數學傳播　45卷1期, pp. 17-23

淺談同步化現象

夏俊雄

1. 日出而作, 日落而息

地球上的萬物, 在顯而易見或幽微難明處, 經常體現出週期的拍子 (rhythm)。本文中, 會用振子 (oscillator) 來表示這些具有周期現象的個體。太陽的東昇西落與月亮的陰晴圓缺是地球上最顯而易見的週期現象, 並且直接造成地球上許許多多其他的週期現象。動物的日夜生理時鐘容易被觀察到, 植物則不那麼顯明, 但卻不可被否認。早在西元前三百五十年左右, 亞歷山大大帝的一個百夫長, 曾在他的日記裡記錄他觀察到植物在日出的時候, 葉子會有類似抬頭的現象, 而在日落的時候會有低頭的現象。更進一步地, 18 世紀上半葉, 法國數學家 (也是天文學家) Jean-Jacques Dortous de Mairan 甚至把菜豆放在暗室裡觀察, 記錄到在沒有光度變化下, 菜豆的葉子仍有抬頭、低頭的週期且同步發生的現象。同樣的暗室實驗, 也被實踐在老鼠以及黃金披風地松鼠 (美國加州的一種松鼠, 有冬眠的習慣。) 身上。在暗室中, 老鼠們的身體似乎仍能記得約略 24 小時的生理週期; 黃金披風地松鼠在長年的暗室中, 仍能維持約略以年爲周期的良好冬眠習慣。關於生理時鐘的嚴格生理化學反應機制, 在許多科學家長期的努力下, 在果蠅的基因裡找到了控制某種 protein 濃度隨晝夜明顯變化的區段, C. Hall、Michael Rosbash 及 W. Young 更因此拿到了 2017 年的諾貝爾生醫獎。生理時鐘有其普遍性, 約略來說地球上每一個生命體都可以視爲一個振子。

那麼無情物呢?

從運動學的觀點來說, 在古典力學的架構下, 物體運動遵循牛頓運動定律。透過牛頓三大運動定律及萬有引力的距離平方反比關係, 牛頓推衍出地球繞太陽呈一橢圓軌跡的有時間週期地運行。同樣的理論適用於月球繞地球的關係。再加上地球等角速度的自轉慣性, 年、月、日的周而復始的週期概念一直被用於人類文明標記時間。更小尺度的週期現象, 可以用於更細小的時間尺度的丈量。根據彭加萊定理 (Poincare-Bendixon Theorem), 在牛頓運動定律支配下 (其運動方式爲二階微分方程式), 受侷限的一維運動的質點, 最終只有趨於靜止或是成爲一個有時間週期軌跡。此外, 彈性體受外力產生形變時, 有回到平衡點的傾向, 由虎克定律與牛頓力學會推導出簡諧運動的週期現象。虎克定律 ： 力如伸長。給出的是彈性回復力與位移是線性關係下的刻劃。事實上, 即便這關係是非線性的, 只要彈性恢復力是位移的函數, 在很普遍的條件下,

我們仍可以由常微分方程理論推導出彈性體的週期運動 (振動) 之結論。除了力學上的原因, 有很多週期現象是儲能達飽和、爆發, 再重新儲能爆發的周而復始過程, 這個機制常體現在生物體內的週期性放電。這樣看來, 俱有彈性的物體或者可以重複儲能且能連續穩定吸收能量的載體也都有著自己的拍子 (rhythm)。

在世界名著牧羊少年奇幻之旅 (The Alchemist) 中, Paulo Coelho 描述到牧羊少年 Santiago 在某一天起床的時候注意到 : He had noticed that, as soon as he awoke, most of his animals also began to stir. It was as if some mysterious energy bound his life to that of the sheep, with whom he had spent the past two years, leading them through the countryside in search of food and water. "They are so used to me that they know my schedule, " he muttered. Thinking about that for a moment, he realized that it could be the other way around : that it was he who had become accustomed to their schedule. 暫且不深究是誰同步化了誰, 與羊群相處兩年的 Santiago 與羊群有了一樣的睡眠作息。這個故事聽上去或許太童話了, 但是, 多數的讀者或許並不知道曾經至少有上千篇專業學術論文討論過女性朋友的月經週期的同步化。另一個有趣的事情是, 螢火蟲放閃的同步化問題也曾被高度關注很長一段時間, 在 1915 年到 1935 年至少有 20 篇相關的研究論文被發表在 Science 上。

然而, 關於同步化早期的嚴格實驗觀察, 一般咸追溯到與牛頓同年代的海更士 (Huygens), 海更士 擅長製作望遠鏡及時鐘。相傳其造鐘的技術十分高超, 曾爲一座教堂建造一個巨大的鐘, 以現代的時間觀來計量, 據說那個鐘的誤差一個禮拜大約只有十幾分鐘, 這個數據放在那個年代是一個十分精準的時間代言。相傳海更士在某次生病的時候, 望著他做實驗的兩個鐘擺。當時, 這兩個鐘擺有相似的長度與質量, 同繫在一根沒有被固定死的橫桿上。他發現到, 不管一開始兩個鐘擺的起始位置如何, 最終兩個鐘擺會朝著永遠相反的方向運動。這意味著, 兩個鐘擺的週期最終是一致的。這對他來說是個驚人的發現。他寫了一封信給他的父親說明這個發現, 並且提到在這兩個鐘擺達到週期同步化之後, 他試著去做一些干擾, 當干擾解除之後, 這兩個鐘擺很快地又會趨於週期同步。他的猜測是, 兩個鐘擺引發了橫桿某種肉眼難見的振動以互相傳遞訊息來達到同步化。

W. H. Eccles 與 J. H. Vincent 於 1920 年在英國申請了一個他們在實驗室觀察到的現象的專利。當時用來作爲無線電發報的發報機稱爲 triode generator (三極管), 他們發現把幾個三極管同時發報, 最後接收時測得的頻率是這幾個三極管個別頻率的平均數。大的發報器, 功率大, 可以傳得遠。小的發報器容易把頻率調得精準。兩者配合使用, 可以把頻率調校精準且同時可以把訊號傳得遠。這個實驗在 1922 年被 Edward Appleton 及 Balthasar van der Pol 複製並延伸。這系列的研究直接促進了無線電發報的產業發展。附帶一提, Appleton 曾在 1924 年與 M. Barnett 設計實驗找出了大氣層中會把無線電訊號反射回地面的 layer (今天稱

作電離層), 並在 1947 年因電離層的相關研究貢獻拿到諾貝爾物理獎。

2. 同步化的數學理論

同步化這個普世的 (universal) 現象在很多領域被關注到：蟋蟀的鳴叫、螢火蟲的放閃、月經、電力網路、鐘擺等等的同步化現象。然而, 它的機制一直保有神秘的色彩。現代控制論之父 N. Wiener 在 1950 年代曾就腦波的 alpha 波生成問題做過一系列不算太成功的研究。接著, A. Winfree 透過很多生物實驗的觀察, 歸納出同步化現象的普遍性。爲了執簡馭繁, 他試著推敲支配同步化現象最重要的因子。在 Strogatz [12] 第二章裡, 把 Winfree 的想法作了一個整理:

The only way to capture the common features (biological oscillators) of chorusing crickets, flashing fireflies, pulsing pacemaker neurons, and the like was to ignore all their biochemical differences and to focus instead on the two things that all biological oscillators share : the ability to send and receive signals.

換言之, Winfree 與 Huygens 英雄所見略同, 他認爲交換訊息這件事是造成同步化最重要的原因。當然, Strogatz 在這段文字裡沒有寫出來的一個當然假設是, 這些 oscillators 必須要有同步化的 tendency (傾向)。Strogatz 在同一個章節接著提到 (揣摩) Y. Kuramoto 的想法:

Picture them (the oscillators) as friends jogging together on a circular track. Being friends, they want to chat as they jog, so each makes adjustments to his preferred speed. Kuramoto's rule is that the leading one slows down a bit, while the trailing one speeds up by the same amount.

這段文字意即把有同步化傾向的振子們想像成在圓形跑道上跑步的朋友, 每個跑者有自己舒適的跑速, 在不作太勉強的調整下, 他們願意以快者讓慢者, 慢者追前者的方式讓彼此有聊天的可能性。並且追與讓的程度是一致的。綜合以上的想法, 可以得到如今最被廣爲流傳且研究最多的同步化數學模型 Kuramoto model:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_{ki}(\theta_k(t)-\theta_i(t)),\ t>0,\ i=1,2,\ldots,N, \tag{2.1}$$

其中 $\theta_i(t)\in\mathbb{R}$ 是第 i 個振子的相位函數、ω_i 是第 i 個振子的角速度、K 是一個常數(反映耦合力的大小)、N 是振子個數, 每一個耦合函數 Γ_{ki} 是一個連續可微分的 2π 週期函數, $\dot{\theta}_i$ 是 θ_i 的一階微分。若嚴格遵循上述圓形跑道跑者的追逐規則, 每個 Γ_{ki} 都會是一個奇函數且滿足 $\Gamma_{ki}(\theta)\ge 0$ 當 $0<\theta<\pi$。於是 Kuramoto 選擇了一個很具代表性的選擇, 在絕大多數的文獻裡, 他 (以及其他絕大多數研究這個 model 的科學家) 把每一個 $\Gamma_{ki}(\theta)$ 都選成 $\sin\theta$。故此,

最爲常見的 Kuramoto model 乃以下之形式:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)),\ t > 0,\ i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.2}$$

在振子同步化問題當中, 一般考慮以下兩個種類的漸進同步化: 假設實向量函數 (real vector-valued function)

$$\Theta(t) := (\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t), \ldots, \theta_N(t))$$

是微分方程組 (2.1) (或者 (2.2)) 的一個解 (亦稱爲 Kuramoto oscillator)。

Definition 2.1. 若以下漸進條件成立

$$\lim_{t\to\infty}(\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_j(t)) = 0 \quad \text{for all } i, j = 1, 2, 3, \ldots, N,$$

則我們說 Kuramoto oscillator $\Theta(t)$ 可達頻率同步化。

頻率同步化意指任兩個振子的速度差會趨近於零。

Definition 2.2. 若存在整數 k_{ij} 使得以下漸進條件成立

$$\lim_{t\to\infty}|\theta_i(t) - \theta_j(t) - 2k_{ij}\pi| = 0 \quad \text{for all } 1 \le i < j \le N,$$

則我們說 Kuramoto oscillator $\Theta(t)$ 可達相位同步化。

相位同步化意指任兩個的振子的相位差會趨於零。因考慮微分方程的關係, 相位函數取值在整個實數軸, 但作爲相位而言, 2π 整數倍的差距在物理的實際測量上會被視爲零。

爲了方便以下的數學理論說明, 對向量 $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$, 我們定義直徑函數 (diameter function)

$$D(X) := \max_{i\neq j}(x_i - x_j)$$

以及以下的相位直徑函數 (diameter of phase function)

$$D(\Theta(t)) := \max_{1\le i,j\le N}(\theta_i(t) - \theta_j(t)). \tag{2.3}$$

文獻裡有非常多的論文針對方程組 (2.2) 加上各種不同條件去討論各類的同步化問題, 我們在這裡只提一個比較具有一般性 (假設條件少、適用範圍大) 的一個結果。令 $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 。

Theorem 2.1. 假設

$$D(\Omega) < K\sin\alpha. \tag{2.4}$$

若 $\Theta(t)$ 是方程組 (2.2) 的一個解, 而且起始值滿足

$$D(\Theta(0)) < \pi - \alpha, \tag{2.5}$$

則

$$\lim_{t\to\infty} D(\dot{\Theta}(t)) = 0. \tag{2.6}$$

意即, 振子 $\Theta(t)$ 可達頻率同步化。更進一步地, 若 $D(\Omega) = 0$, 則

$$\lim_{t\to\infty} D(\Theta(t)) = 0. \tag{2.7}$$

意即, 振子 $\Theta(t)$ 可達相位同步化。

這個定理出自 [1] 以及 [3]。

在考慮方程組 (2.2) 的同步化問題時, 考慮以下的座標變換可以相程度的簡化計算。令 $\bar{\theta}_i(t) = \theta_i(t) - \omega t$ 及 $\bar{\omega}_i = \omega_i - \omega$, 其中

$$\omega = \frac{\sum_{j=1}^N \omega_j}{N}.$$

則方程組 (2.2) 可改寫為

$$\dot{\bar{\theta}}_i(t) = \bar{\omega}_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^N \sin(\bar{\theta}_j(t) - \bar{\theta}_i(t)),\ t > 0,\ i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.8}$$

其中 $\bar{\Omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_N)$ 滿足

$$\sum_{i=1}^N \bar{\omega}_i = 0. \tag{2.9}$$

在這個座標變換裡, 我們把振子群的平均速度歸零。因為 $\bar{\theta}_i(t) - \bar{\theta}_j(t) = \theta_i(t) - \theta_j(t)$, 故知 (2.2) 與 (2.8)的同步化問題是等價的。

這個定理的證明梗概如下：

步驟一：利用條件 (2.4) 及 (2.5) 導出

Lemma 2.1. 假設 (2.4) 成立。令 $\bar{\Theta}(t)$ 為方程組 (2.8) 的一個解且起始條件滿足 (2.5), 則

$$D(\bar{\Theta}(t)) < \pi - \alpha,\ \text{對所有}\ t > 0. \tag{2.10}$$

因為 sine 函數是奇函數, 在 (2.9) 的條件下, 我們可推得

$$\sum_{i=1}^N \dot{\bar{\theta}}_i(t) = 0 \tag{2.11}$$

對所有時間 $t>0$。在平均速度時時刻刻爲零的狀態下, 我們可利用 Lemma 2.1 推知每一個相位函數 $\bar{\theta}_i(t)$ 都是一個有界函數。

步驟二：把 (2.8) 的第 i 式乘上 $\bar{\theta}_i$ 再對時間變數積分從零積到時間 t。接著, 對指標 i 取和, 可得以下的 Lyapunov 函數關係:

$$\int_0^t \sum_{i=1}^N \dot{\bar{\theta}}(s)^2 ds = \sum_{i=1}^N \bar{\omega}_i(\bar{\theta}_i(t)-\bar{\theta}_i(0)) + \frac{K}{N}\sum_{i<j}(\cos(\bar{\theta}_i(t)-\bar{\theta}_j(t)) - \cos(\bar{\theta}_i(0)-\bar{\theta}_j(0))). \tag{2.12}$$

這個 Lyapunov 函數關係首見於 [4]。

最終, 我們考察 (2.12) 等式：左邊是對時間 t 的遞增函數, 右邊是有界函數。故知當時間趨於無窮大的時候, 等式兩側皆會收斂。再利用方程式解 $\bar{\Theta}(t)$ 的二階導數有界, 可以嚴格證明出

$$\lim_{t\to\infty} \bar{\Theta}(t) = (0,0,\ldots,0).$$

此即證明了

$$\lim_{t\to\infty} \theta_i(t) = \omega,$$

對於每個指標 $i=1,2,3,\ldots,N$。餘下若干瑣碎證明細節, 不作贅述。

以上的證明, 揭示了當 Kuramoto 振子趨於同步化時, 每個振子的角速度都會趨於平均角速度。

3. 延伸閱讀

Kuramoto model 被套用在幾個不同的同步化問題討論中, 都有令人滿意的結果。但是在實際應用裡, 例如電網問題 [2, 9], 它的物理方程會夾帶二階微分項, 也就是說應該在方程組 (2.2) 前再加上 $m\ddot{\theta}$ 的項。再者, 在地球上的傳訊方式都需要傳送時間, 故此, 應該把時間延滯效應考慮在方程式裡面。關於這兩個問題, 我跟我的合作者們提出了一些看法, 給出了相對應的同步化現象的數學論證, 請參閱拙著 [5, 6]。

此外, 一些生物的問題裡也發現到, 當同步化發生的時候, 角速度不見得趨於群體的平均角速度。這個部份的問題, 需要把 Γ_{ij} 的選擇放寬, 不應該只考慮 sine 函數。關於這方面的數學文獻非常少。

對於同步化問題希望作更一般性閱讀的讀者, 我作如下的推薦：關於蓄能反覆爆發的週期振子的同步化問題, Mirollo and Strogatz [10] 提供了一個論證十分精彩的同步化數學理論, 其所探討的問題乃源自 Peskin 教授對於心臟神經同步放電的相關研究。Strogatz [12] 文字優美, 記錄了非常多有趣的研究歷程。A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths[11] 從多個不同的角度切入同步化問題, 對理論有較多方方面面的展示。Winfree [14] 幾乎是一本字典書,

對很多生化反應的 dynamics 作很細緻的研究, 而且書名取得很妙。

筆者接觸同步化問題的研究時日尚淺, 識見有限, 妄作此文, 希望能起到拋磚引玉的效果。若讀者發現文中有任何疏漏或謬差, 尚祈不吝告知改正！

参考文獻

1. N. Chopra and M. W. Spong, *On exponential synchronization of Kuramoto oscillators*, IEEE Trans. Automat. Control, 54 (2009), 353-357.
2. H.-D. Chiang, *Direct Methods for Stability Analysis of Electric Power Systems: Theoretical Foundation,* BCU Methodologies, and Applications, 2010.
3. S.-Y. Ha, T. Ha, J.-H. Kim, On the complete synchronization for the Kuramoto model, Physica D 239 (2010) 1692–1700.
4. J.L. van Hemmen and W.F. Wreszinski, *Lyapunov function for the Kuramoto model of nonlinearly coupled oscillators*, J. Stat. Phys., 72(1993), 145-166.
5. C.-H. Hsia, C.-Y. Jung and B. Kwon, *On the Synchronization theory of Kuramoto oscillators under the effect of inertia*, J. Differential Equations 267 (2019), 742-775.
6. C.-H. Hsia, C.-Y. Jung, B. Kwon and Y. Ueda, *Synchronization of Kumamoto oscillators with time-delayed interactions and phase lag effect*, J. Differential Equations, 268 (2020), no.12, 7897-7939.
7. Y. Kuramoto, *Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators*, in International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Phys. 39, Springer, New York, 1975, pp. 420-422.
8. Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
9. P.W. Sauer and M. A. Pai, *Power System Dynamics and Stability,* Prentice Hall, 1998 - Technology & Engineering - 357 pages
10. R. E. Mirollo and S. H. Strogatz, *Synchronization of pulse-coupled biological oscillators* , SIAM J. Appl. Math. 50 (1990), no. 6, 1645-1662.
11. A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths, *Synchronization – A universal concept in nonlinear science*, Cambridge University Press, 2003.
12. S. H. Strogatz, *SYNC : How order emerges from chaos in universe, nature, and daily life* Hyperion Press, New York, 2003.
13. A. T. Winfree, *Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators*, J. Theor. Biol. 16(1967), 15-42.
14. A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time*, Springer, New York, 1980.

—本文作者任教國立台灣大學數學系—