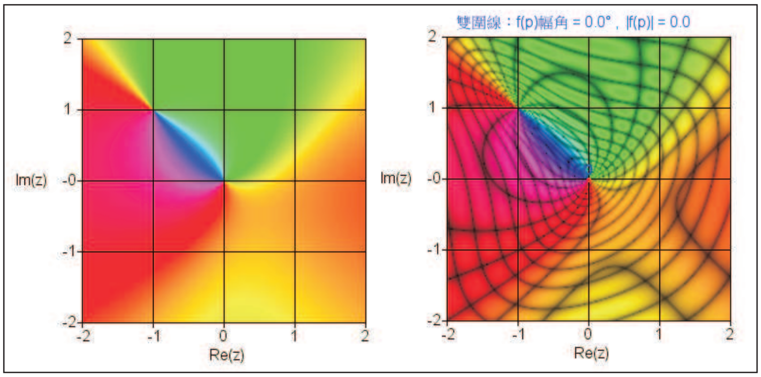

圖 25: 函數 $F(x + iy) = (x^2 - y) + i(x + y^2)$ 的定義域角著色繪圖
左圖兩零點附近顏色旋轉方向不同, 右圖等模及等角圍線不正交

函數定義域角著色的修飾圍線(contour)

設 $g(x, y) = c$ 爲二元函數, 其中 c 爲實數, 我們可以畫出它的平面圖形, 這個圖形就是函數的一條圍線, 集合 $\{g(x, y) = k \mid k \in \mathbb{R}\}$, 稱爲函數 g 的等值圍線。若 $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, 此時, 我們稱 u 爲 f 的實部函數, v 爲 f 的虛部函數。函數 f 的實部函數定義的圍線, 稱爲等實部圍線, 函數的虛部函數定義的圍線, 稱爲等虛部圍線, 同樣的我們也可以定義函數的等幅角圍線 $\{\mathrm{Arg}(f(z)) = k \mid k \in [0, 2\pi)\}$, 等模圍線 $\{|f(z)| = k \mid k \geq 0\}$。

數學算板的定義域角著色繪圖提供了前述的等角圍線、等模圍線、等實部圍線及等虛部圍線的圖形繪製功能。圖 26 展示了函數 $f(z) = z$ 修飾線條的選項 (記得這就是色彩的定義畫面), 分別爲等角圍線、等模圍線、等角等模圍線、等實部及等虛部圍線。在此畫面中, 等角圍線是連結函數值模爲零及無限大的射線 (連結零點與極點), 是由原點向外發散的輻射線, 函數值落在此射線上時, 其幅角相同。同一等角圍線上點的顏色是相同的, 且將定義域著色的色彩分隔。等模圍線是環繞原點的同心圓, 同一等模圍線上的點其函數值的模數是相同的, 愈接近零點 (函數值 0) 的等模圍線其值愈小, 愈接近極點 (函數值無限大) 的模, 其值愈大。等實部圍線就是函數值實部相等的複數點在 z 平面著色構成的圍線。等虛部圍線圍線就是函數值虛部相等的複數點在 z 平面著色構成的圍線。這些圍線並非求出其實部函數或虛部函數或等角函數或等模函數後才作出來的, 而是透過所謂的 sawtooth 函數及 HSB 函數的亮度的設定畫出來的 (參閱 Wegert 2012, pp33), 程式無法對個別曲線作處置, 但可以對整體數量作大略的調整。

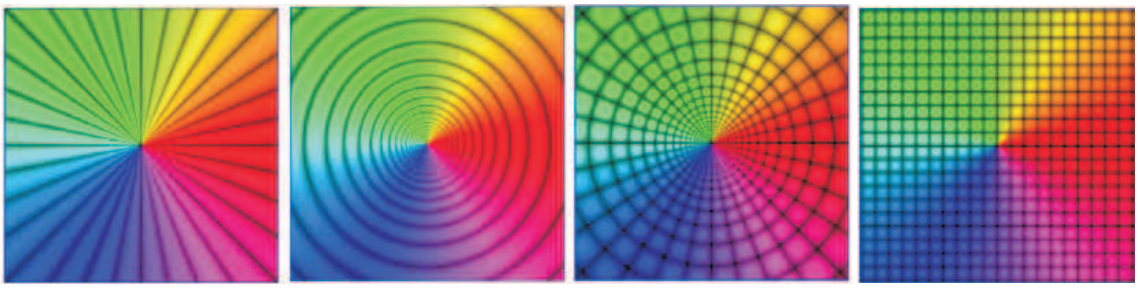

圖 26: 自左至右分別爲等角圍線、等模圍線、等角等模圍線、等實部等虛部圍線

圖 27 展示了函數 $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+z+1}$ 加入等模、等角圍線分別呈現及同時呈現的定義域角著色繪圖的圖形, 此時, 等角及等模圍線不再是圖 26 中的輻射線或圓, 而是一些路徑曲線。一般來說, 一個複變函數 (嚴格地說, 就是亞解析函數 meromorphic function) 的封閉圍線 (此處指等模圍線), 其內部至少包含一個零點或極點。特別地說, 若 z_0 在許多封閉圍線的內部, 則 z_0 必爲零點或極點, 這就是所謂的「極大值原理」(maximum principle)。透過等角圍線及等模圍線的分布, 可以觀察函數值幅角及模的變化。這些等模及等角圍線由於複變函數在可微分區域的保角性 (conformality), 也展示圖形圍線在該區域的正交狀況 (圖 27 右圖)。但若函數不是可微分函數, 他們就不一定正交, 前面圖 25 右圖展示的就是等角與等模圍線不是都正交的函數圍線圖形。

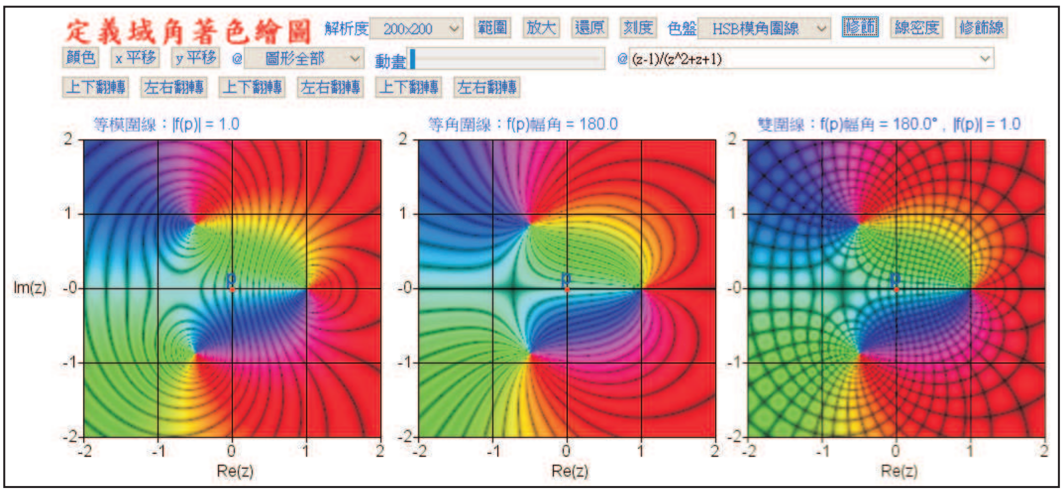

圖 27: $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+z+1}$ 含等模、等角圍線修飾的定義域角著色繪圖圖形

圖 27 上方展示的是定義域角著色繪圖程式提供的控制按鈕列, 圖中的 P 點是可以移動的點, 用滑鼠移動至圍線上方可以看到該圍線的近似 k 值 (幅角或模)。

函數定義域角著色的本性奇點(essential singularity)

雖然極點也是一個奇點, 但本性奇點與極點的圖形表現大不相同。圖 28 展示函數 $f(z) = \cos(1/z)$ 及 $g(z) = e^{1/z}$ 的圖形, $z = 0$ 爲它們的本性奇點。左圖在實軸上尚有無窮個 1 階的零點。在本性奇點的附近, 太陽光譜色彩迴繞無限多次。

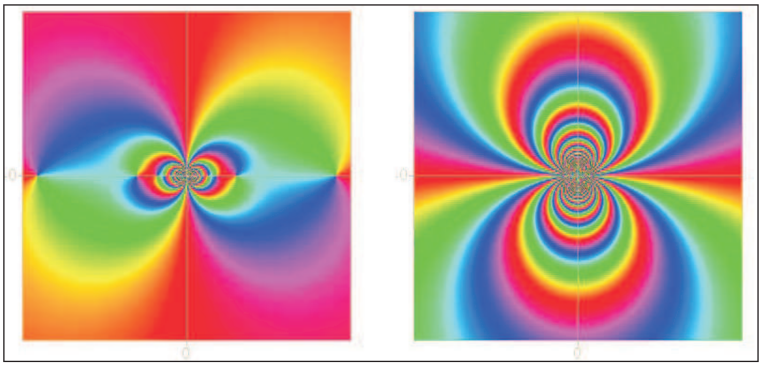

圖28: 函數 $f(z) = \cos(1/z)$ 及 $g(z) = e^{1/z}$ 的圖形, $z = 0$ 爲它們的本性奇點

圖 29 展示前述兩函數含等模圍線及等角膜線的圖形。由這兩個圍線的分布我們可以看出在本性奇點附近的點, 其函數值幾乎涵蓋了整個複數平面, 這正體現了皮卡 (Picard) 定理的描述: 每一個本性奇點的任一鄰域都可映射至幾乎整個複數平面 (參閱 Poelke et al. (2009))。

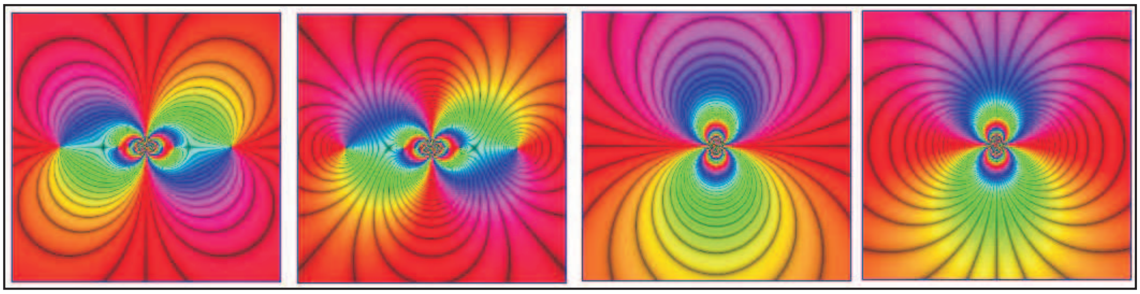

圖29: 左二圖分別爲含等角、等模修飾的 $\cos(1/z)$ 的圖形, 右二圖分別爲含等角、等模修飾的 $e^{1/z}$ 的圖形

數學算板的定義域角著色繪圖, 與碎形的繪圖一樣 (林, 民106a), 具有局部放大的功能, 按 Shift 鍵, 在想放大的地方拖曳出一個長方格, 然後按畫面上的「放大」按鈕, 程式會以該方格的長爲邊長, 取出正方形, 並將覆蓋的正方形區域放大。圖 30 展示函數 $f(z) = ize^{-z/\sin(iz)}$ 迭代三次後 (函數式取自 Wegert 2012, pp132), 局部放大的圖形。可以看出放大後的等角及等模圍線仍然是正交的。按鈕列中的「解析度」選單可以選擇需要的解析度, 大解析度繪圖較

慢, 初步觀察時建議使用較小的解析度, 需要複製或列印時, 才調高解析度。「動畫」拉把, 提供動態的色彩及圖形變化, 本質上它只是連續變動函數的幅角及模, 拉至最左停止, 拉至右方啟動動畫, 愈右愈快。繪圖的方框可透過滑鼠中鍵, 加以放縮。「範圍」按鈕可以控制目前呈現圖案方框內的內容多寡, 按滑鼠右鍵呈現範圍變大, 物件變小, 按滑鼠左鍵則反之。

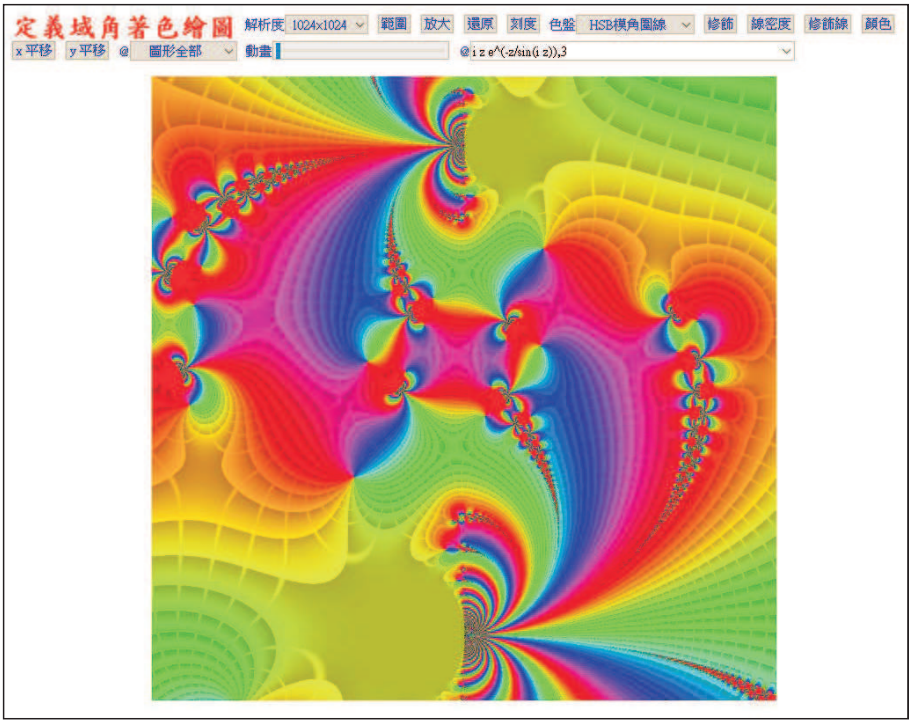

圖 30: 函數 $f(z) = ize^{-z/\sin(iz)}$ 迭代三次後, 局部放大的圖形

在數學算板中, 我們除了貓圖案及 HSB 太陽光譜色來定義色彩外, 我們也定義了 BRY (黑、紅、黃) 色彩, 極黑白格及方黑白格色彩。圖 31 展示了前述三種色彩對函數 $f(z) = z$ 的角著色。黑白格可明確展示函數圖形的正交性質。

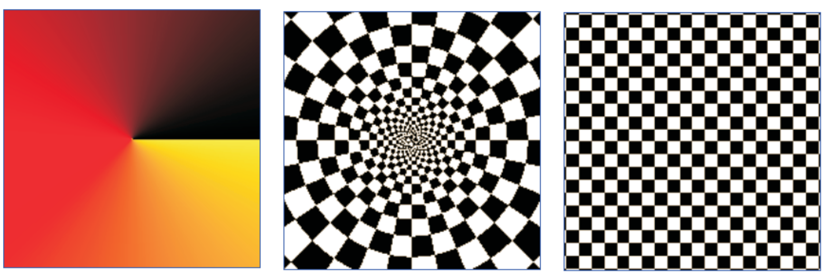

圖 31: BRY 色彩、極黑白格及方黑白格對函數 $f(z) = z$ 的定義域著色

3D 定域義著色

若前述的景觀式繪圖之著色使用 HSB 模角圍線「色盤」, 這便是 3D 定義域角著色繪圖, 此時使用的顏色對應於該定義域點函數值的幅角。由於 3D 繪圖著色使用格線區域繪圖 (同一區域只著一色), 在格線密度夠大時, 角繪圖比較圓潤, 但是此時繪圖的時間較長, 移動圖形時, 動作較緩慢。圖 32 展示比較函數 z^3-1 的平面及 3D 定義域角著色繪圖。左圖爲平面的角著色繪圖, 中圖爲 3D 的角著色繪圖, 右圖是由 z 軸正上方向下觀察的 3D 角著色繪圖。左圖及右圖除範圍不同外, 幾乎是相同的 (注意右圖中的軸方向並非水平及鉛直)。其實, 立體圖形也有選項可展示等模、等角、等實部、等虛部圍線, 但在某些角度, 其圍線展示的品質較差。

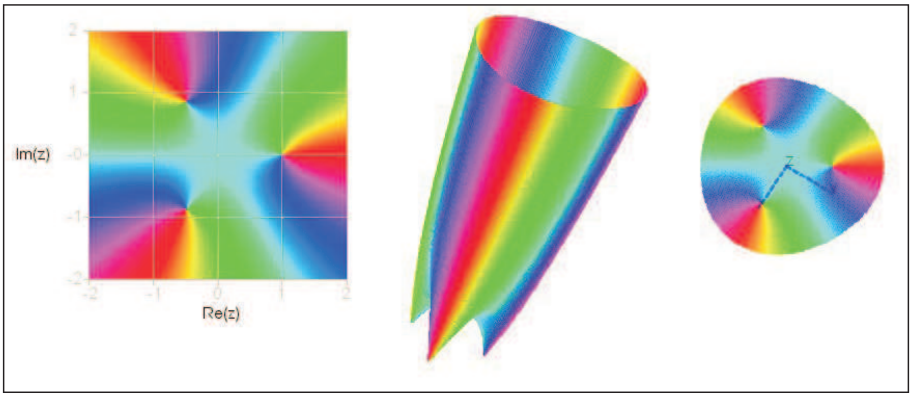

圖 32: z^3-1 平面及 3D 角著色繪圖的比較

五、黎曼球面的角著色繪圖

黎曼球面(Riemann Sphere)

考慮球面 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$, 用 $x+iy$ 表示複數 $z\in\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$。定義 $SP:S^2\to\mathbb{C}_\infty$ 爲

$$SP(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-z}+\dfrac{y}{1-z}i, & z\neq 1\\ \infty, & z=1\end{cases},$$

此時, SP 爲一對一映成的可逆函數, 稱爲極球平面投影變換 (Stereographic Projection), 此球面稱爲黎曼球面。SP 函數的逆函數爲

$$PS:\mathbb{C}_\infty\to S^2,\quad PS(z)=PS(x+iy)=\Big(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\Big),$$

我們稱之爲極平面球投影變換。圖 33 展示極球平面投影的幾何關係, 其中球面的北極 N 坐標爲 (0,0,1), $P(x,y,z)$ 爲單位球面上任意一點, $z=0$ 是我們的複數平面, $\overrightarrow{NP}$ 與 $z=0$ 相交

於點 $P'(x/(1-z), y/(1-z), 0)$ 爲 P 的對應點。當 P 點在上半球時, P' 點在複數平面單位圓外部, P 在 N 上時, $P' = \infty$, 當 P 點在下半球時, P' 點在單位圓內部, P 在單位圓上時, $P = P'$。

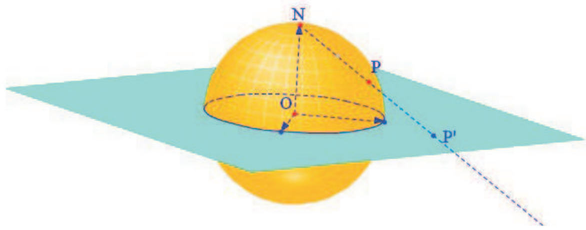

圖 33: 極球平面投影變換的點對應: $P(x,y,z) \to P'\left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}, 0\right)$

在數學算板中, 複數平面上的幾何物件可以投影至黎曼球面, 移動平面上的幾何物件, 球面上的對應物件會做相應的變化。因此我們可以觀察黎曼球面上幾何物件的動態變化。黎曼球面本身也是一個可以透過滑鼠做任意方向及角度旋轉的物件, 透過球面的旋轉, 我們可以看到, 球面上目前看不見 (在背面) 的物件。圖 34 展示極平面球變換將複數平面中的實軸、虛軸及單位圓映至黎曼球面的三個大圓上, 並將平面上的圓、三角形及矩形映至球面上。黎曼球面上, 我們可以看到無限大點的位置, 但在延伸的複數平面上, 無限大是一個想像的位置。

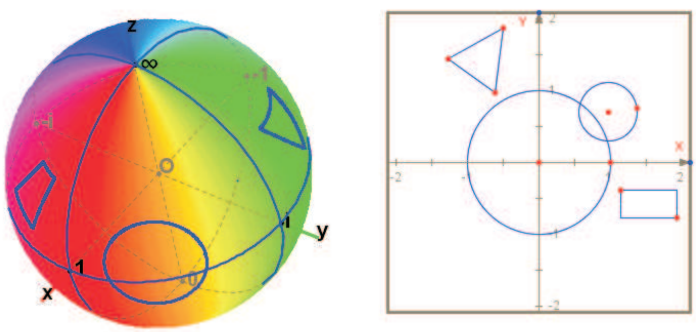

圖 34: 極平面球變換將複數平面上的圓、三角形及矩形映射至黎曼球面

圖 35 展示極平面球投影變換將方格線圖投影至黎曼球面的圖形, 極平面球投影變換是保角變換也是保圓 (直線視爲圓) 變換, 因此, 其對應曲線 (圓弧) 也會正交。左圖是將方格線圖同時投影至切於南極點的平面 $z = -1$ 及投影至鏤空的球面上, I, K分別是黎曼球面上, 1 及 i 的投影點。這正與將球面上諸圓弧圖形投影至 $z = -1$ 平面上一樣。中圖爲方格線圖投影至實球面上的另一面相 (球背面的弧不呈現)。

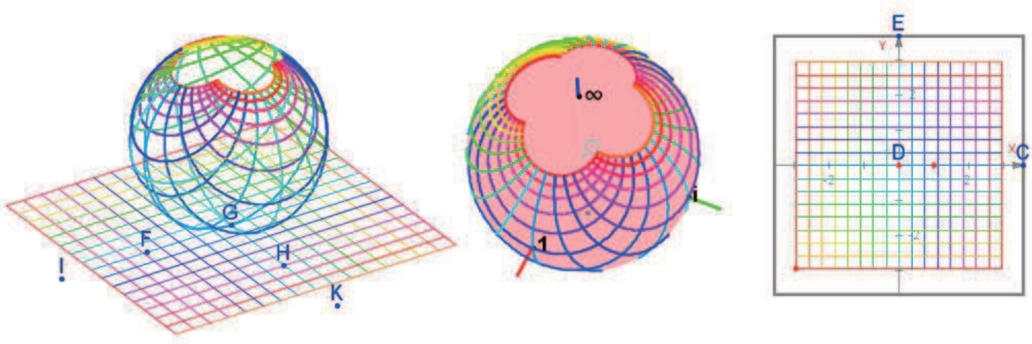

圖 35: 方格線的極平面球投影圖形的不同面相

雙曲幾何的圓盤模型 (hyperbolic geometry disk model) 與半球面模型的變換對應 (林, 民106b pp31), 其實就是將將圓盤模型上的複數點, 透過由南極點 $(0, 0, -1)$ 投影的「極平面球變換」, 投影至球面的上半球的變換, 此時它的對應公式是:

$$x + iy \to \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, -\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right).$$

圖 36 展示在圓盤模型中, 三角形的外接圓構圖 (左圖) 對應到半球面模型的構圖 (右圖), 其中 I 為圓盤模型中三角形 ABC 的外接圓圓心, 它是 AB 及 AC 邊中垂線的交點, 右圖的相應符號, 展示半球面模型的構圖。

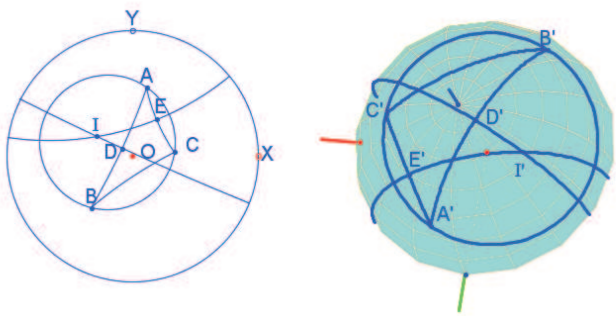

圖 36: 圓盤模型中, 三角形的外接圓構圖 (左圖) 對應到半球面模型的構圖 (右圖)

黎曼球面上的定義域角著色繪圖

透過極平面球投影變換, 我們可以將複數平面上的角繪圖移至黎曼球面上, 前面圖 34 左圖中的色彩就是函數 $f(z) = z$ 的黎曼球面角著色繪圖。由於球面上角的方向性 (sense) 是以球心向外看為基準 (Needman 1997, pp142), 因此, 對解析函數黎曼球面上的極點及零點, 其顏色環繞的方向性正好與平面時相反, 在極點時, 紅橙黃綠藍靛紫為逆時針方向, 而在零點

時, 是順時針方性。Wegert (2012, pp40) 建議以同時展示兩個半球面圖形的方式展示球面, 以 $f(z) = 1/z$ 的值域作爲球面色彩的定義域, 使其顏色展示的方向性與平面一致。數學算板維持原樣, 使用者自行注意, 在球面的角著色繪圖時, 極點及零點其顏色環繞的方向性正好與平面時相反, 仍用可多方觀察的整體球面展示方式。圖 37 展示 $f(z) = z$ 的等模圍線、等角圍線及同時呈現的等模等角圍線, 我們可以淸楚的看出, $f(z) = z$ 的角著色繪圖中, 等模圍線及等角圍線就是球面的緯線與經線。

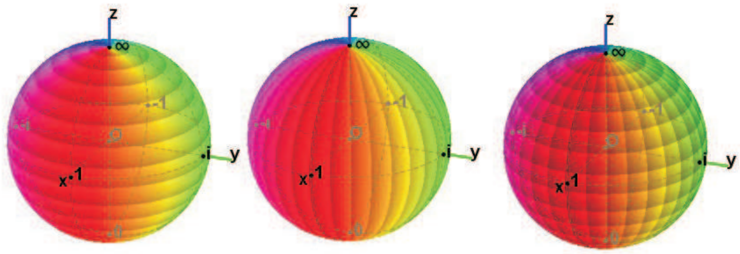

圖 37: $f(z) = z$ 的角著色繪圖中, 等模圍線 (左圖) 及等角圍線 (中圖) 就是球面的經緯線

圖 38 展示 $f(z) = z$ 的等實部圍線、等虛部圍線及兩者並陳的圖形, 這兩圍線都是以無限大點爲切點的相切的球面圓束, 兩者也是正交的。

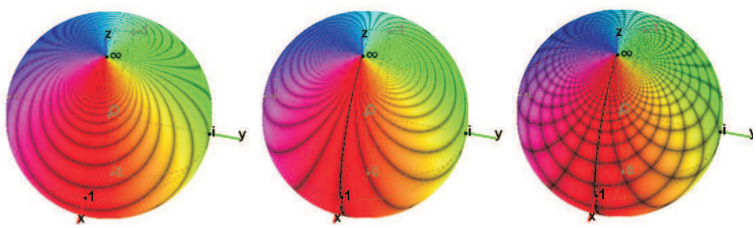

圖 38: 等實部圍線、等虛部圍線及兩者同時呈現

圖 39 展示極黑白格及方黑白格在黎曼球面上的呈現 (對照平面上的著色定義)。

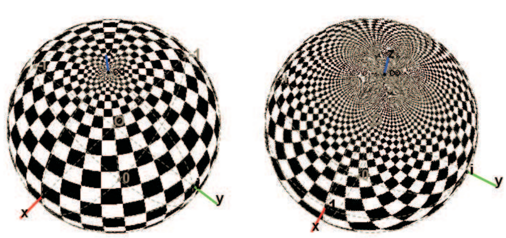

圖 39: $f(z) = z$ 的平面極黑白格及方黑白格著色定義在黎曼球面上的呈現

圖 40 展示函數 $f(z) = z(z-i)(z-3)(z-1+i)^2$ 黎曼球面角著色繪圖。左圖展示 $z = 3, 1-i, \infty$ 的黎曼部分球面, 中圖展示 $z = i$ 的黎曼部分球面, 右圖爲複數平面上相關的點。

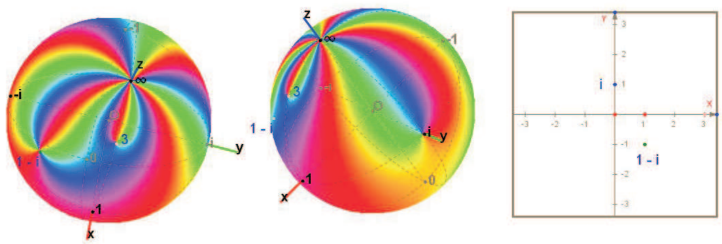

圖 40: 函數 $f(z) = z(z-i)(z-3)(z-1+i)^2$ 的黎曼球面角著色繪圖不同的面相

圖 41 展示前述函數分別同時呈現等角圍線及等模圍線的狀況。

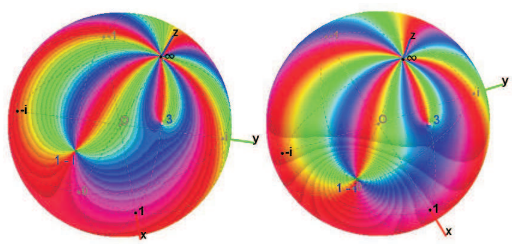

圖 41: 函數 $f(z) = z(z-i)(z-3)(z-1+i)^2$ 的黎曼球面角著色繪圖

左圖: 含等角圍線, 右圖: 含等模圍線

圖 42 展示函數 $f(z) = (z-2)^{(1+2i)}$ 分別在平面及黎曼球面上的角著色繪圖, 可以淸楚的看出在零點 $z = 2$ 時, 兩者著色的方向正好相反, 且在平面上, 極點無限大無法呈現, 但在黎曼球面上則可淸楚的呈現。

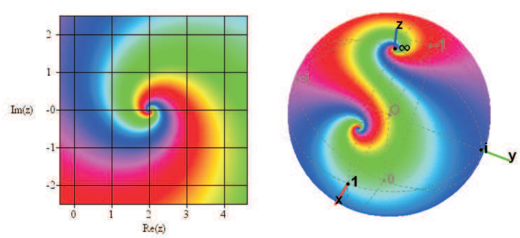

圖 42: 函數 $f(z) = (z-2)^{(1+2i)}$ 在複平面及在黎曼球面的角著色繪圖比較

圖 43 展示函數 $f(z) = \cos(1/z)$ 及 $g(z) = e^{1/z}$ 的黎曼球面角著色繪圖, $z = 0$ 是它們的本性奇點。

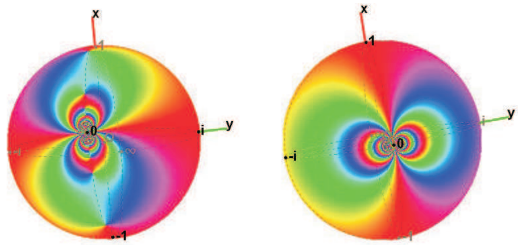

圖 43: 函數 $f(z)=\cos(1/z)$ 及 $g(z)=e^{1/z}$ 的黎曼球面角著色繪圖

六、向量場

向量場是複變函數的另一種圖形表徵。對一個複變函數 $w=f(z)$, z 仍然表示一個複數平面上的點, 但將 $f(z)$ 視爲一個以 z 爲始點的向量, 將複數平面上的點及這些向量都畫在 z 平面上得到的圖形, 就是這個函數的向量場圖形表徵。由於 $f(z)$ 向量長度有時差異甚大, 數學算板畫出等長的向量, 但以太陽光譜 (java HSB 色譜) 的紅、橙、黃、綠、藍等顏色由大到小來表示同一個向量場中向量的相對長度, 紅色最長。設 $[u(x,y),v(x,y)]$ 表示一個向量場, 則複變函數 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 就代表這個向量場。圖 44 展示數學算板向量場繪圖程式中, 三個函數 $f_1(z)=-z$, $f_2(z)=(x-y)+i(x+y)$, $f_3(z)=z^2$ 的向量場圖形。

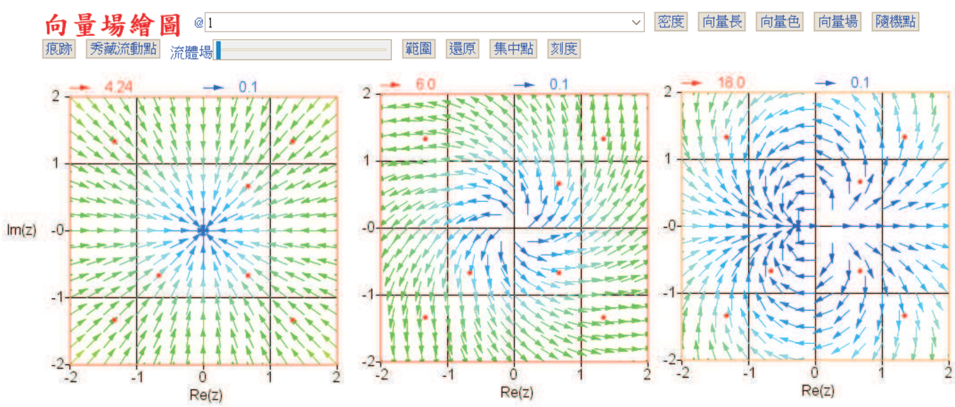

圖 44: 函數 $f_1(z)=-z$, $f_2(z)=(x-y)+i(x+y)$, $f_3(z)=z^2$ 的向量場圖形

向量場中粒子的流動

數學算板的向量場繪圖程式也可將向量場視爲粒子流動的速度場, 在粒子所在位置的向量方向取適當的點作爲粒子運動的次一點, 做成一個模擬粒子移動的流動場, 並選取幾個粒子 (內定紅色, 可改爲其他顏色), 讓其留下運動的軌跡。向量場程式取得初始粒子有兩個方法, 一爲隨機在畫面內取點, 另一爲依所呈現的向量的始點位置取點, 兩者所取的數量一樣, 當這些點走出

畫面之外或速度接近零或速度大於某一量時, 該點會消失, 並重新隨機出現在畫面的某一位置。圖 45 展示向量場程式中, 前述三個函數粒子流動的軌跡, 仔細觀察這些粒子的移動, 可發現它們大致沿著向量的方向移動, 紅色粒子的軌跡並不精確, 但卻展示了粒子依向量場運動的大致路徑。

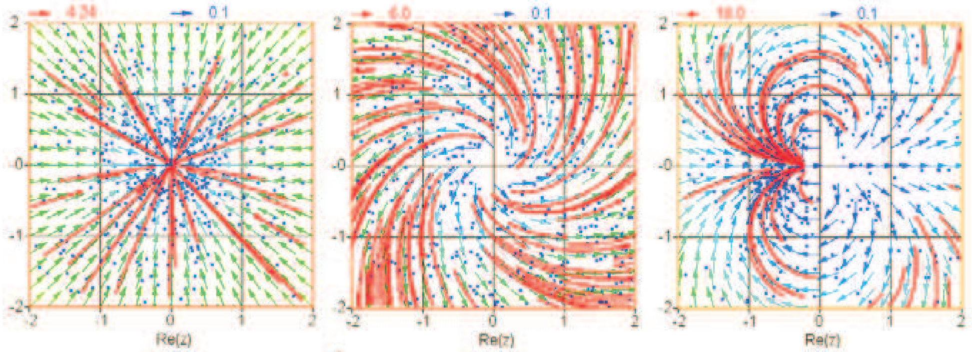

圖 45: 函數 $f_1(z)=-z$, $f_2(z)=(x-y)+i(x+y)$, $f_3(z)=z^2$ 的粒子流動軌跡

向量場的基本定理

設 $\vec{V}=[u(x,y),v(x,y)]$ 表示一個向量場, 我們有下列定理

$$\text{若且唯若 } \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}, \text{ 則存在函數 } \Phi(x,y), \text{ 使得 } u=\frac{\partial \phi}{\partial x},\ v=\frac{\partial \phi}{\partial y}\text{。}$$

此時稱此向量場爲保守向量場(conservative vector field), 或無旋度 (irrotational) 向量場, ϕ 稱爲此向量場的位勢函數 (potential function)。若 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 則稱此向量場爲無散度 (incompressible, solenoidal) 的向量場。其實若存在函數 $\Psi(x,y)$, 使得 $u=\dfrac{\partial \psi}{\partial x}, v=-\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$, 這個函數就是前述的軌跡函數。關於這個我們有下述定理 (Pennisi 等, 1962, pp357):

若且唯若 $\vec{V}=[u(x,y),v(x,y)]$ 爲一個無旋度且無散度的向量場, 則存在一個解析 (analytic) 函數 $F(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$, 使得 $F'(z)=u(x,y)-iv(x,y)$ 成立。

F 稱爲 $\vec{V}$ 的複位勢函數 (complex potential function)。ϕ 稱爲 $\vec{V}$ 的位勢函數, ψ 稱爲 $\vec{V}$ 的流線函數 (stream function), 函數 F 的等實部圍線 (ψ 的圍線) 及等虛部圍線 (ϕ 的圍線) 分別稱爲 $\vec{V}$ 的等位勢線 (equipotential line) 及流線 (stream line)。流線就是向量場的粒子以向量爲速度流動的軌跡, 而等位勢線與流線具有正交的性質。

由前述定理知, 任意解析複函數 F, 均定義了一個無旋度且無散度的向量場, 此向量場就是 $F'(z)$ 的共軛複函數。數學算板以 conj$(F'(z))$ 表示 $F'(z)$ 的共軛複函數, 要獲得 F 的對應向量場, 只要求出 $F'(z)$, 輸入 conj$(F'(z))$ 即可。爲了方便, 向量場繪圖程式也提供了直接

輸入兩個二元函數的方式輸入向量場, 此時, 它是否有位勢函數及流線函數, 則需加以檢驗, 若有則需用解二元聯立微分方程式的方法求出其位勢函數及流線函數。

除了直接輸入向量場函數 (注意: 這不是輸入複位勢函數) 的向量場繪圖程式外, 數學算板也提供了複圍線繪圖程式, 可以直接輸入含 z, i 複變函數或兩個 x, y 的二元函數構成的複變函數。程式利用前述定義域角繪圖所述的方式, 可以畫出複函數的等實部圍線及等虛部圍線, 或等模圍線或等角圍線 (透過按鈕選擇及控制)。這個輸入的複函數若爲解析函數, 則其等實部圍線就是相應向量場的等位勢線, 而其等虛部圍線就是流線。許多討論複位勢函數的教材, 常不繪出對應的向量場, 而以流線束作爲向量場的代表。圖 46 展示的是複位勢函數 $F(z) = 1/z$, $G(z) = \ln(z+1) - \ln(z-1)$, $H(z) = i\ln(z+1) - i\ln(z-1)$ 的流線圖及其相應的向量場函數

$$\overline{F'(z)} = \text{conj}\Big(-\frac{1}{z^2}\Big),\ \overline{G'(z)} = \text{conj}\Big(\frac{1}{z+1} - 1\frac{1}{z-1}\Big),\ \overline{H'(z)} = \text{conj}\Big(\frac{i}{z+1} - \frac{i}{z-1}\Big)$$

構成的向量場。它們的流線圖正好是切於一點的拋物共軸圓束、交於兩點的橢圓共軸圓束及不相交的雙曲共軸圓束 (林, 民107b)

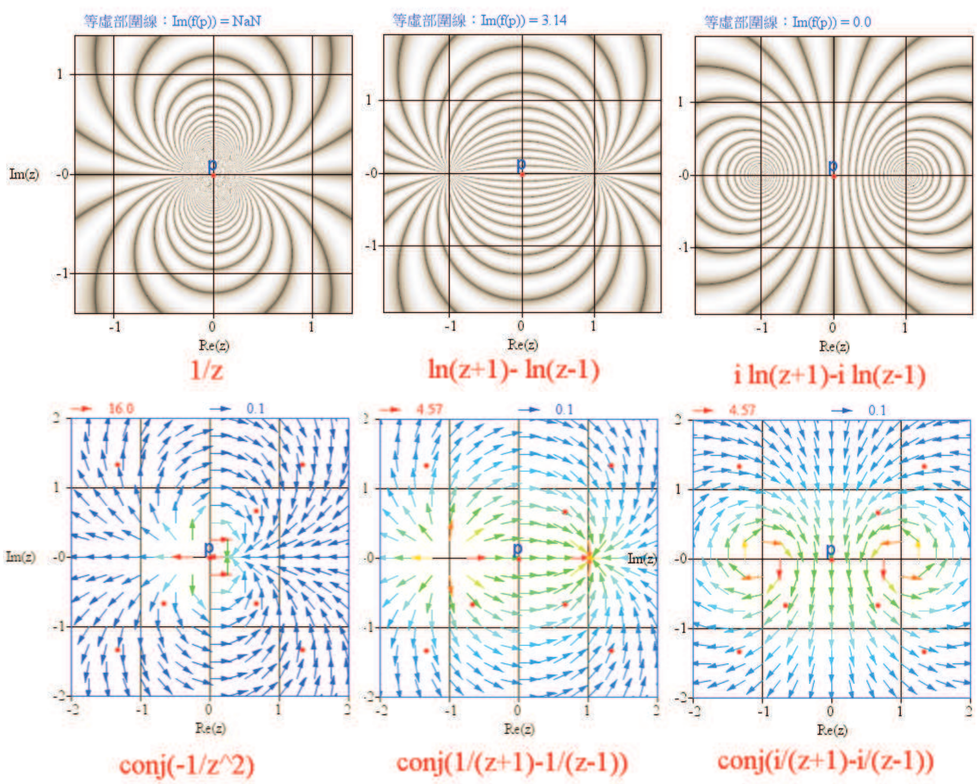

圖 46: 第一列三圖爲三個複位勢函數的流線圖, 第二列三圖爲其對應的向量場

若只展示流線束時, 要注意流線的方向, 若流線束沒有繪出流線進行的方向時, 容易造成誤會。圖 47 左圖展示複位勢函數 $F=(z^2+1)^{1/2}$ 的流線束, 會讓人誤以爲這是由左至右之流線束 (中間是線型障礙物)。中圖同時展示向量場及流線, 可以看出流線是由中間流向左右兩方 (或反之) 的。圖 47 右圖展示此複位勢函數的定義域角繪圖圖形, 可以看出 $\{(0,y)\mid y\geq 1 \text{ or } y\leq -1\}$ 正是該函數的分支切割線所在, 在該處, 流線函數並不連續。

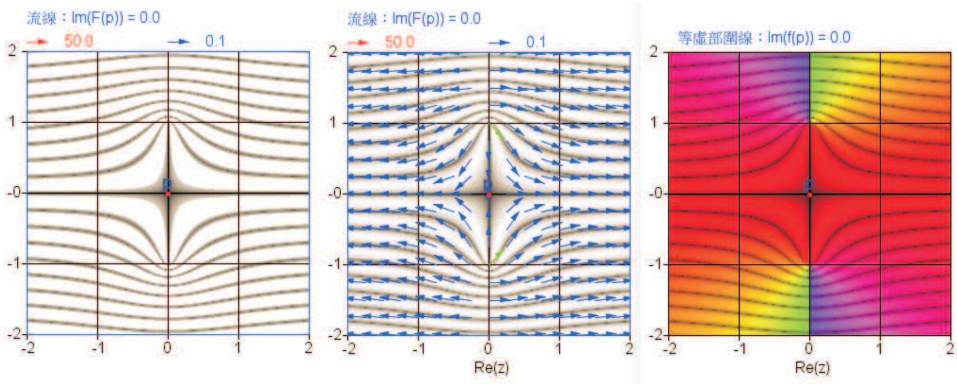

圖 47: 複位勢函數 $F=(z^2+1)^{1/2}$ 的流線、向量場、及定義域角繪圖圖形

基本向量流及其組合

(1) 均勻流 (uniform flow)—

設 $F(z)=\alpha z$, $A\in\mathbb{C}$, 則 F 的向量流是一組平行的直線, 稱爲均勻流, F 的相應向量場爲 $\overline{F'(z)}=\text{conj}(\alpha)=\overline{\alpha}$, 此向量場的向量爲常數。圖 48 左圖展示的是複位勢函數 $(1-0.5i)z$ 相應向量場 $1+0.5i$ 及其流線。

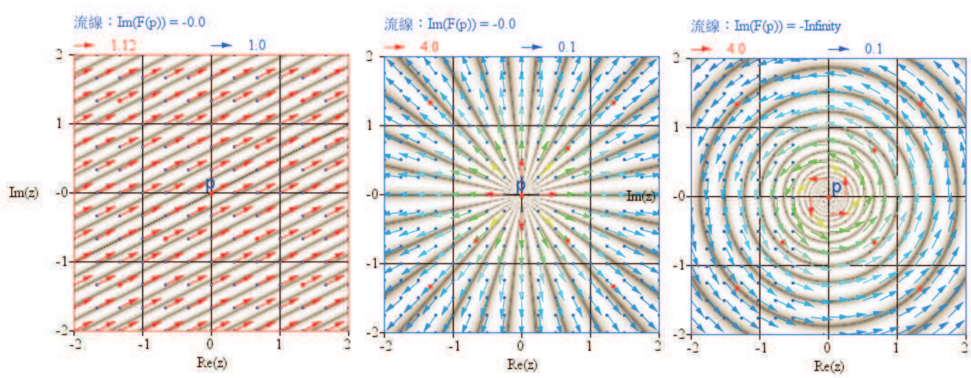

圖 48: 均勻流、源頭流及窩流

(2) 源匯流 (source and sink)—

設 $F(z)=A\ln(z-\alpha)$, $A\in\mathbb{R}$, $\alpha\in C$, F 的向量流是以 α 爲中心的幅射線束, 在 $A>0$ 時稱爲源頭流 (source), 方向輻射向外, $A<0$ 時, 稱爲匯入流 (sink), 流向中心。F 的相應向量場爲 $\overline{F'(z)}=\mathrm{conj}\Big(\dfrac{A}{z-\alpha}\Big)=\dfrac{A}{\overline{z}-\overline{\alpha}}$。圖 48 中圖展示的是複位勢函數 $\ln(z)$, 就是源頭流的一例, 是向外輻射的向量, 由向量的顏色可以看出這些向量模並不同, 在中心向量的模較大, 透過前述向量流粒子的流動我們也可以觀察向量速度的相對大小。

(3) 窩流 (vortex) —

設 $F(z)=iA\ln(z-\alpha)$, $A\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, F 的向量流是以 α 爲中心的同心圓束, 稱爲窩流, $A>0$ 時是順時針方向, $A<0$ 時是逆時針方向。F 的相應向量場爲 $\overline{F'(z)}=\mathrm{conj}\Big(\dfrac{iA}{z-\alpha}\Big)=\dfrac{-iA}{\overline{z}-\overline{\alpha}}$。圖 48 右圖就是窩流的實例, 在中心部分向量模較大, 向量流爲逆時針方向。

(4) 偶流 (doublet) — 設 $F(z)=\dfrac{A}{z-\alpha}$, $A\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, F 的向量流是相切於一點的圓束。F 的相應向量場爲 $\overline{F'(z)}=\mathrm{conj}\Big(\dfrac{-A}{(z-\alpha)^2}\Big)$。前面圖 46 第一行就是偶流的一例, 它的流線就是切於一點的拋物共軸圓束。

上述基本向量流的複位勢函數 (或向量場函數), 可透過函數的加減, 構成較複雜的複位勢函數或向量場函數。前面圖 46 第二行的圖就是兩個源匯流的組合, 而圖 46 第三行的圖就是反向兩窩流的組合。圖 49 展示的是向量場與其流線同時呈現的例子, 其中左圖及中圖就是均勻流、偶流及窩流的組合, 是遇到圓柱型障礙物的向量場及流線, 右圖爲遇到方形障礙物的向量場及流線圖。

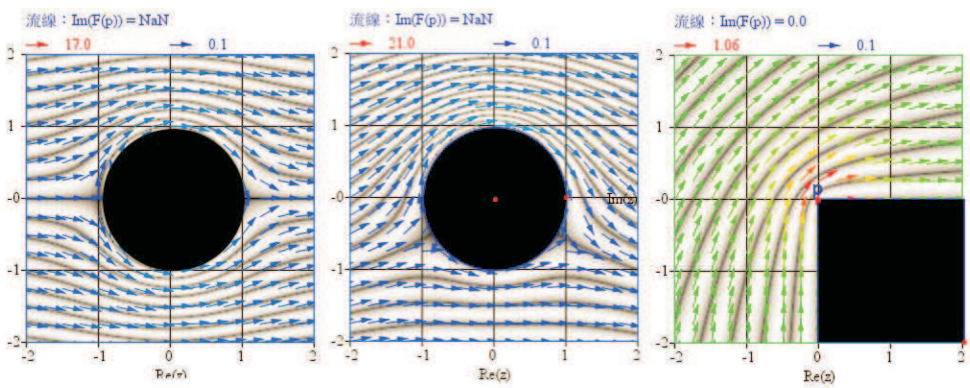

圖 49: 向量場與流線同時呈現: 其複位勢函數分別爲 $z+\dfrac{1}{z}$、$z+\dfrac{1}{z}+i\ln(z)$ 及 $i(ze^{-3i\pi/4)})^{2/3}$

數學算板將定義域角著色中繪製圍線的部分抽離出來, 成爲複位勢函數圍線繪圖的工具。在定義域著色討論時, 輸入任意複函數都可繪出其圍線, 但它的圍線圖形並非求出函數之後才

畫圖, 而是透過定義域著色反推而得的圖形。對於任一解析函數, 數學算板的複函數的圍線函數, 都提供了圍線的圖形程式, 只要輸入向量場的複位勢函數就可獲得該複函數的等角、等模、等實部及等虛部等圍線。圖 50 展示的就是複位勢函數 $f(z)=z+i\ln(iz+1)-i\ln(iz-1)$ 互相垂直的流線、位勢線及兩者正交的呈現, 這個複位勢函數是均勻流與兩個反向窩流的組合, 稱爲凱勒文卵形 (Kelvin Oval) 流。

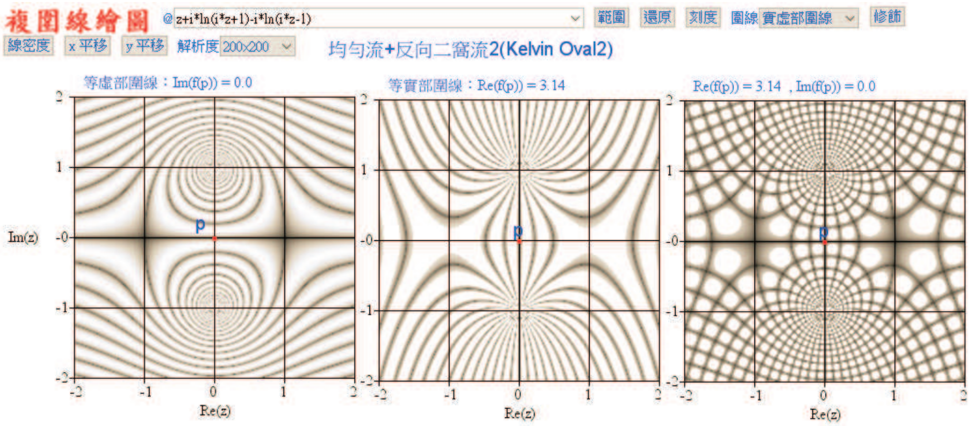

圖 50: 複位勢函數 $f(z)=z+i\ln(iz+1)-i\ln(iz-1)$ 的流線、位勢線及兩者正交地呈現

七、結語

本文討論複數及複變函數的一些圖形表徵, 及其在數學算板中的實踐。包含了基本複數在複數平面的點、向量及其運算之圖形表徵, 複變函數映射觀點的 z-平面、w-平面, 複變函數的景觀式繪圖、複變函數圖形表徵視爲四維空間物件在三維空間上的投影、複變函數的定義域角繪圖在平面、空間及黎曼球面上的圖形表徵, 最後對向量場的圖形表徵、等位線、流線也有一些介紹。每一種圖形表徵都可以透過數學算板的內建程式, 以輸入或選取函數式的方式簡單獲得, 而且可以透過內建的各種按鈕, 改變圖形表徵呈現的狀態。立體的圖形, 都可以透過滑鼠, 就選取的狀態, 從上下四面八方來觀察它們不同的面相。希望這樣的設計, 能夠對教師的教學呈現, 及學生的學習有所幫助。本文的部分動態圖形將在本文發佈時放置於網頁 `http://mathboard.tw` 或 `http://mathboard.org` 上, 數學算板 1.03 測試版也將放置於該網頁上。

參考資料

1. 林保平。多面體的生成及動態模型製作在數學算板上的實踐(上)。科學教育月刊, 第412期, 31-49, 民107a。
2. 林保平。多面體的生成及動態模型製作在數學算板上的實踐(下)。科學教育月刊, 第413期, 2-14, 民107a。

3. 林保平。透過動態的函數迭代系統觀察莫必烏斯變換分類的不變圖形。數學傳播季刊, 第42卷, 第2期, 71-89, 民107b。
4. 林保平。數學算板中碎形觀察及探索的工具。科學教育月刊, 第403期, 2-18, 民106a。
5. 林保平。雙曲幾何基本構圖及變換在數學算板中的實踐與應用。科學教育月刊, 第402期, 16-37, 民106b。
6. 林保平。代數算板及其在代數教學上的應用。中等教育季刊, 第63卷第3期, 137-144, 民101。
7. 林保平。JavaSketchpad 編輯器在數學科教具學具環境設計上的應用。科學教育月刊, 第290期, 48-57, 民95。
8. Corless, Robert M. and Jeffrey, David J., Graphing Elementary Riemann Surfces. *SIGSIM*, Vol.32(1), no.123, March 1998, 11-17. `http://www.apmaths.uwo.ca/~djeffrey/Offprints/riemann.pdf`.
9. Farris, Frank A., Review of Visual Complex Analysis, by Tristan Needham. `https://scholarcommons.scu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1000&context=math_compsci`, 1998.
10. Laitone, E. V., Relation of the Conjugate Harmonic Functions to $f(z)$, *The American Mathematical Monthly*, Vol.84, No.4, 281-283, Apr., 1977.
11. Lundmark, Hans, Visualizing complex analytic functions using domain coloring. `https://web.archive.org/web/20060502154939/http:/www.mai.liu.se/~halun/complex/domain_coloring-unicode.html`, 2004.
12. Needham, Tristan, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, 1997.
13. Pennisi, Louis L., Gordon, Louis I and Lasher, Sim, *Elements of complex variables*, 中央圖書供應社, Taipei, Taiwan, 1962.
14. Poelke, Konstantin and Polthier, Konrad, Eurographics/ IEEE-VGTC Symposium on Visualization 2009 H.-C. Hege, I. Hotz, and T. Munzner (Guest Editors), Vol.28, Number 3, 2009.
15. Wegert, Elias, *Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits*, Springer, 2012.

—本文作者爲台北市立教育大學數資系退休副教授—