數學傳播 44卷4期, pp. 45-53

高斯二項式係數的完全齊次對稱多項式表示法及其應用

陳建燁

壹、序言:

首先, 本文直接定義「高斯二項式係數」(Gaussian Coefficients):

定義: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}$, 其中 $1\le k\le n$, 且 $q\ne 1$。

例如: $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \dfrac{(q^4-1)(q^3-1)}{(q^2-1)(q-1)} = (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4+q^3+2q^2+q+1$。

可以看出, 在形式與結構上與二項式係數有相似之處。

高斯二項式係數有什麼重要性呢? 參考資料 [1] 介紹了其在組合計數上的背景如下: 設 $GF(q)$ 爲 Galois field, 元素個數爲 q, 且 $V(n,q)$ 爲佈於體 $GF(q)$ 的 n 維向量空間, 則 $V(n,q)$ 的 k 維子空間個數, 恰爲 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$。

一方面, 類似於一般的二項式係數, 高斯二項式係數有著如下的遞迴性質: $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k\cdot\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ 其證明可由直接展開通分而得, 置於附錄。

另一方面, 有所謂的「完全齊次對稱多項式」:

$$h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k \\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\ge 0}} (a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n}),$$

例如:

$$h_2(a_1,a_2,a_3)=\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0}}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}a_3^{\lambda_3})=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1.$$

完全齊次對稱多項式的遞迴結構, 可由「減元降次遞迴式」(參考資料 [2]) 加以刻劃:

$$h_{k+1}(a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1})=\underbrace{h_{k+1}(a_1,a_2,\ldots,a_n)}_{\text{減元}}+a_{n+1}\cdot\underbrace{h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1})}_{\text{降次}}$$

例: $h_2(a,b,c)=h_2(a,b)+c\cdot h_1(a,b,c)$。

隱約之中, 高斯二項式係數與完全齊次對稱多項式兩者的遞迴結構, 似有一定的關聯性, 事實上, 兩者之間有一個簡潔的關係式:

$$\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_q=h_{n-k}(1,q,q^2,\ldots,q^k),\ \text{其中 } 1\leq k\leq n,\ \text{且 } q\neq 1.[1]$$

此即高斯二項式係數的完全齊次對稱多項式表示法。在本篇文章中, 將用數學歸納法證明此式。

進一步地, 此關係式有兩個主要應用:

1. 可用於證明關於「費氏數列相鄰數項乘積」的一個命題 [3]:
   設 α 與 β 爲方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根, 則有
   $$\frac{F_n\cdot F_{n-1}\cdots F_{n-k+1}}{F_k\cdot F_{k-1}\cdots F_1}=h_{n-k}(\alpha^k,\alpha^{k-1}\beta,\alpha^{k-2}\beta^2,\ldots,\alpha^2\beta^{k-2},\alpha\beta^{k-1},\beta^k),$$
   其中 $n\geq k\geq 2$。
   此式可將費氏數列相鄰數項的乘積, 用完全齊次對稱多項式加以表示。

2. 可用於證明關於「循環數列」的一個命題 [4]:
   設 $x^m-1=0$ 的 m 個根爲 $1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{m-1}$, 其中
   $$\alpha=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m},$$
   且 $m\geq 2$, 則
   $$h_n(1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{m-1})=\begin{cases}0, & \text{當 } n \text{ 不是 } m \text{ 的倍數}\\ 1, & \text{當 } n \text{ 是 } m \text{ 的倍數}\end{cases}。$$
   此爲循環數列的完全齊次對稱多項式表示法。

貳、本文:

一、定義、記號、公式與性質:

1. 完全齊次對稱多項式 (Complete Homogeneous Symmetric Polynomial)

定義:

$$h_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k \\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \geq 0}} (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n}),$$

稱爲「變數 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的 k 次完全齊次對稱多項式」。特別地, $h_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, 且 $h_k(a) = a^k$。

例: $h_2(a_1, a_2, a_3) = \displaystyle\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2 \\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \geq 0}} (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a_3^{\lambda_3}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1.$

例: $h_2(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca.$

例: $h_3(a, b) = a^3 + b^3 + a^2b + ab^2.$

性質1: **減元降次遞迴式**

$$h_{k+1}(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) = \underbrace{h_{k+1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)}_{\text{減元}} + a_{n+1} \cdot \underbrace{h_k(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})}_{\text{降次}}$$

例:

$$\begin{aligned} h_2(a, b, c) &= a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \\ &= (a^2 + b^2 + ab) + c \cdot (a + b + c) = h_2(a, b) + c \cdot h_1(a, b, c) \end{aligned}$$

此爲 $n = 2$, $k = 1$ 的情形, 其中 $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$。

說明: 以 a_{n+1} 作分類, 沒有 a_{n+1} 的集成一組, 有 a_{n+1} 的集成另一組, 將 $(n+1)$ 元 $(k+1)$ 次齊次式寫成 n 元 $(k+1)$ 次和 $(n+1)$ 元 k 次齊次式的組合。

性質2: **次方乘法的分配律**: $r^n \cdot h_n(a_1, a_2, \ldots, a_m) = h_n(a_1r, a_2r, \ldots, a_mr).$

例:

$$\begin{aligned} r^2 \cdot h_2(a, b, c) &= a^2r^2 + b^2r^2 + c^2r^2 + abr^2 + bcr^2 + car^2 \\ &= (ar)^2 + (br)^2 + (cr)^2 + (ar)(br) + (br)(cr) + (cr)(ar) \\ &= h_2(ar, br, cr). \end{aligned}$$

證明:

$$r^n \cdot h_n(a_1, a_2, \ldots, a_m) = r^n \cdot \left[\sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=n \\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m \geq 0}} (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_m^{\lambda_m}) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=n\\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\ge 0}} (r^n a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}\cdots a_m^{\lambda_m})\\
&= \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=n\\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\ge 0}} (r^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m}\cdot a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}\cdots a_m^{\lambda_m})\\
&= \sum_{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=n\\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\ge 0}} [(ra_1)^{\lambda_1}(ra_2)^{\lambda_2}\cdots(ra_m)^{\lambda_m}]\\
&= h_n(a_1r, a_2r, \ldots, a_mr).
\end{aligned}
$$

在本文中會用到的情形是:

$$
\begin{aligned}
\beta^{k(n-k)}\cdot h_{n-k}\Big(1,\frac{\alpha}{\beta},\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^2,\ldots,\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^k\Big) &= (\beta^k)^{n-k}\cdot h_{n-k}\Big(1,\frac{\alpha}{\beta},\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^2,\ldots,\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^k\Big)\\
&= h_{n-k}\Big(\beta^k,\beta^k\cdot\frac{\alpha}{\beta},\beta^k\cdot\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^2,\ldots,\beta^k\cdot\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^k\Big).
\end{aligned}
$$

2. 費氏數列 (Fibonacci Numbers): 滿足「$F_0=0$, $F_1=1$, 以及遞迴關係 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, 其中 $n=0,1,2,\ldots$」的數列, 稱爲「費氏數列」。

Binet **公式**: 設方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根爲 α 與 β, 則費氏數列的一般項爲

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}. \qquad [5]$$

3. 重複組合數 H_k^n : [6]

定義: 設 k 爲正整數, 將方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非負整數解的個數, 記爲 H_k^n。

例: $x+y+z=2$ 的非負整數解有 $(x,y,z)=(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, 一共 6 組, 所以 $H_2^3=6$。

h 與 H : 由定義不難看出此一事實: $h_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的展開式的項數, 恰爲 H_k^n。

例如: $h_2(a,b,c)$ 的展開式一共有 $H_2^3=6$ 項。

註: 此處「展開式的項數」指的是「同類項合併」之後的項數, 但是基本上, 由於展開式的各項, 次方不會完全相同, 所以不會有相同的項。

二、主要定理:

$$\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_q = h_{n-k}(1,q,q^2,\ldots,q^k),\ \text{其中 } 1\le k\le n,\ \text{且 } q\ne 1.$$

證明: 用數學歸納法!

首先, 有 $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = \dfrac{q^n-1}{q-1} = q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+q+1 = h_{n-1}(1,q)$

與 $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = \dfrac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)} = 1 = h_{n-n}(1,q,\ldots,q^n)$.

接著,

當 $n=1$ 時, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = h_{1-1}(1,q^1)$, 欲證之等式成立。

當 $n=2$ 時, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q = h_{2-1}(1,q^1)$, 且 $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q = h_{2-2}(1,q,q^2)$, 欲證之等式皆成立。

假設當 $n \le N$ 時, 欲證之等式成立,

即 $\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q = h_{N-k}(1,q,q^2,\ldots,q^k)$, 其中 $1 \le k \le N$, 於是有

$$\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q = h_{N-k}(1,q,q^2,\ldots,q^k) \quad \text{與} \quad \begin{bmatrix} N \\ k-1 \end{bmatrix}_q = h_{N-(k-1)}(1,q,q^2,\ldots,q^{k-1}).$$

則當 $n=N+1$ 時,

當 $k=1$ 時: $\begin{bmatrix} N+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = h_{(N+1)-1}(1,q)$, 等式成立。

當 $k=N+1$ 時: $\begin{bmatrix} N+1 \\ N+1 \end{bmatrix}_q = h_{(N+1)-(N+1)}(1,q,\ldots,q^{N+1})$, 等式成立。

當 $2 \le k \le N$ 時:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N+1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} N \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q && \text{(遞迴性質)} \\
&= h_{N-k+1}(1,q,q^2,\ldots,q^{k-1}) + q^k \cdot h_{N-k}(1,q,q^2,\ldots,q^k) && \text{(歸納法假設)} \\
&= h_{N-k+1}(1,q,q^2,\ldots,q^{k-1},q^k) && \text{(減元降次遞迴式)} \\
&= h_{(N+1)-k}(1,q,q^2,\ldots,q^k), \text{ 所欲證之等式亦成立。}
\end{aligned}$$

故由數學歸納法, 所欲證之定理成立!

例:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^4-1)(q^3-1)}{(q^2-1)(q-1)} = (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4+q^3+2q^2+q+1,$$

$$h_{4-2}(1,q,q^2) = h_2(1,q,q^2) = 1+q^2+q^4+1\cdot q+q\cdot q^2+q^2\cdot 1 = q^4+q^3+2q^2+q+1.$$

三、主要應用:

1. 命題: 設 α 與 β 為方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根, 則有

$$\frac{F_n\cdot F_{n-1}\cdots F_{n-k+1}}{F_k\cdot F_{k-1}\cdots F_1} = h_{n-k}(\alpha^k, \alpha^{k-1}\beta, \alpha^{k-2}\beta^2, \ldots, \alpha^2\beta^{k-2}, \alpha\beta^{k-1}, \beta^k),$$

其中 $n\ge k\ge 2$。

證明:

在 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}$ 之中, 取 $q=\dfrac{\alpha}{\beta}$, 得

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{(\frac{\alpha}{\beta})} &= \frac{\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n-1\right]\cdot\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}-1\right]\cdots\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-k+1}-1\right]}{\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k-1\right]\cdot\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-1}-1\right]\cdots\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^1-1\right]} \\
&= \frac{(\alpha^n-\beta^n)\cdot(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\cdots(\alpha^{n-k+1}-\beta^{n-k+1})}{(\alpha^k-\beta^k)\cdot(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})\cdots(\alpha-\beta)}\cdot\frac{\frac{1}{\beta^n}\cdot\frac{1}{\beta^{n-1}}\cdots\frac{1}{\beta^{n-k+1}}}{\frac{1}{\beta^k}\cdot\frac{1}{\beta^{k-1}}\cdots\frac{1}{\beta}} \\
&= \frac{\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)\cdots\left(\frac{\alpha^{n-k+1}-\beta^{n-k+1}}{\alpha-\beta}\right)}{\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}\right)\cdots\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right)}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{\beta^{n-k}}\cdot\frac{1}{\beta^{n-k}}\cdots\frac{1}{\beta^{n-k}}\right)}_{k\text{ 個}} \\
&= \frac{F_n\cdot F_{n-1}\cdots F_{n-k+1}}{F_k\cdot F_{k-1}\cdots F_1}\cdot\frac{1}{\beta^{k(n-k)}} \qquad \text{(由費氏數列的 Binet 公式)},
\end{aligned}$$

於是可得

$$\begin{aligned}
\frac{F_n\cdot F_{n-1}\cdots F_{n-k+1}}{F_k\cdot F_{k-1}\cdots F_1} &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{(\frac{\alpha}{\beta})}\cdot\beta^{k(n-k)} \\
&= \beta^{k(n-k)}\cdot h_{n-k}\Big(1, \frac{\alpha}{\beta}, \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^2, \ldots, \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^k\Big) \\
&= h_{n-k}\Big(\beta^k, \beta^k\cdot\frac{\alpha}{\beta}, \beta^k\cdot\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^2, \ldots, \beta^k\cdot\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^k\Big) \text{ (次方乘法的分配律)} \\
&= h_{n-k}(\beta^k, \alpha\beta^{k-1}, \alpha^2\beta^{k-2}, \ldots, \alpha^k)
\end{aligned}$$

$$= h_{n-k}(\alpha^k, \alpha^{k-1}\beta, \alpha^{k-2}\beta^2, \ldots, \alpha^2\beta^{k-2}, \alpha\beta^{k-1}, \beta^k).$$

此爲 相鄰連續 k 項費氏數分式型乘積 的完全齊次對稱多項式表示法。

例:
當 $k=2$ 時, $\dfrac{F_n \cdot F_{n-1}}{F_2 \cdot F_1} = h_{n-2}(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2)$.
當 $k=3$ 時, $\dfrac{F_n \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2}}{F_3 \cdot F_2 \cdot F_1} = h_{n-3}(\alpha^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2, \beta^3)$.
當 $k=4$ 時, $\dfrac{F_n \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} \cdot F_{n-3}}{F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1} = h_{n-4}(\alpha^4, \alpha^3\beta, \alpha^2\beta^2, \alpha\beta^3, \beta^4)$.

2. 命題: 設 $x^m - 1 = 0$ 的 m 個根爲 $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$, 其中 $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{m} + i\sin\dfrac{2\pi}{m}$, 且 $m \geq 2$, 則

$$h_n(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}) = \begin{cases} 0, & \text{當 } n \text{ 不是 } m \text{ 的倍數} \\ 1, & \text{當 } n \text{ 是 } m \text{ 的倍數} \end{cases} 。$$

證明: 在 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}$ 之中, 將 n 與 k 分別用 $n+m-1$ 與 $m-1$ 代入, 得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q &= \frac{(q^{n+m-1}-1)(q^{n+m-2}-1)\cdots(q^{n+1}-1)}{(q^{m-1}-1)(q^{m-2}-1)\cdots(q-1)} \\ \Rightarrow \frac{(q^{(m-1)+n}-1)(q^{(m-2)+n}-1)\cdots(q^{1+n}-1)}{(q^{m-1}-1)(q^{m-2}-1)\cdots(q-1)} &= \begin{bmatrix} n+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q \\ &= h_{(n+m-1)-(m-1)}(1, q, q^2, \ldots, q^{m-1}), \end{aligned}$$

即

$$h_n(1, q, q^2, \ldots, q^{m-1}) = \frac{(q^{(m-1)+n}-1)(q^{(m-2)+n}-1)\cdots(q^{1+n}-1)}{(q^{m-1}-1)(q^{m-2}-1)\cdots(q-1)}.$$

設 $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{m} + i\sin\dfrac{2\pi}{m}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ h_n(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}) &= \frac{(\alpha^{(m-1)+n}-1)(\alpha^{(m-2)+n}-1)\cdots(\alpha^{1+n}-1)}{(\alpha^{m-1}-1)(\alpha^{m-2}-1)\cdots(\alpha-1)} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{當 } n \text{ 不是 } m \text{ 的倍數,} \\ 1, & \text{當 } n \text{ 是 } m \text{ 的倍數。} \end{cases} \end{aligned}$$

此爲 循環數列的完全齊次對稱多項式表示法。

四、其他應用:

1. 當 q 爲正整數時, 可知

$$\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=h_{n-k}(1,q,q^2,\ldots,q^k)$$

必爲正整數。

註: 左式的分式型式, 一定可透過約分化簡成整數。

2. $\lim\limits_{q\to 1}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=C^n_k.$

證明: $\lim\limits_{q\to 1}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=\lim\limits_{q\to 1}h_{n-k}(1,q,q^2,\ldots,q^k)=h_{n-k}\underbrace{(1,1,1,\ldots,1)}_{k+1\text{ 個}}=H^{k+1}_{n-k}=C^{(n-k)+(k+1)-1}_{n-k}$
$=C^n_{n-k}=C^n_k$。

註: 在參考資料 [1] 中, 此性質的證明需用到 L'Hopital's Rule, 但此處的證明只需用到取極限的性質即可。此一關係式說明了高斯二項式係數與原來的二項式係數的關係, 因此, 有時也將高斯二項式係數稱爲「二項式係數的 "q-analogs"」。[1] 。

參、結語:

本篇文章透過遞迴結構, 用數學歸納法證明了

$$h_{n-k}(1,q,q^2,\ldots,q^k)=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1))}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}.$$

此一等式, 也可視爲「將完全齊次對稱多項式的變數, 用等比數列代入的結果, 恰爲高斯二項式係數」, 這是個耐人尋味的結論。由 $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=h_{n-k}(1,q,q^2,\ldots,q^k)$, 再次得到費氏數列相鄰項乘積與循環數列的完全對稱多項式表示法, 這樣的應用, 揭示了看似不同的數學概念背後, 有著相同的架構, 值得深思。

附錄:

1. 遞迴性質:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q .$$

證明:

$$\begin{aligned}
\text{右式} &= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+2}-1)}{(q^{k-1}-1)(q^{k-2}-1)\cdots(q-1)} + q^k \cdot \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \\
&= \frac{q^k-1}{q^k-1} \cdot \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+2}-1)}{(q^{k-1}-1)(q^{k-2}-1)\cdots(q-1)} \\
&\quad + q^k \cdot \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+2}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \cdot (q^{n-k+1}-1) \\
&= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+2}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \cdot [q^k - 1 + q^k \cdot (q^{n-k+1}-1)] \\
&= \frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)\cdots(q^{n+1-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} = \text{左式。}
\end{aligned}$$

參考資料

1. Peter J. Cameron, Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms, 124-128, 224.
2. 陳建燁。推廣的Vandermonde 行列式 (最右行升次型)。高中數學學科中心電子報, 第 114 期, 中華民國 105 年 9 月, 6。
3. 陳建燁。費氏數列相鄰項乘積的完全齊次對稱多項式表示法。科學教育月刊, 第 405 期, 中華民國 106 年 12 月, 2-11。
4. 陳建燁。循環數列的「完全齊次對稱多項式」表示法。科學教育月刊, 第 401 期, 中華民國 106 年 8 月, 19-27。
5. 吳振奎。斐波那契數列。九章出版社, 民國82年7月初版, 8。
6. 陳建燁。完全齊次對稱多項式(起): 自由分解重組恆等式。高中數學學科中心電子報, 第 113 期, 中華民國 105 年 8 月, 1-2。

— 本文作者任教台北市立第一女子高級中學 —