

2020年第61屆國際數學奧林匹亞競賽 試題解答

教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組

2020年第61屆國際數學奧林匹亞競賽 (International Mathematical Olympiad, 簡稱 IMO) 由俄羅斯主辦, 原定於今年七月份於聖彼得堡舉辦, 唯因全球 COVID-19 疫情緣故, 改於九月份由各參賽國各自於境內設立考試中心 (Exam Center), 由大會指派之專員 (Commissioner) 在場監督, 並由俄羅斯主辦國遠端視訊監考下進行賽事。本屆共有 105 個國家與會、合計 616 位學生 (含 56 位女學生) 代表參賽。

往年活動先由各參賽國 (主辦國除外) 於規定時間內提交數道試題, 再由主辦國的試題委員會 (Problem Selection Committee, 簡稱 PSC) 研究選出 30 道左右的預選試題, 分屬代數、組合、幾何、數論等不同領域和不同難度的試題; 最後再經由各國領隊組成的評審會議 (Jury Meeting) 票選暨修訂出最後 6 道 IMO 試題, 依主題內容及難易層次分配成兩份試題, 分別在連續的兩天舉行競試, 每天 3 道試題, 考試時間都是 4 小時又 30 分鐘。然今年由於遠距競賽關係, 改由 PSC、主辦國與 IMO 委員會 (IMO Board) 先行決定題目後, 於考前三個小時以入闖方式送交各國領隊, 在該國專員監督下進行翻譯後, 在考前一個小時送交大會審查, 並於考前三十分鐘內交由專員押送至考場。除此變動外, 考試的題目數量與時間長度與往年相同。

值得注意的是, 我國前國手余竑勳與林庭風所編題目, 榮登今年度賽事的壓軸第六題, 為台灣所編題目首次登上此一關鍵題號, 證明我國在題目之編寫與創新的能力上已受世界認可。

本屆試題第一題的領域為幾何, 第二題為代數, 第三題為組合, 第四題為組合, 第五題為數論。第六題就內容而言應屬組合題, 導致今年有題型分配不均的問題。對此次我國代表團所翻譯成正體中文版的 6 道 IMO 試題提供參考解答, 以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

問題一: 考慮凸四邊形 $ABCD$ 。點 P 位於 $ABCD$ 的內部。下列比例等式成立:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

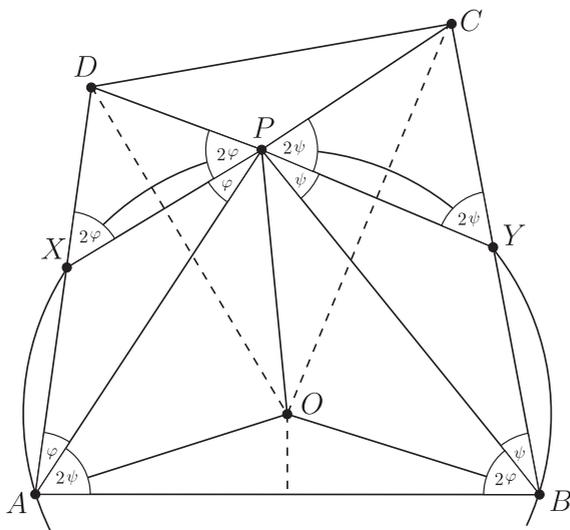
證明下列三線交於一點: $\angle ADP$ 與 $\angle PCB$ 的內角平分線, 以及線段 AB 的中垂線。

試題委員會公布的參考答案:

令 $\varphi = \angle PAD$, $\psi = \angle CBP$ 。由題設知 $\angle PBA = 2\varphi$, $\angle DPA = 3\varphi$, $\angle BAP = 2\psi$ 與 $\angle BPC = 3\psi$ 。令 X 在線段 AD 上使得 $\angle XPA = \varphi$, 則我們有

$$\angle PXD = \angle PAX + \angle XPA = 2\varphi = \angle DPA - \angle XPA = \angle DPX.$$

從而 $DX = DP$, 故 $\angle ADP$ 平分線即為 XP 的中垂線。同理, 考慮 Y 在 BC 上使得 $\angle BPY = \psi$, 則可知 $\angle PCB$ 平分線即為 PY 中垂線。至此, 我們知原題等價於證明 XP 、 PY 與 AB 的中垂線共點。注意到 $\angle AXP = 180^\circ - \angle PXD = 180^\circ - 2\varphi = 180^\circ - \angle PBA$ 。故 $AXPB$ 四點共圓; 這表示 X 在 APB 外接圓上。同理, Y 也在 APB 外接圓上。從而由外心性質知 XP 、 PY 與 AB 的中垂線都過 $AXPYB$ 外接圓圓心。證畢。 \square



評註: 本題為簡單幾何問題, 解法眾多, 適合做為練習題。本屆沒有中等或困難的幾何問題, 實屬遺憾, 且對於我國以幾何見長的選手是非常不利的出題方向。此外, 本年度題目高度偏向組合題, 亦是導致排名大混亂的原因之一。

問題二: 實數 a, b, c, d 滿足 $a \geq b \geq c \geq d > 0$ 且 $a + b + c + d = 1$ 。證明

$$(a + 2b + 3c + 4d) a^a b^b c^c d^d < 1.$$

試題委員會公布的參考答案:

由算幾不等式, 我們有

$$a^a b^b c^c d^d \leq a \times a + b \times b + c \times c + d \times d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

故僅需證明 $(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 1 = (a + b + c + d)^3$ 。此一齊次不等式有多種證明方法，例如：

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^3 &> a^2(a + 3b + 3c + 3d) + b^2(3a + b + 3c + 3d) \\ &\quad + c^2(3a + 3b + c + 3d) + d^2(3a + 3b + 3c + d) \\ &\geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a + 2b + 3c + 4d). \end{aligned}$$

評註：這是一題中間偏易的代數題目，且為可以使用微積分處理的不等式題目。不等式消失了這麼多年後突然出現令人相當訝異，且還是用微積分相對容易處理的不等式，與往年的選題原則不太吻合。

問題三：有 $4n$ 顆鵝卵石，重量分別為 $1, 2, 3, \dots, 4n$ 。每顆鵝卵石被塗成 n 種顏色中的一種，使得每個顏色各有四顆鵝卵石。證明我們可以將鵝卵石分成兩堆，使得以下兩個條件都被滿足：

- 兩堆鵝卵石的總重量相同。
- 每堆鵝卵石都包含每種顏色的鵝卵石各兩顆。

試題委員會公布的參考答案：

將鵝卵石配對為

$$S := \{\{1, 4n\}, \{2, 4n - 1\}, \dots, \{2n, 2n + 1\}\}.$$

我們僅需證明可以將 S 分為兩個子集，每個子集包含 n 對，使得每個子集中都包含每個顏色的鵝卵石各兩顆。

構造多重圖 G (允許自環與重邊的圖)，其 n 個定點各對應一個顏色。對於 S 中的每一對鵝卵石，我們畫一條邊連結這兩顆鵝卵石的顏色。這使得每個頂點的 degree 是 4。此外，我們所希望的分拆方法，等價於存在一個將 G 的邊塗成兩色的方法，使得每個頂點對每色邊的 degree 都是 2。

要完成題目，僅需證明對於 G 的每個連通區塊 G_1 ，我們都能給出此塗色方法。基於每個頂點的 degree 都是偶數， G_1 必存在 Euler circuit C (也就是經過 G_1 每條邊恰一次的路徑。) 注意到 C 的邊是偶數 (其實是 G_1 頂點數的兩倍。) 這表示我們可以將 C 中的所有邊塗成兩色，使得相鄰邊不同色 (我們只要沿著 C 進行一筆畫，並在過程中交互塗色即可。) 這使得 G_1 的每個頂點對於兩色的 degree 都相同。證畢! \square

評註：本題為中高難度組合問題，屬於圖論問題。繼 2019 年 IMO 第三題後，今年再次出現

圖論，此是否代表數學競賽中圖論領域的復甦，值得關切。另本解法的最後部分為 Julius Petersen 的 2-factor theorem，為圖論重要定理。

問題四：令 $n > 1$ 為一正整數。有 n^2 個車站坐落於一座山坡上，每個車站的高度皆不同。兩個纜車公司， A 與 B ，各營運 k 台纜車；每台纜車從其中一站開向另一個高度更高的站（中途各站皆不停）。 A 公司的 k 台纜車共有 k 個不同起始點與 k 個不同終點，且起點較高的纜車終點亦較高。 B 公司符合相同條件。我們說兩個站被一個公司連接若且唯若其中較低的車站可以透過一台或更多台該公司的纜車抵達較高的車站（不允許其他在車站間的移動方式。）

試求最小的正整數 k 使得保證有兩個車站同時被兩個公司連接。

試題委員會公布的參考答案：

答案為 $k = n^2 - n + 1$ 。為了方便解釋，我們將車站由低到高編號為 $1, 2, \dots, n^2$ 。

我們首先構造 $k = n^2 - n$ 時的反例。令 A 公司纜車連接所有形如 $(i, i + 1)$ 且 $n \nmid i$ 的車站對。注意到若 (i, j) 被 A 連接，則 $[i/n] = [j/n]$ 。

令 B 公司纜車連接所有形如 $(i, i + n)$ 且 $1 \leq i \leq n^2 - n$ 的車站對。注意到若 (i, j) 被 B 連接，則 $i \equiv j \pmod{n}$ 。從而易知沒有車站同時被 A 與 B 連接。

接著證明當 $k = n^2 - n + 1$ 時必滿足題意。我們以一個 A 鏈表示一系列的車站 $a_1 < a_2 < \dots < a_t$ ，其中 a_i 與 a_{i+1} 都被 A 公司連接，但 a_1 不是任何 A 車的終點， a_t 不是任何 A 車的起點。我們將沒有跟任何其他站被 A 車連接的站，單獨視為一個 A 鏈，則 n^2 個車站每個都必須屬於一條唯一的 A 鏈。類似定義 B 鏈。

基於所有 A 車的終點都不一樣，共有 $n^2 - k = n - 1$ 個車站不是任何 A 車的終點，而這些點必須是某個 A 鏈的起點，從而共有 $n - 1$ 條 A 鏈。同理，共有 $n - 1$ 條 B 鏈。這表示一共有 $(n - 1)^2$ 組 $(A$ 鏈, B 鏈) 組合。但一共有 n^2 個車站，因此必有兩個車站屬於同一個 $(A$ 鏈, B 鏈) 組合，且這不可能是只有一個站的 A 鏈，也不可能是只有一個站的 B 鏈。換言之，這兩個車站必同時被兩家公司連接。證畢！ \square

評註：此題為一簡單的組合題目，由基本的鴿籠原理便可處理完畢。另外，“起點高的車站終點也高”這個條件其實完全無用。

問題五：給定一疊 $n > 1$ 張的卡片。每一張卡片都寫上一個正整數。這疊卡片有個性質是，每一對卡片上數字的算術平均，都是若干張卡片上數字的幾何平均。

試問哪些 n 會保證這些卡片的數字全部相等？

試題委員會公布的參考答案：

答案為所有 $n > 2$ 。

假設牌上的數字 a_1, a_2, \dots, a_n 不全相同。令 $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。若 $d > 1$ ，我們可以將 a_1, a_2, \dots, a_n 用 $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}$ 取代，而題目性質不變。

故我們不失一般性假設 $d = 1$ 。以下我們要在假設下，證明 $d > 1$ ，從而導致矛盾。

不失一般性假設 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 。基於 $a_n \geq 2$ ，其存在質因數 p 。又基於 $d = 1$ ，故 $m = \max\{i : p \nmid a_i\} < n$ 存在。

現在，由題設， $\frac{a_m + a_n}{2}$ 必須等於某些 a_i 的幾何平均數 $(a_{i_1} \cdots a_{i_t})^{1/t}$ 。注意到若所有 a_{i_j} 都不被 p 整除，則由 a_m 的定義， $a_{i_j} < a_m$ ，從而幾何平均數必小於算術平均。而若存在 a_{i_j} 被 p 整除，注意到我們有

$$a_m + a_n = 2(a_{i_1} \cdots a_{i_t})^{1/t}.$$

等號左式必不被 p 整除，而等號右式要嘛不是一個整數，要嘛被 p 整除。無論如何，上述等式都不可能成立，矛盾！

評註：本題為一中等數論題目。數論本身的難度不高，但題目本身的霧區相當多，粗看甚至無法確認是代數、數論或是組合題。

問題六：證明存在一個正數 c 使得以下敘述成立：

考慮正整數 $n > 1$ ，以及一個由在平面上 n 個點所形成的集合 S ，滿足 S 中任意兩點的距離至少是 1。則存在一條隔離 S 的直線 ℓ 使得每一個 S 中的點與 ℓ 的距離至少是 $cn^{-1/3}$ 。

(稱 ℓ 為一條隔離 S 的直線若某些由 S 中兩個點連成的線段穿過 ℓ 。)

註：如果 $cn^{-1/3}$ 換成了較弱的結果 $cn^{-\alpha}$ ，會根據常數 $\alpha > 1/3$ 之值給予分數。

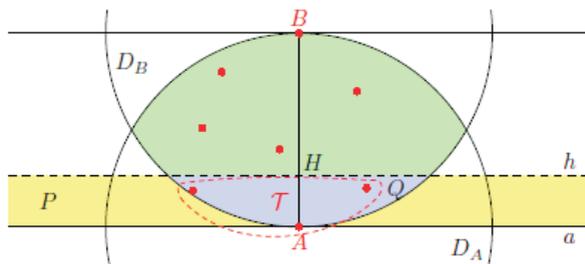
試題委員會公布的參考答案：

我們證明原題在 $c = \frac{1}{8}$ 時成立。令 $\delta = \frac{1}{8}n^{-1/3}$ 。對於任何直線 ℓ 與點 X ，令 X_ℓ 為 X 在 ℓ 上的投影點。以類似符號定義一個點集的投影。

假設存在一條直線 ℓ 使得 S_ℓ 上有相鄰兩點 X 與 Y 的距離為 d 。在此情況下，線段 XY 的中垂線隔離 S ，且 S 中的所有點距離該中垂線之距離都至少為 d 。因此，若 $d \geq \delta$ ，我們便找到題目所求的隔離直線。故我們假設對於任何直線 ℓ ，以上條件都不成立。

考慮 S 中相距最遠的兩點 A 與 B ，並令其距離為 M (從而 AB 為 S 的直徑。) 由題設條件知 $M \geq 1$ 。取 ℓ 為 AB 直線。注意到 S 必在以 A 與 B 為圓心， M 為半徑的兩個半圓

D_A 與 D_B 中:



這意味著 S_ℓ 在 AB 線段上, 且將 AB 線段分隔成 $n - 1$ 小段。由前一段的假設, 這每一小段的長度都必須小於 2δ (否則便存在所求直線), 因此

$$M < n \times 2\delta. \tag{1}$$

我們接著考慮 AB 線段上一點 H , 使得 $AH = \frac{1}{2}$ 。令過 A 和 H 與 AB 垂直的線分別為 a 與 h , P 則為其所夾的帶狀區域 (含 a 與 h 本身)。令 $\mathcal{T} = P \cap S$ 與 $t = |\mathcal{T}|$ 。由前述假設, $S_\ell \cap AH$ 中相鄰兩點的間距都必須小於 2δ , 因此 $|S_\ell \cap AH| \geq \lceil AH \times 2\delta \rceil = \lceil \frac{1}{2} \times 2\delta \rceil$, 從而

$$t \geq \frac{1}{4\delta}. \tag{2}$$

注意到 $\mathcal{T} \subset Q := P \cap D_B$ 。易知 Q_a (Q 在 a 的投影) 是個線段, 且其長度為

$$2\sqrt{M^2 - (M - \frac{1}{2})^2} < 2\sqrt{M}.$$

另一方面, 對於任何 $X, Y \in \mathcal{T}$, 我們有 $XY \geq 1$ 與 $X_\ell Y_\ell \leq \frac{1}{2}$, 故 $X_a Y_a = \sqrt{XY^2 - X_\ell Y_\ell^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。這表示 \mathcal{T}_a 的 t 個點落於長度小於 $2\sqrt{M}$ 的線段上, 同時相鄰兩點間的距離又至少為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。這表示 $2\sqrt{M} > (t - 1)\frac{\sqrt{3}}{2}$, 也就是

$$t < 1 + \frac{4\sqrt{M}}{\sqrt{3}} < 4\sqrt{M}, \tag{3}$$

其中第二個不等式乃基於 $M \geq 1$ 。

現在, 結合 (1)–(3), 我們有

$$\frac{1}{4\delta} \leq t < 4\sqrt{M} < 4\sqrt{2n\delta} \Rightarrow 512n\delta^3 > 1,$$

但這是不可能的, 因為我們一開始已經假設 $\delta = \frac{1}{8}n^{-1/3}$ 。矛盾!

評註：本題為高難度組合幾何題目，且與機器學習中的 Supporting Vector Machine 有所關聯。本題由我國前國手余竑勳與林庭風所編。此為台灣所編題目首次登上此一關鍵的壓軸題號，證明我國在題目之掌握與創新的能力上已受世界認可。出題者亦有證明此處的 $n^{-1/3}$ 是 optimal order。

—本工作小組係由教育部委託國立中央大學，於「中華民國參加 2020 年亞太數學暨國際數學奧林匹亞競賽計畫」下成立。本文的主要作者為高竹嵐助理教授，任教於國立交通大學統計學研究所。—