# 編者的話

Jean Leray (1906~1998) 與 André Weil 同年出生、同年辭世, 先後受教於巴黎高師, 但對數學的品味大相逕庭。Weil 是 Bourbaki 的創始成員, 注重結構嚴謹, 不事應用。Leray 則視數學爲建模的工具, 從力學和物理問題汲取靈感。在 1934 年的論文中, Leray 建構了 Navier-Stokes 方程的大域弱解, 證明平滑的初始值致使弱解在有限時間內平滑且唯一。他深富原創力, 結合了偏微分方程的能量估計與代數拓撲 (譬如 Banach 空間的固定點定理) 的想法。在線性偏微分方程組的求解工具尚待研發之時, 他竟然率先處理了非線性方程組。

1940 年至 1945 年, Leray 被關押在戰俘營。他深恐流體力學的專長會致使德國人迫他效力, 因此專心研究「無用的」代數拓樸, 提出層 (sheaf, 由局部性質推導大域結果的一般工具) 的概念, 並介紹譜序列 (spectral sequence) 的方法, 對上同調群取上同調群, 逐步逼近層的上同調群, 用以研究連續映射的定義域、對應域及纖維之上同調群之間的關係。日後, 譜序列在球的同倫群 (將球映射爲低維球的不同方法) 的計算至爲關鍵, Weil 也藉譜序列提出 de Rham 定理的新證明; 層上同調則成爲多複變函數理論的基礎, 對 Cartan - Serre 定理 A、B 的證明不可或缺。康明昌教授闡述相關數學與歷史。

戰後 Leray 回到分析的工作。50 年代之後, 致力於複數域的偏微分方程, 將留數定理及積分表示推廣至多複變分析, 成就斐然。他始終是一位應用數學家, 但因機緣巧合, 對幾何和拓樸做出了無與倫比的貢獻。

同步化現象見諸有情人的靈犀相通; 這是情意所致, 或是力學因素使然? 夏俊雄教授介紹振子 (oscillator) 同步化的 Kuramoto 數學模型, 概要證明：若振子之間的角速度差異及起始值差異夠小, 則可達頻率同步化; 若它們的角速度一致, 則可進而達成相位同步化。

Kummer曾證明：若 $p$ 是正則質數, 則費馬方程式 $X^p + Y^p = Z^p$ 無正整數解; 而 $p$ 是正則質數, 若且唯若 $p$ 未整除類數 (理想類群的元素個數)。謝銘倫教授概述類數與 zeta 函數、Dirichlet $L$-函數的關聯, 並介紹 $E/\mathbb{Q}$ 的 zeta 函數及 Birch & Swinnerton-Dyer 猜想。

衆所周知, 一顆三維單位球可以與十二顆互不重疊的單位球同時碰觸。那麼一顆三維球可否與同樣大小的13顆球同時碰觸? Oleg R. Musin 在 2006 年藉由 Delsarte 線性規劃衍生的方法來解決這個問題：置單位球於點 $O$, 將其它彼此相切的單位球球心記爲 $O_1, O_2, \ldots, O_N$, 令 $\phi_{ij} = \angle O_i O O_j$, 並設計一個特殊的多項式函數 $f$, 考慮 $S = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(\cos\phi_{ij})$。利用線性規劃函數工具可得知 $f$ 的下界, 而利用 $f$ 的特性及球面幾何可逐步得到 $S$ 的上界, 比較上下界得知 $N < 13$, 手法高妙。俞韋亘教授及林育愷、李家妤同學細說分明。

**數學傳播電子版網址:**

https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/

梁惠禎
2021 年 3 月