數學傳播 45卷1期, pp. 58-63

有容乃大
—談談魯珀特方塊

常文武

問題由來

17世紀有位德國王子, 名叫魯珀特。他的一生充滿傳奇：他曾身披戰袍征戰疆場, 本人又酷愛科學與藝術。今天他被後人記住的不是他戰功卓著或是顯赫的皇室地位, 而是他在科學和數學方面的貢獻。其中有稱爲魯珀特之淚的玻璃科學藝術, 也有本文要談的數學上的一條定理 — 魯珀特方塊定理。

人人都知道每個正方體有六個正方形的側面和十二條的棱。如果把一個正方體拋向空中, 在正午日光的垂直照射下它的邊緣輪廓在地面會留下時而正方形, 時而長方形, 時而平行六邊形, 甚至正六邊形的各種影子。

問題來了, 這些影子中有沒有能容納一個比這個正方體的某個側面還大的正方形呢?

魯珀特王子原來的問題是：一個正方體能否容許被一個與它等大的正方體穿過? 基於對於正方體是一種簡單凸多面體的考慮, 從影子入手似乎簡化了問題, 不過卻是與原問題同解的問題。

第一個方案是魯珀特在世的西元 1693 年給出的, 在投影爲正六邊形的方向就可找到一個可容等大正方體通過的通道。王子從這個解答賺到了打賭的賭資。當然問題還有續集, 允許通過的最大的正方體邊長多大? 直至又過了 101 年, 到 1794 年才有人解決了最大正方體問題。本文試著用通俗的方法再現這個問題的解答過程。

問題的解決

首先, 魯珀特王子猜想影子面積最大時才能容納最大正方形。最大的影子應該是當最長對角線順著 (平行於) 光線方向時, 這樣正好能得到一個正六邊形影子。也可以想像這相當於將一個正方體吊起一個角, 讓正上方有一束平行光源投影在水準桌面。

事實證明, 這影子中確實可以容得下正方體的一個側面。

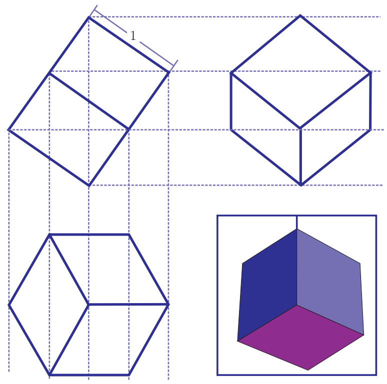

圖 1: 正方體以一角懸掛的三視圖

正視圖 (上左)、側視圖 (上右)、頂視圖 (下左) 和直觀圖 (下右)

讓我們來算一算。

觀察圖 1 的三視圖, 它有三個方向的投影。對於最爲關心的頂視圖有一個問題是, 這個六邊形的邊長爲幾何呢?

先考察圖 1 正視圖裡的長方形, 它的短邊爲正方體棱長的平行投影, 記爲 1, 長邊爲面對角線的平行投影, 算得爲 $\sqrt{2}$。注意到長方形的一條對角線 (其實就是正方體的最長對角線) 是豎直向下的, 與頂視圖配合看, 正六邊形影子的邊長爲 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

接下去, 讓我們在這個正六邊形影子中找最大正方形。圖 2 是最大的正方形放置方法。記這個最大正方形的邊長爲 $2x$, 可由 $AB = AC + CB$ 列方程:

$$2x - \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \text{解得 } 2x = \sqrt{6} - \sqrt{2}。$$

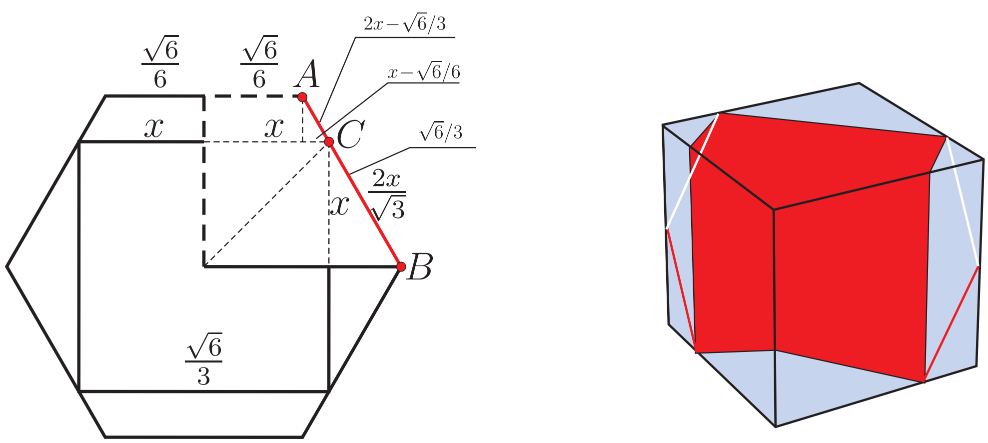

圖 2: 嵌入六邊形影子的正方形以及模擬切割效果。

顯然正四棱柱的橫截面邊長 $2x$ 大於 1, 約等於 1.035。這就是魯珀特王子當時得到的一個解。確立了正方體可以穿過等大的另一個正方體而不擊碎它這個有趣的結論! 留下的洞 (其實更像一個環) 由兩個直角三棱柱和兩個直角四面體相間銜接而成。

找出最優解

上一節的結論似乎已經完美了, 但是正如第一節所言, 我們得到的並不是最優解! 那麼, 穿過單位正方體的最大的正方體 (如果有的話) 邊長到底爲多少呢?

讓我們用「變換視角法」來找到這個最優解。

圖 3 是兩張不同的俯仰角拍攝的正方體的照片, 左邊一張視角正對著正方體的空間對角線, 因而輪廓看上去很像一個正六邊形。右邊以仰角拍攝, 離相機較近的頂點就上移了一些, 被攝的立方體輪廓顯得就像扁平的平行六邊形了。二者的相同之處是水準的跨度相同, 保持了面對角線長度 $\sqrt{2}$。

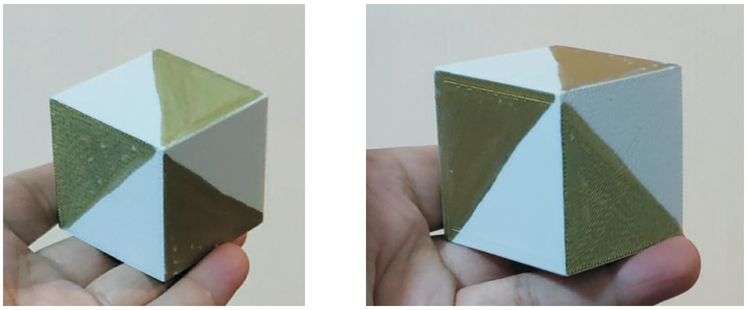

圖 3: 不同視角下的同一正方體影像

魯珀特的解來自圖 3 左圖的正六邊形的影子。其它非線對稱的平行六邊形或長方形投影顯然不是最優解的理想棲息地, 排除嫌疑。下面僅在如圖 3 右圖這類線對稱的六邊形影子裡尋找最優解。

引入變數俯仰角來討論不同的投影效果。這個角度定義爲立方體空間對角線與視平面法線之間的夾角。所以圖 3 左的俯仰角爲 $0°$, 右邊有一個 $8°$ 左右的仰角。以中分面的側視來示意如下:

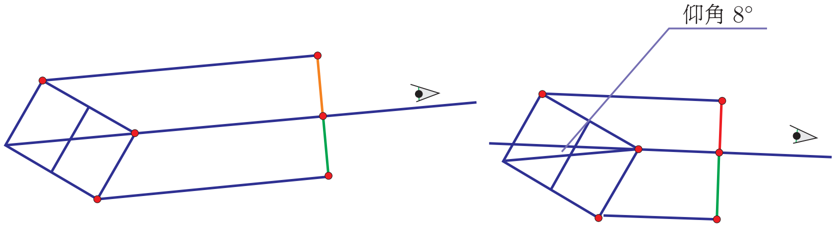

圖 4: 正視正方體時, 對角面的視覺影像是相等的兩條線段; 仰視正方體, 對角面的視覺影像是上下不等的線段。

一般地, 設視線與面對角線夾角爲 t, 則前棱與視線夾角爲 t 的餘角。由此可以算出上下兩段的長度分別爲 $\sqrt{2}\sin t$ 與 $\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos t$。再利用水準跨度恒爲 $\sqrt{2}$ 不變以及平行六邊形軸對稱性繪出。其中 $\overline{DB'}=\sqrt{2}\sin t$, $\overline{BB'}=\cos t$。

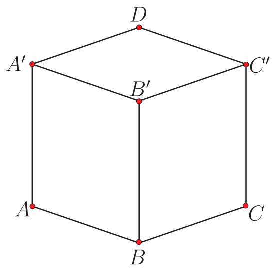

圖 5: 保持寬度 $\sqrt{2}$ 的正方體影子。

現在在這個一般的六邊形內找最大的正方形, 見圖 6。

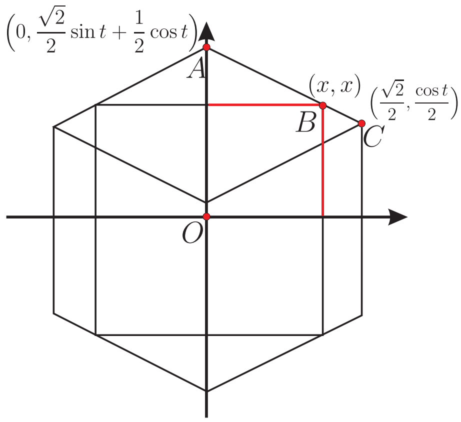

圖 6

可由 A-B-C 三點一線得出方程: $\dfrac{-\sqrt{2}/2\sin t}{\sqrt{2}/2}=\dfrac{2x-\cos t}{2x-\sqrt{2}}$, 解得, $2x=\dfrac{\cos t+\sqrt{2}\sin t}{1+\sin t}$, 利用高等數學最大值的理論, 這個關於 t 的單變數函數有最大值 $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$。

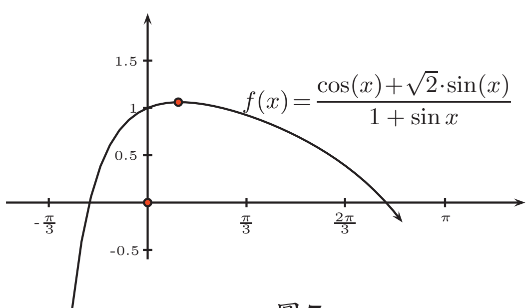

圖 7

由此結果可知, 如果用一把利刃經過頂面一組鄰邊的 3/4 分點切入正方體內, 過中心到對面正方形的另一組鄰邊 3/4 分點聯線穿出, 就可得到包含最大正方形的截面六邊形。

爲了看清楚截面的位置, 我們再換個角度來描繪, 如圖 8

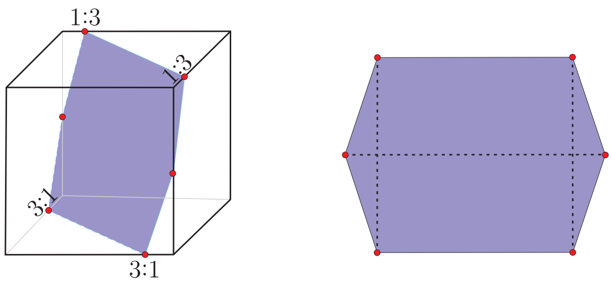

圖8

不難看出, 這個切割法得到的是六邊形的截面。它是兩個共下底的全等的等腰梯形組成的。可經過簡單計算得到：上底長 $3\sqrt{2}/4$, 下底 $\sqrt{2}$, 腰長爲 $\sqrt{5}/4$。繪製這樣的六邊形如圖 8 右, 其中內嵌的正方形邊長 $3\sqrt{2}/4$ 近似值爲 1.06, 這就是現在稱之爲魯珀特方塊的棱長。

被最大正四棱柱洞穿後的正方體殘骸長什麼樣呢? 通過電腦模擬可見, 原來它是一個由兩個直三棱柱和兩個直角四面體組成的環, 請看圖 9。而切掉的部分是一個凸多面體, 如圖 9左。注意, 被切掉的原正方體兩對角並不能連成一條垂直於斷面正方形的法線!

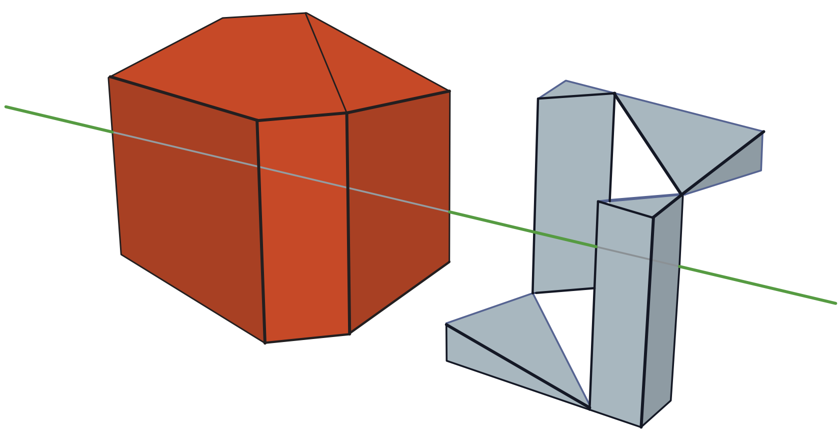

圖 9: 魯珀特方塊電腦模擬: 紅色爲切去的一個凸 10 面體：灰色爲剩下的環形殘骸。

動手做

找一個正四棱柱盒子 (比如某種牛奶盒) , 再利用一張價值微不足道的卡紙, 就可輕鬆實現一個這樣的結構。下圖 10 所示爲製作模型的模板。

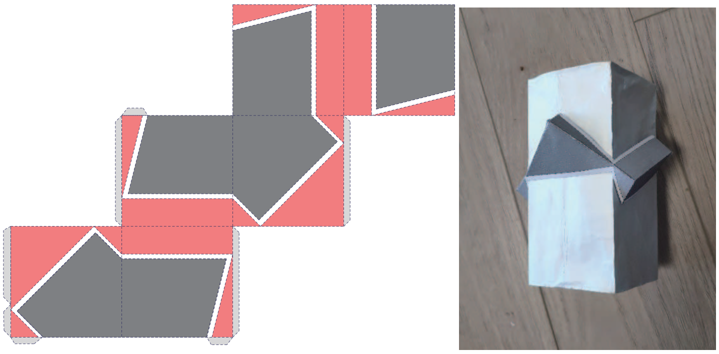

圖 10: 範本和實物圖。

說明:

1. 縮放圖 5中的正方體展開圖, 使得其中的正方形與找到的四棱柱底面大小相同。
2. 列印下來。
3. 剪去深色部分以及外輪廓線。
4. 摺出每道摺痕。
5. 粘合成立體正方體的殘骸結構。
6. 用四棱柱盒子穿過製作好的立體結構。

結語

魯珀特方塊在提出 300 多年以後依然被人提及是因爲它與我們直覺相悖。不過, 在理性分析得到了確鑿結論後值得再來看當初的不切實際的想法。打賭輸了的一方感到不存在解是因爲沒想到只要從影子裡找出側面正方形即可。可是爲了求解只要求影子面積大, 這個貪婪的想法反而使得與最優解擦肩而過。看來唯有小心求證, 不放過每個犄角旮旯, 才能擴大容量, 容天下難容之事! 有容乃大是也!

参考文獻

1. George Hart, *Math Monday: Passing a Cube Through Another Cube*, From MoMath – National Museum of Mathematics, https://momath.org/home/math-monday-passing-a-cube-through-another-cube/.
2. Weisstein, Eric W., *Prince Rupert's Cube*, From MathWorld – A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/PrinceRupertsCube.html.

—本文作者常文武任職中國上海市普陀區現代教育技術中心—