數學傳播　45卷1期, pp. 3-16

Jean Leray (1906∼1998)

康明昌

1. 一個分析學者

Jean Leray 與 André Weil 是二十世紀傑出的數學家, 他們在同一年出生 (1906), 同一年去世 (1998)。

Weil 的父親是一個外科醫生。Weil 從小在巴黎的富裕家庭長大, 16 歲就進入金字塔尖端的學府巴黎高師 (École normale supérieure, 以下簡稱 ENS)。Leray 來自法國西北部的小鎮 (Chantenay), 他的父母都是當地一所小學的老師。Leray 在 1926 年才在 ENS 入學。當時的高中畢業生至少要花上一年或兩年的準備才考得上 ENS, Weil 不需要特別的準備就進入 ENS, 可見其聰明過人。

Weil 重建代數幾何 (1946) 與 abelian varieties (1948) 的理論, 使其涵蓋特徵數不爲零的情況。基於這些理論, 他證明了定義於有限體的代數曲線的黎曼猜想 [16]。

Weil 希望把代數曲線這些結果推廣到更高維的射影多樣體, 這就是所謂的 Weil 猜想 (Weil conjectures)。Weil設想有一套「絕佳」的上同調理論 (Weil cohomology)。有了這一套上同調理論, 就可以解決 Weil 猜想 [11, p.449], [9], [17]。新的任務催生了另一場代數幾何的革命, 其中最重要的是 Jean-Pierre Serre (1926∼, 1954 年 Fields 獎得主) 的 FAC 與 Alexandre Grothendieck (1928∼2014, 1966 年 Fields 獎得主) 的 SGA 與 EGA (1957∼1973)。

Sheaf theory, Sheaf cohomology, spectral sequences 在 Serre 與 Grothendieck 革命性的工作扮演十分關鍵的角色。這些概念與理論是Leray 在二次世界大戰期間的德軍戰俘營建立的。

Leray 在 1934 年前後與 Bourbaki 成員雖有接觸 (他與 Claude Chevalley (1909∼1984) 是 ENS 的同班同學), 但是他與 Bourbaki 成員的數學品味卻截然不同。Bourbaki 成員大都是代數學者與幾何學者, Leray 卻是一個分析學者。因此 Leray 淡出 Bourbaki 成員的活動也就不足爲奇。

Leray 在 1933 年獲得博士學位, 他的博士論文是與流體力學有關的數學問題 [4, p.353], 論文指導教授是 Henri Villat (1879∼1972)。Villat 是巴黎大學流體力學的教授 (1927),

1932 年當選法國科學院院士 (應用數學組), 1948 年擔任法國科學院院長 (註1)。

Leray 的研究生涯可以分成三個階段：1940 年之前從事 PDE 的研究 (尤其是 Navier-Stokes 方程), 1940～1950 年他是一個代數拓樸學者, 1950 年之後他轉而研究多複變函數, 但是還是經常回到 PDE 的問題。

2. 從流體力學到代數拓樸

1932 年 Leray 到德國訪問, 認識了萊比錫大學的教授 Leon Lichtenstein (1878～1933) 與哥廷根大學年輕的學者 Hans Lewy (1904～1998)。他們都是 PDE 的專家, Lichtenstein 還寫過一本很權威的流體力學的書。經過他們的推薦, Leray 接觸到 Julius Schauder (1899～1943) 的論文。

Schauder 是波蘭的猶太人, Lwow 大學的博士, 他是 H.D. Steinhaus (1887～1972) 的學生 (註2)。拓樸學在 1920 年代出現不久, Schauder 把 Brouwer 固定點定理的想法引進微分方程的研究, 一個微分方程的解可以看成某個 (無窮維) 空間的固定點。

1933 年 5月 Schauder 得到 Rockefeller Foundation 的補助來到巴黎訪問。他原先的目的是想參加有名的 Hadamard 研討會 [16, p.17], 卻在這裡碰到 Lewy。Lewy 因爲納粹的排猶法案流亡到巴黎。Lewy 介紹 Leray 與 Schauder 認識。Lewy 幸運的得以移民美國：Brown 大學 (1933～1935), 加州 Berkeley 大學 (1935～) [27]。

Leray 與 Schauder 在幾個星期之內合寫一篇論文 (Ann. École Norm. 51 (1934), 45-78)。他們把 Schauder 關於固定點的方法推廣成 Leray - Schauder degree, 並考慮其應用 (註3)。

1934 年 Leray 還發表一篇文章 (Acta Math. 63 (1934), 193-248), 提出 PDE 方程弱解 (weak solution) 的概念。

Leray 的貢獻迅速的被數學界認可, 1936 年 Leray 獲聘擔任 Nancy 大學的教授。

1939 年 9 月 1 日德軍入侵波蘭, 兩天之後英法對德宣戰, 第二次世界大戰爆發。Leray 遵照動員令到軍隊報到, 成爲一名炮兵中尉。

在 1939 年 9 月 ～ 1940 年 4 月德軍與英法聯軍並未發生戰鬥 (這就是所謂的假戰時期)。等到希特勒征服北方的丹麥與挪威之後, 德軍才在 1940 年 5 月大舉進攻荷蘭、比利時、盧森堡, 六個星期之內就進占巴黎。法國總理貝當 (H.P. Petain, 1856～1951) 只好提議停火。1940 年 6 月 17 日簽定停火協議。根據停火協議, 法國大致分成南方的「非佔領區」與北方的「佔領區」。「非佔領區」名義上由法國人管理, 後來由貝當擔任元首的維琪政權統治, 人口約爲法國總人口的三分之一。「佔領區」(含巴黎) 由德國軍方管控, 人口約爲法國總人口的三分之二。此外, 法國必須支付德國占領軍所有的開銷, 估計每日全額高達四億法郎。

停火協議簽訂之後, 大約有兩百萬法國軍人成爲戰俘。Leray 從 1940 年 7 月 2 日到

1945 年 5 月 10 日被關押在奧地利 Edelbach 地區的軍官戰俘營 (Oflag XVIIA) (註4)。

這個軍官戰俘營有許多職業軍人和預備軍官, 很多人還是學生身分。德國人允許他們成立「戰俘營大學」, 法國的維琪政府承認其學位。Leray 擔任這所戰俘營大學的校長。這所大學的知名教授還有胚胎學學家 Étienne Wolff 與地質學者 François Ellenberger。出身於這所戰俘營大學的有好幾位後來成爲巴黎大學的教授或法蘭西學院的講座教授 [33]。

Leray 後來回憶說:「這些學生都很用功, 心無旁騖的學習, 吃的很少, 穿的也不足以禦寒, 但是他們勇氣十足」。

Leray 也開始恢復他的研究工作。他不願回到流體力學與PDE 的研究。如果德國人知道他還在做這些研究, 他擔心他可能被脅迫參加德國人軍工產業的研發團隊。因此他宣稱他是一個拓樸學家, 他也真的開始研究拓樸學。拓樸學是沒有應用價值的數學分支, 德國軍方不會在乎拓樸定理的任何意義。

3. 妥協或抵抗?

Leray 透過他的老師 Villat 在法國科學院出版的 Comptes Rendus 宣告他的研究成果, 完整的論文《戰俘營代數拓樸講義 (Course in algebraic topology taught in captivity) 》分成三部分刊登在 J. Math. Pures Appl. 24(1945), 95-167, 169-199, 201-248。

1942 年 Leray 獲聘爲巴黎大學教授, 他當然沒有到任。1944年被選爲法國科學院數學組通訊院士 (Corresponding Member)。

他在 sheaf cohomology 與 spectral sequence 的創見也是在軍官戰俘營這幾年完成的。

二戰之後有人問 Leray : Oflag XVIIA 的所在地 Edelbach 究竟在哪裡? 他總喜歡說, 在奧地利, 離奧斯特里茲 (Austerlitz) 不遠。其實, Edelbach 離維也納更近, 奧斯特里茲還在 83 公里之外。Leray 喜歡把奧斯特里茲扯進來, 因爲拿破崙在 1805 年 11 月在奧斯特里茲大敗俄羅斯與奧地利的聯軍, 這是一段法國人引以爲傲的歷史。

Leray 與 Oflag XVIIA 的朋友喜歡在黃昏時登上戰俘營南方的最高點, 眺望落日, 遠遠的沉沒在法國邊境 [33, p.43]。

其實離開戰俘營, 對 Leray 而言, 並不是遙不可及的。只是在妥協(collaboration) 與抵抗 (resistance) 之間作抉擇, 答案始終很清楚的。

事實上, 在德國征服法國之後, 德國政府開始籌畫在各領域建立以德國爲首的國際組織 (類似二戰期間日本人的「大東亞共榮圈」)。在數學方面德國推出 Harald Geppert (1902~1945) 去接觸法國數學家。Geppert 與 Gaston Julia (1893~1978) 談了幾次, 果然說動了 Charles Pisot (第一代的 Bourbaki 成員之一), Christian Pau, Frédéric Roger 與德國人合作, 他們都離開戰俘營。Leray 勉爲其難的爲 Geppert 寫幾篇 Review articles, 但是他堅持不離開戰俘營 [25, p.346], [21]。

老一輩的數學家 Élie Cartan (1869∼1951) 有三個兒子和一個女兒, 老大 Henri Cartan 是 Bourbaki 創始成員之一, 小兒子 Louis Cartan 是個物理學家, 在 Poitiers 大學任教 [16, p.17]。Louis Cartan 因為參與抵抗運動 (Resistance), 在 1943 年 2 月被捕, 此後音訊全無, 家人都做了最壞的打算。

Henri Cartan 在二戰之前研究多複變函數, 與 Münster 大學的教授 Heinrich Behnke (1898∼1979) 成為非常熟悉的朋友 (註5)。Louis Cartan 被捕之後, Behnke 多方託人打聽 Louis 的下落, 也不得要領。事實上在納粹官方看來, Behnke 雖然是純粹的 Aryan 人, 但是卻是一個政治不可靠的份子。

直到 1945 年 5 月, Cartan 一家人才得知 Louis Cartan 已在 1943 年 12 月被害。噩耗傳來時老 Cartan 已經是 75 歲的老人 [14]。

參加抵抗運動的還有許多日後的名人, 如: 1957 年諾貝爾文學獎得主 Albert Camus (卡繆, 1913∼1960) 與獲得 1965 年諾貝爾醫學獎的 Jacques Monod (1910∼1976), François Jacob (1920∼2013), André Lwoff (1902∼1994)。Camus、Monod 參與抵抗運動的故事參看 [8]。

但是還是有很多人選擇妥協。維琪政府諸君暫且不說, 許多演藝界、文化界的名人都熱衷於法德親善的活動 (見 [28])。

巨變的時代讓許多人都現出原形。存活是需要付出代價的。

4. 譜序列 (Spectral sequences)

譜序列是代數拓樸王冠上面一顆璀璨耀眼的寶石, 它是 Leray 在軍官戰俘營研究拓樸學的結晶。

譜序列的主要思想、方法與定理及其應用在 Leray 的《戰俘營代數拓樸講義》都已呈現, 經過 H. Cartan, J.-L. Koszul, J.-P. Serre 以及 Leray 本人的修改, 才變成現在我們熟悉的形式 [5]。

Serre 在他的博士論文 (Ann. Math. 54(1951), 425-505) 考慮纖維映射 $p: X \to B$ (其中 p 是拓樸空間 X 到 B 的連續滿射且滿足同倫提昇性質 [19, p.322])。如果 X, B 和 $F=f^{-1}(b)$ (其中 $b\in B$) 都是路徑連通的拓樸空間, 按照 Leray 的方法, 若 B 是單連通空間時, Serre 可以造出一組譜序列

$$E^2_{p,q} := H_p(B, H_q(F)) \Rightarrow H_n(X), \quad \text{其中 } n = p+q.$$

簡單的說, 譜序列的目的是研究全空間 (the total space) X, 底空間 (the base space) B, 與纖維 (the fiber) F 的同調群之間的關係。

$\{E^r_{p,q} : 2\le r\le\infty\}$ 是記錄 B 與 F 的資料的(逼近) 序列, $\{H_n(X), 0\le n<\infty\}$ 才

是最終目的。當我們考慮上同調群 $H^n(X)$ 時, 我們把 (逼近) 序列記爲 $\{E_r^{p,q} : 2 \leq r \leq \infty\}$。

但是譜序列的逼近並不能得到 $H_n(X)$ 的精確資料, 它只能得到 $H_n(X)$ 的 subquotients, 也就是, 我們只能瞭解 $F_iH_n(X)/F_{i+1}H_n(X)$, 其中 $0 \leq i \leq n$, 而 $F_0H_n(X) = H_n(X) \supset F_1H_n(X) \supset F_2H_n(X) \supset \cdots \supset F_nH_n(X) \supset F_{n+1}H_n(X) = \{0\}$ 是 $H_n(X)$ 的一組過濾結構 (filtration)。

另一方面, 從逼近序列 $E^2_{p,q}$ 可以得到 $E^3_{p,q}$ 項, 從 $E^3_{p,q}$ 可以得到 $E^4_{p,q}$ 項, ..., 進而可得到 $E^\infty_{p,q}$ 項。

神奇的是, $E^\infty_{p,n-p} \simeq F_pH_n(X))/F_{p+1}H_n(X)$ (其中 $0 \leq p \leq n$)。

逼近序列 $\{E^r : 2 \leq r \leq \infty\}$ 可以看成一本書, 第二頁 E^2 包含 $E^2_{p,q}$ $(0 \leq p, q < \infty)$, 它記錄 B 與 F 在第二階段的資料, 第三頁 E^3 包含 $E^3_{p,q}$ $(0 \leq p, q < \infty)$, 它記錄 B 與 F 在第三階段的資料。以下類推。

如果我們只想知道 $\{E^r_{p,n-p} : 0 \leq p \leq n\}$ 的資料, 只要翻到第 r 頁 (r 足夠大), $\{E^r_{p,q}\}$ 就涵蓋 (p, q) 項的所有資料 (其中 $n = p + q$); 此後資料不再更新 (也就是 : 若 $r' > r$, 則 $E^r_{p,q} = E^{r'}_{p,q}$)。這就得到 $E^\infty_{p,q}$。

Serre 用這種方法研究纖維映射的同調群。Serre 在第二篇論文 (Ann. Math. 58(1953), 258-294) 把這個方法加以改進, 他能夠計算 (或理解) n 維球 $\mathbb{S}^n$ 的各種同倫群。

譜序列也廣泛的應用在代數幾何。設 $f : X \to Y$ 是 scheme X 到 scheme Y 的擬緊緻映射, 且 $\mathscr{F}$ 是 X 的擬凝聚層 (quasi-coherent sheaf), 則

$$E_2^{p,q} := H^p(Y, R^qf_*\mathscr{F}) \Rightarrow H^n(X, \mathscr{F}),\ \text{其中}\ n = p + q.$$

$R^qf_*\mathscr{F}$ 是 Y 的凝聚層, 其預層 (presheaf) 定義成

$$V \mapsto H^q(f^{-1}(V), \mathscr{F}), V\ \text{是}\ Y\ \text{的任意開集。}$$

代數幾何的 Leray 譜序列參看 [23, 第7章第3節]。

5. 譜序列被更多人理解

Saunders Mac Lane (1909~2005, 芝加哥大學教授) 在 [20, p.156] 講了一段 Armand Borel (1923~2003) 與 J.-P. Serre 如何瞭解譜序列的故事。

Borel 是瑞士聯邦理工學院 (ETH, 蘇黎世) 的碩士, 他的老師是 Stiefel 與 Hopf, 他的研究興趣是李群及其拓樸結構。1949 年~1950 年他獲得法國政府的獎學金, 使他可以在巴黎撰寫博士論文。

Leray 在 1945 年擔任巴黎大學的教授, 1947 年被聘爲法蘭西學院的講座教授。此後幾年他在法蘭西學院的演講都是以譜序列爲主題, 但是瞭解的人卻非常少。

Henri Cartan 建議 Borel 與 Serre 到法蘭西學院旁聽 Leray 的演講。幾次演講下來, Serre 與 Borel 完全被迷惑了, 他們顯然都聽不懂。Serre 決定放棄, Borel 則堅持繼續坐在那裡聽下去。直到有一天, Borel 突然恍然大悟。他找到 Serre, 興奮的說:「Jean-Pierre, 這些令人困惑的譜序列可以用來證明真正的定理。」

幾個星期之後, Borel 與 Serre 合寫的短文出現 (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 230 (1950), 2258-2260)。

在 1950 前後, 許多人 (D. Montgomery, Samelson, Eckmann, G. W. Whitehead) 都認爲歐氏空間 $\mathbb{E}^n$ 不可能成爲纖維是球面的纖維叢。但是大家都無法找到證明。

Borel 與 Serre 的論文是運用譜序列的方法證明以上論斷。

Borel 與 Serre 繼續考慮譜序列的應用。在 Serre 的博士論文他計算纖維映射的同調群與同倫群, 在 Borel 的博士論文他計算李群與齊性空間的上同調群 (Ann. Math. 57(1953), 115-207)。Leray 是 Borel 博士論文的指導教授。

在 1946 年∼1950 年之間, Leray、Henri Cartan、J.-L. Koszul 都致力於譜序列理論的深化與推廣 [4]。

正合偶 (exact couples) 是理解譜序列的另一種方法, 它是美國拓樸學者 W. S. Massey (1920∼2017) 提出的 (Ann. Math. 56(1952), 363-396)。Massey 回憶, 原先提出正合偶的概念並不是爲了瞭解譜序列。直到 Serre 的博士論文出現後 (1951 年), 他才真正瞭解譜序列, 譜序列與正合偶的關係也得以澄清 [22]。

Roger C. Lyndon (1917∼1988) 是 Saunders Mac Lane 在哈佛大學的博士生 (註6)。Lyndon 在 1946 年畢業, 他的博士論文是討論群上同調 $H'(A)$, $H'(B)$ 與群上同調 $H'(A\times B)$ 的關係 (Duke Math J. 15 (1948), 271-292)。Lyndon 的結果其實可以用 Hochschild - Serre 譜序列很乾淨的表達出來:若 N 是群 G 的正則子群, 則

$$E_2^{p,q} := H^p(G/N, H^q(N,M)) \Rightarrow H^{p+q}(G,M),$$

其中 M 是 G/N 的模 (因此也可以看成群 G 的模)。

G. Hochschild (1915∼2010) 是 Bourbaki 創始成員 Claude Chevalley 在普林斯頓大學的學生。Hochschild 與 Serre 的論文刊登在 Trans. Amer. Math. Soc. 74(1953), 110 -134。

Hochschild 是台大數學系第一代師長施拱星教授 (1918∼2018) 的老師 [32]。施拱星先生的博士論文 (1953) 的題目是《Cohomology of associative algebras and spectral sequences》[13, p.1086]。

Mac Lane 戰後訪問巴黎, 旁聽 Leray 的演講, 與 Leray 交談過。他竟然沒有覺察 Leray 的譜系列的理論可以簡化 Lyndon 博士論文許多定理!

6. 重逢

1945 年 7 月, Leray 與 Weil 在巴黎重逢, 他們有過短暫的交談。Leray 告訴 Weil 有關 “cohomology with variable coefficients” 的研究成果 [34, p.17, p.526]。這種上同調理論就是日後的 sheaf cohomology。

受到 Leray 的啟發, Weil 在 1947 年 1 月告訴 Henri Cartan, 他有一個方法可以重新證明 de Rham 定理 [34, p.45]。Weil 的論文刊登在 Comment. Math. Helv. 26(1952), 119 -145。

當時 H. Cartan 正在學習 Leray 的《戰俘營代數拓樸講義 (1945)》, sheaf cohomology 的概念在這份講義已初露端倪。Sheaf cohomology 的正式討論在 Leray 的 1946 年第一篇 Comptes Rendus 的短文出現 [6, p.9], 譜序列的出現則在 Comptes Rendus 的短文 (也是 1946 年刊出 [5, p.10])。

有名的拓樸學家 Samuel Eilenberg (1913∼1998) 在 Math. Reviews 爲 Leray 的《戰俘營代數拓樸講義》寫 review article。他可能沒有仔細的看這篇論文 (152頁!), 他輕率地說, 這篇文章頂多是提出 local coefficients 同調群的另一種方法。Eilenberg 的 review 使許多人錯過這篇論文 (包括 Weil)。

Weil 關於 de Rham 定理的新證明是在緊緻連通流形 M 之上造出一個有限覆蓋 $\{U_i : 1 \le i \le n\}$ 使得 $U_i \cap U_j$ 都是可收縮的拓樸空間。他再考慮這個覆蓋的覆蓋網 N (nerve) [7, p.100]。由此他定義 $A^{p,q}$ [6, p.424], 也就是 : 任意 p-simplex $\sigma \in N$ 對應開集 $U_\sigma \subset M$, 而對任意 p-simplex $\sigma \in N$, $A^{p,q}$ 是 U_σ 上面的 q-forms。他因而可以定義 differential maps

$$d : A^{p,q} \to A^{p,q+1}, \qquad \delta : A^{p,q} \to A^{p+1,q}.$$

他可以證明以下關係式:

$$\begin{aligned} F^{0,m}/H^{0,m} &\simeq H^m_{DR}(M), \qquad F^{m,0}/H^{m,0} \simeq H^m(N) \\ F^{p,q}/H^{p,q} &\simeq F^{p+1,q-1}/H^{p+1,q-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $0 \le q \le m$, $H^m_{DR}(M)$ 代表de Rham 的上同調群, $H^m(N) := H^m(N, \mathbb{R})$。詳見 [5, p.1-21], [6, p.424]。

$A^{p,q}$ 的定義顯然是受到 Leray 的 sheaf cohomology 的啟發。(1) 式的證明方法在 Leray 的《戰俘營代數拓樸講義》一再的出現, 這就是所謂的 fundamental lemma [5, p.8]。

但是 Weil 並沒有看過 Leray 這篇論文, 他顯然另闢蹊徑得到這個結果。這正是俗諺所謂的英雄所見略同。

這時候 Weil 與 Leray 的關係有些緊張。Weil 是所謂的拒服兵役者 (conscientious objector), 受到軍法審判 (見 [16]), Leray 是從戰俘營載譽歸來的英雄 (註7)。1947 年 Leray

與 Weil 不約而同申請法蘭西學院講座教授的職位, 結果是 Leray 勝出。1953 年 Leray 被選爲法國科學院院士 (應用數學組)。

1979 年 Leray 與 Weil 共同獲得第二屆的 Wolf 獎。第一屆的 Wolf 獎的得主是 I. M. Gelfand (1913～2009) 與 Carl L. Siegel (1896～1981)。第三屆的 Wolf 獎的得主是 Henri Cartan (1904～2008) 與 A. N. Kolmogorov (1903～1987)。1985 年 (第 7 屆) Wolf 獎頒給 Lewy 與 Kodaira, Lewy 與 Kodaira 的事蹟見本文第 2 節與第 8 節。

7. 上同調層與多複變函數論

Leray 在 1950 年之後回歸爲一個分析學者 (多複變函數與 PDE), 只有在少數情況他還寫了幾篇補遺性質的代數拓樸的短文。

Henri Cartan 重新整理 Leray 在 sheaf theory 與 sheaf cohomology 的工作 (1950/51 Cartan 研討會) (註8)。

若 X 是拓樸空間, 拓樸空間 $\mathscr{F}$ 稱爲 X 上的層空間 (sheaf, sheaf space) 如果存在連續函數 $\pi:\mathscr{F}\to X$ 滿足以下條件 : (i) π 是滿射且是局部同胚 (local homeomorphism); (ii) 對於任意 $x\in X$, 定義 $\mathscr{F}_x:=\pi^{-1}(x)$, 規定 $\mathscr{F}_x$ 是 $\mathscr{F}$ 的離散子集; (iii) $\mathscr{F}_x\times\mathscr{F}_x\to\mathscr{F}_x$ 有交換群的結構使得 $\mathscr{F}\times\mathscr{F}\to\mathscr{F}$, 其中 $s,t\in\mathscr{F}_x$ 且 $(s,t)\mapsto s+t$ 是連續的。

若 V 是 X 的任意開集, 定義

$$\Gamma(V,\mathscr{F})=\{u:V\to\mathscr{F}\ \text{是連續函數且滿足}\ \pi\circ u(x)=x,\ \forall\, x\in V\}.$$

Leray 把 $\Gamma(V,\mathscr{F})$ 的集合 V 規定爲閉集, Cartan 把它改成開集。Cartan 還定義上同調層 (正確的說, 應該叫做「係數是層空間 $\mathscr{F}$ 的上同調」) $H^q(X,\mathscr{F})$ (sheaf cohomology)。

Cartan 和 Serre 把這些理論應用到多複變函數的研究 (1951 /52 Cartan 研討會) : 設 X 是 Stein 流形, $\mathscr{F}$ 是 X 上的凝聚層 (coherent sheaf), 則有

(i) Cartan-Serre 定理 A. 對於 X 的任意點 x, $\mathscr{F}_x$ 可以由 $\Gamma(X,\mathscr{F})$ 生成。

(ii) Cartan-Serre 定理 B. 若 $q\geq 1$, 則 $H^q(X,\mathscr{F})=0$。

Cartan-Serre 定理 A 與定理 B 的目的是想了解 Cousin 第一問題與第二問題在正則域 (domain of holomorphy) 是否成立。Cousin 問題是單複變函數裡面 Mittag - Leffler 定理與 Weierstrass 定理 [24, p.119, p.126] 在多複變函數的推廣, Stein 流形是正則域的推廣 [10, XV-XIX]。

Cartan 與 Serre 在 1952 年發表他們的研究成果 (布魯塞爾會議), 大會的論文集在 1953 年刊行。據說, Cartan 與 Serre 的演講變成這次會議的一場轟動事件。一個德國數學家對他的同伴說 :「法國人已經開著坦克上戰場, 我們仍然拿著弓箭與刀矛搏鬥」[26, p.6], [31, p.213]。

1937 年日本數學家 Kiyoshi Oka (岡潔, 1901∼1978) 解決 Cousin 第一問題 [10, p.137]。由於缺乏適當的語言形式, Oka 的論文寫得極爲深奧難懂, 他把 coherence 的概念敘述得十分複雜。

Cousin 第二問題的本質是拓樸, 而不是解析。事實上, 當 X 是任意複空間, Cousin 第二問題恆有解的充分必要條件是 $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{M}^*$ 所誘導的映射 $H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^1(X, \mathcal{M}^*)$ 必須是單射 [10, p.139]。

Cartan 從 1950 年代初期引入凝聚層 (coherent sheaf) 的概念, Oka 那些複雜的證明才變得平易近人。他還改進 Leray 的上同調層 (sheaf cohomology), Cartan - Serre 定理才得以誕生。

Cartan 把複解析空間 (complex analytic space) 看成具有 sheaf of rings 結構的的拓樸空間 (1953/54 Cartan 研討會)。這種看法啟發了 Serre 重建代數幾何的思路 (Faisceaux algébriques cohérents (FAC), Ann. Math. 61(1955), 197-278)。日後 Grothendieck 的 scheme theory 就是建築在 FAC 的基礎之上 (註9)。

8. 算術虧格

Cartan 與 Serre 在多複變函數的成功鼓舞了許多人把 sheaf theory 與 sheaf cohomology 引進各自的研究領域。

算術虧格 (arithmetic genus) 是黎曼曲面虧格 (genus) 在 n 維平滑複射影多樣體 V_n 的推廣。義大利代數幾何學者 F. Severi (1879∼1961) 提出三種推廣的方法。

設 K 是 V_n 的典範除子 (canonical divisor), E 是 V_n 的超平面除子 (divisor of the hyperplane section)。當 h 是足夠大的正整數, 得知 $\dim|K+hE|$ 與 $\dim|hE|$ 都是 h 的多項式函數, 這兩個多項式函數分別記爲 $v(h; K, V_n)$ 與 $v(h; V_n)$。定義

$$P_a(V_n) := v(0; K, V_n), \qquad p_a(V_n) := (-1)^n v(0; V_n),$$
$$a(V_n) := g_n - g_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} g_1,$$

其中 $g_k = h^0(V_n, \Omega^k)$, 而 $h^0(V_n, \Omega^k)$ 是全純 k-form 形成的向量空間的維數。

Severi 把 $P_a(V_n)$, $p_a(V_n)$, $a(V_n)$ 都叫做 V_n 的算術虧格。他猜想 $P_a(V_n) = p_a(V_n) = a(V_n)$。他能夠證明 $n = 1$ 或 2 的情形 (1905 年) [29, p.197]。他不能證明 $n \geq 3$ 的情形 (註10)。

日本數學家 Kunihiko Kodaira (小平邦彥, 1915∼1997) 提出 $n = 3$ 的證明 (1952年), 論文在 1954 年刊出。

Kodaira 與 Serre 在 1954 年共同獲得 Fields 獎; Kodira 的生平見 [36]。

Donald C. Spencer (1912∼2001) 是 Kodaira 在普林斯頓大學的同事。美國數學學會

Mathematical Reviews 關於 Cartan 與 Serre 論文 (布魯塞爾會議論文集) 的評論文章正是由 Spencer 寫的。Spencer 對於 Cartan 與 Serre 的思路與手法當然十分瞭解。

Spencer 與 Kodaira 合作, 用 sheaf theory 研究代數幾何的問題 [36, p.49]。他們挖到的第一桶金是證明 Severi 猜想 (Proceedings National Acad. Sci. U.S.A. 39 (1953), 641 -649)。他們證明 $P_a(V_n) = p_a(V_n)$, 因爲 $P_a(V_n) = a(V_n)$ 在 Kodaira 1952 年的講義已經證明。

繼 Kodaira 與 Spencer 之後, F. Hirzebruch (1927∼2012), W. V. D. Hodge (1903∼1975), M. Atiyah (1929∼2019) 也迅速的投入 sheaf cohomology 與複幾何的研究。

1956 年 Cartan 與 Eilenberg 合寫的書《*Homological Algebra*》終於出版, 數學家慢慢的熟悉同調代數的標準手法, 如: derived functors, injective resolutions。這本書的手稿在 1953 年送審 [31, p.213]。據說, André Weil 是審稿人; Weil 對於抽象理論一向是嗤之以鼻 [30, p.75]。

同調代數與層論、上同調層結合, 成爲代數幾何與複幾何的基本工具, 在 Grothendieck 手裡還變成一種思考的模式。

註釋

註1: 當時法國科學院的數學院士分成三組: 純數學 (geometry), 應用數學 (mechanics), 天文 (astronomy)。

註2: Hugo Steinhause (1887∼1972) 是波蘭 Lwow 大學的教授, 是第一次世界大戰戰後重建波蘭數學的主要人物。他是 Hilbert 的學生 (哥廷根大學博士, 1911), 但是自學法國數學家 H. Lebesgue 關於 Lebesgue 積分與三角級數的理論。第一次世界大戰爆發後, 他受到奧匈帝國的徵召入伍服役 (因爲他居住在奧屬波蘭), 軍隊駐紮在 Kraków。有一天晚上在公園散步, 聽到有人聊天, 提到 Lebesgue 積分, 他嚇了一跳, 上前自我介紹, 原來是兩個年輕人: Stefan Banach (1892∼1945) 與 Otton Nikodym (1887∼1974)。從此開始了他與 Banach 長達二十年的合作 [15]。Banach 迅速上昇爲戰後波蘭數學界的明星, 建立了函數空間線性算子的理論。

Steinhaus 有好幾個有名的學生: Banach (1920), Rajchman (1921), Schauder (1923), Mark Kac (1937)。Rajchman 的學生有 Antoni Zygmund (1900∼1992, 三角函數與調和分析), Kac (1914∼1984) 是機率論與統計物理的權威。

Steinhaus 與 Schauder 都是波蘭猶太人。二戰期間, Steinhaus 幸運的逃脫納粹的追捕, 1943 年前後 Schauder 被蓋世太保 (Gestapo) 逮捕, 從此再也沒有回來, 相信已經死於集中營。

註3: Lichtenstein 在 1933 年 8 月突然去世, Leray 與 Schauder 決定把這篇文章獻給 Lichtenstein。文章刊出後, 獻詞卻不見了, 參考文獻倒是多了幾篇 Picard 的文章。Émile Picard (1856~1941) 是這份數學期刊的主編, 他的專長是函數論 (Picard 大定理)、微分方程、代數曲面。Picard 著名的學生有 Paul Painlevé (1887), Jacques Hadamard (1892), E. Vessiot (1892, 曾擔任 ENS 的校長), Henri Villat (1911, Leray 的老師), Gaston Julia (1917).

爲什麼會把作者的獻詞刪掉? 相信是故意的。Picard 是反對德國數學家參與國際數學活動的領頭大將 [25, p.366]。普法戰爭 (1871) 之後, 法國社會瀰漫一股反德氣氛, 這股反德情緒在第一次世界大戰之後更加強烈。根據 [1, p.470], 1911~1914 年在 ENS 入學的學生有一半以上死於戰場。一戰結束後 (1918 年), 法國的男性人口減少十分之一, 三分之一的家園被毀。Picard 的大兒子死於戰場, 他的小女兒也死於戰場, 她是一名護士。Hadamard 兩個兒子都死於凡爾登 (Verdun) 戰役 [1, p.30], Hadamard 第三個兒子二戰期間參與抵抗運動, 於 1944 年被德國人殺害。

註4: Oflag 是德文 Offizierslager 的縮寫。根據「日內瓦公約」的規定, 軍官戰俘營的管理人員不得強制戰俘從事勞動。在停火協議簽訂 (1940 年 6 月 17 日) 前後, 許多法國戰俘滿心期待很快就可以回家, 但是德方卻以尚未簽訂和平協定爲理由拒絕釋放他們。試以德方立場來看, 如果釋放這兩百萬戰俘, 他們都是青壯年人口, 回到法國將成爲推動法國經濟復興的強大力量, 有一些人還可能集結爲反德的武裝力量, 這些都不是德方樂意看到的。

註5: Behnke 培養很多傑出的分析學者與幾何學者, 如：Peter Thullen (1931), Karl Stein (1937), Friedrich Hirzebruch (1950), Reinhold Remmert (1954), Hans Grauert (1956)。

註6: Mac Lane 是哈佛大學教授 (1938~1947)。二戰結束之後, 芝加哥大學校方委託哈佛大學教授 Marshall Stone (1903~1989) 重建芝加哥大學數學系。Stone擔任系主任 (1946~1952), 聘請幾個重量級教授：Whitney (沒有接受), Weil, Mac Lane, Zygmund, Chern (陳省身)。Mac Lane 從 1947 年起任教於芝加哥大學。

註7: 1938 年 Bourbaki 另一位成員 Chevalley 在普林斯頓高等研究所訪問, 戰爭爆發時 (1939年) 他還在美國。他到紐約的法國領事館報到, 但是沒有回國。Chevalley 沒有受到公開的譴責。戰後他申請巴黎大學的職位, 遇到不少困難, 直到 1957 年才申請到巴黎大學的職位 [18]。

註8: 根據 Henri Cartan 的回憶 [14], Cartan 研討會的主題並不是事先規劃好的。原先它只

是 Catan 為 ENS 四年級的學生準備的未來研究題材。不久 Serre 要求 Cartan 把他講的題材寫下來, Cartan 也同意了, 有時候他叫一個學生或聽衆紀錄。後來參加研討會的人越來越多, 研討會的記錄 (exposés) 出版了整整十六年 (1948～1964)。

註9: Grothendieck 其實很早就學習 sheaf theory。根據 Bernard Malgrange (1928～) 的回憶 [18], Gronthendieck 與 Malgrange 都是 Laurent Schwartz (1915～2002) 在 Nancy 大學的學生。由於 Schwartz 在 1952 年受聘爲巴黎大學的教授, 他們這些學生也跟著到巴黎 : Grothendieck 在 1953 年獲得博士學位, Malgrange 是 1955 年的博士。

當時爲了擴展博士生的知識面, 學生除了要寫博士論文, 還要寫一篇「第二論文」。「第二論文」不需要有原創性, 但是主題必須與博士論文無關, 內容要相當深入。Grothendieck 的博士論文是 topological vector spaces 方面 (泛函分析),「第二論文」的主題是 sheaf theory。

Grothendieck 博士論文的答辯在 1953 年 2 月 28 日, Malgrange 也在場旁聽。答辯結束之後, Henri Cartan, Grothendieck 與 Malgrange 一起搭計程車到 Schwartz 家。進了計程車之後, Cartan 很客氣的告訴 Grothendieck, 在論文答辯時, Grothendieck 關於 sheaf theory 有一個地方講錯了。

註10: Severi 猜想是早期代數幾何研究一個重要的問題, 參看 [30, p.42-46], [37, p.133-140], [12, p.151]。

Severi 猜想中的 V_n 本來是平滑多樣體, Oscar Zariski (1899～1986) 把它放寬到正規多樣體 (normal variety)。他可以證明 $n=2$ 的情形, 也可以證明 : 若 $n=2m-1$ 成立時, 則 $n=2m$ 也成立 (Ann. Math. 55(1952), 552-592)。

Zariski 出生於白俄羅斯, 第一次世界大戰時爲了逃避戰亂全家搬到烏克蘭, 1918～1919 年就讀於基輔大學。後來烏克蘭動亂 (因爲俄國革命、俄國與波蘭的戰爭), 他選擇到義大利求學。1924 年獲得博士學位, 深受義大利代數幾何學者 Castelnuovo、Enriques 與 Severi 的影響。

1927 年他移民美國得以逃避義大利法西斯政權反猶政策的迫害。

1939 年他用交換代數重新建立代數幾何的基礎 (含特徵數不爲零的情形)。1944 年他訪問巴西的聖保羅大學, 每星期演講三次, 聽衆只有一個, 就是 André Weil。

1947 年他獲聘爲哈佛大學教授。他在哈佛大學的學生包括 : D. Gorenstein (1923～1992, 後來轉向研究有限群), S. Abhyankar (1930～2012), Michael Artin (1934～), H. Hironaka (1931～), D. Mumford (1937～) 都是一代名家, 其中 Hironaka 與 Mumford 分別是 1970 年與 1974 年 Fields 獎的得主。

参考文獻

1. M. Andler, Jean Leray, Proc. Amer. Phil. Soc., vol.144, no.4, 2000, December, 470-478.
2. M. Andler, Jean Leray, Biogr. Mems. Fell. R. Soc. 52(2006), 137-148.
3. M. Aubin, Fatou, Julia, Montel, Springer LNM vol.2014, Springer, 2001, Berlin.
4. A. Borel, G.M. Henkin and P.D. Lax, Jean Leray (1906-1998), Notices AMS 47 (2000), 350-359.
5. A. Borel, Jean Laeray and algebraic topology, in "Selected Papers of Jean Leray, vol. 1, Springer-Verlag, 1998".
6. A. Borel, André Weil and algebraic topology, Notices AMS 46 (1999), 424-427.
7. R. Bott and L. W. Tu, Differential forms in algebraic topology, GTM vol. 82, Springer-Verlag, 1979, Berlin.
8. S.B. Carroll, *Brave genius*, Crown Publishers, New York, 2013.
9. J. Dieudonné, On the history of the Weil conjectures, Math. Intelligencer, 10 (1975), 7-21.
10. H. Grauert and R. Remmert, *Theory of Stein spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
11. R. Hartshorne, Algebraic geometry, Springer GTM vol.52, Springer, New York, 1977.
12. F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1966.
13. W.F. Santos and M. Moskowitz (editors), Gerhardt Hochschild (1915～2010), Notices Amer. Math. Soc. 58 (2011), 1078-1099.
14. A. Jackson, Interview with Henri Cartan, Notices AMS 46(1999), 782-788.
15. M. Kac, Hugo Steinhausa reminiscence and a tribute, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 572-581.
16. 康明昌, Bourbaki 與 André Weil, 數學傳播季刊, 44(4), 3-20, 2020.
17. F. Oort, The Weil conjectures, NAW 5/15 nr. 3, September 2014, 211-219.
18. MacTutor History of Mathematics archive, URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/
19. S. Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, 1963.
20. S. Mac Lane, Saunders Mac Lane: a mathematical autobiography, A.K. Peter, 2005.
21. L. Masliak, The difficulties of scientific life in occupied France: the example of Emile Borel, Paul Lévy and others..., in "Mathematical sciences and 20th century dictatorships", edited by L. Saraiva, SPM, 2018.
22. H. Miller, Leray in Oflag XVIIA: The origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences, Gaz. Math. no. 84, suppl (2000), 17-34.
23. D. Mumford and T. Oda, *Algebraic Geometry* II, Hindustan Book Agency, 2015.
24. R. Narasimhan, *Complex analysis in one variable*, Birkhäuser, London, 1985.
25. K.H. Parshall and A.C. Rice (editors), Mathematics unbound, Amer. Math. Soc. and London Math. Soc., 2002.
26. R. Remmert, Complex analysis in "Sturm und Drang", Mathematical Intelligence 17(1995) (2), 4-11.
27. C. Reid, Hans Lewy (1904～1988), in "Miscellanea mathematica", edited by P. Hilton, F. Hirzebruch and R. Remmert, Springer-Verlag, 1991, Berlin.
28. A. Riding, And the show went on, 中譯本：盛會不歇, 麥田出版社, 2018。

29. L. Roth, Francesco Severi, J. London Math. Soc. 38(1963), 282-307.
30. L. Schneps (editor), *Alexandre Grothendieck: a mathematical portrait*, International Press, Boston, 2014.
31. J. -P. Serre, Henri Paul Cartan, Bull. London Math. Soc. 46 (2014), 211-218.
32. 施拱星, 施拱星先生訪問記, 數學傳播季刊, 12(2), 12-19, 1988。
33. A. Sigmund, P. Michor and K. Sigmund, Leray in Edelbach, Math. Intelligencer, 27 (2005), 41-50.
34. A. Weil, *Collected Papers* vol.II (1951∼1964), Springer-Verlag, 1979.
35. Wikipedia, available via Google.
36. 顏一清, 遊裡工夫獨造微, 小平邦彥傳, 數學傳播季刊, 25(1), 39-56, 2001。
37. O. Zariski, Algebraic sheaf theory, Bull. AMS 62(1956), 117-141.

—本文作者爲台灣大學數學系退休教授—