數學傳播 44卷4期, pp. 38-44

關於「$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{F_i}{10^i}=\frac{10}{89}$ 的探源與推廣」之迴響

許閎揚

壹、前言

在數學傳播第 173 期中 [1] 張進安老師介紹了一個關於費氏數列的極限問題, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{F_i}{10^i}=\frac{10}{89}$。他分別使用矩陣理論與高中數學方法來計算, 並得出正確答案, 令人深感佩服。

使用冪級數是研究無窮級數的主要方式之一, 我們發現可以將上面的級數問題轉換成求冪級數的收斂區間與收斂函數問題。有了冪級數的收斂函數, 在無窮級數的計算上不但簡單並且可以在收斂區間內對冪級數逐項微分、積分得到更多的等式。

貳、費氏數列的冪級數

費氏數列的定義爲 $\langle F_n\rangle : F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n\geq 0$ 且 $F_0=0$, $F_1=1$。

一個冪級數 (中心在 x_0) 是一個有以下形式的級數

$$S(x):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,$$

其中 $(x-x_0)^0=1$。關於冪級數的內容可參考高等微積分課本 [4]。

很明顯地, 我們要探討的無窮級數的求值問題: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{10^n}=\frac{F_0}{10^0}+\frac{F_1}{10^1}+\frac{F_2}{10^2}+\cdots$ 可以視爲以費氏數列爲係數的冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nx^n=F_0x^0+F_1x^1+F_2x^2+\cdots$, 當 $x=\frac{1}{10}$ 的問題。更進一步, 若我們可以找到冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nx^n$ 的收斂函數 $F(x)$ 與收斂區間, 則問題 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{F_i}{10^i}$ 即爲求 $F\Big(\frac{1}{10}\Big)$ 是多少的問題。在計算冪級數的收斂區間前, 我們先證明以下的引理:

引理1[3]: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

證明: 由遞迴關係 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, 它的特徵方程爲

$$t^2-t-1=0,$$

解得

$$t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

爲它的兩個特徵根, 因此設

$$F_n=\alpha\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n+\beta\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n,$$

由 $F_0=0$, $F_1=1$ 解得

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad \beta=-\frac{1}{\sqrt{5}},$$

得到

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big]。$$

利用上面公式所求極限爲

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}}{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n}-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\Big)^{n}}{1-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\Big)^{n}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\end{aligned}$$

得證。

引理2: 設費氏數列所成的冪級數爲 $\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n$, 則 $\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n$ 收斂若且唯若 $x\in\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)$。

證明: 由比值試驗法, 若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{F_{n+1}x^{n+1}}{F_nx^n}\right|<1,\text{ 則 }\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\text{ 收斂},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{F_{n+1}x^{n+1}}{F_nx^n}\right|>1,\text{ 則 }\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\text{ 發散。}$$

由引理 1, 即

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot|x|<1,\text{ 則 }\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\text{ 收斂,}$$
$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot|x|>1,\text{ 則 }\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\text{ 發散.}$$

也就是若

$$|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2},\text{ 則 }\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\text{ 收斂,}$$
$$|x|>\frac{\sqrt{5}-1}{2},\text{ 則 }\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\text{ 發散.}$$

即

$$\text{當 }x\in\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)\text{ 時,}\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\text{ 收斂。}$$
$$\text{當 }x\in\Big(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)\bigcup\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\infty\Big),\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\text{ 發散。}$$

當 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 時, 因爲

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}F_n\cdot\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big]\cdot\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[1-(-1)^n\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{2n}\Big]=\frac{1}{\sqrt{5}},\end{aligned}$$

得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_n\cdot\Big(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^n$ 發散。

當 $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 時, 因爲

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}F_n\cdot\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big]\cdot\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[(-1)^n-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{2n}\Big]=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{5}},\end{aligned}$$

極限不存在, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_n\cdot\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$ 發散, 定理證畢。

由上面的討論, $x\in\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)$ 若且唯若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nx^n$ 收斂, 因此我們可以將此冪級數定義成一個函數 $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nx^n$, 定義域爲 $\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)$。

定理 1: 若 $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nx^n$, $x\in\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)$ 爲費氏數列的冪級數, 則 $F(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$, $x\in\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)$。

證明: 利用 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $n\geq 2$ 及引理 2, 當 $x\in\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)$ 可得

$$\sum_{n=2}^{\infty}F_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^n,$$

由此得

$$F(x)-F_0-F_1x=x[F(x)-F_0]+x^2F(x),\quad (F_0=0,\ F_1=1),$$

即 $F(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$, 得證。

定理 2[1]: $r\in\Big(-\infty,-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)\bigcup\Big(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\infty\Big)$ 若且唯若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{r^n}$ 收斂, 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{r^n}=\dfrac{r}{r^2-r-1}$。

證明: 由引理 2 與定理 1, 可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nx^n$ 收斂若且唯若 $x\in\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)$ 且

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=\frac{x}{1-x-x^2},\quad x\in\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big).$$

當 $x=\dfrac{1}{r}$,

$$F\Big(\frac{1}{r}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{r^n}=\frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}-\Big(\frac{1}{r}\Big)^2}=\frac{r}{r^2-r-1}。$$

$|x|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 若且唯若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}F_nx^n$ 收斂, 得

$|r|>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 若且唯若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{r^n}$ 級數收斂, 得證。

參、冪級數的應用

現在我們可以用定理 2 來計算張進安老師的結果, 除此之外, 因爲冪級數在收斂區間內可逐項微分、積分, 我們還可以提出一些新的等式(請見推論 3 及推論 4)。

推論1[1]: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{10^{nk}}=\dfrac{10^k}{10^{2k}-10^k-1}$, $k\geq 1$。

證明: 由定理 2 可知 $r=10^k$, $k\geq 1$ 在級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{r^n}=\dfrac{r}{r^2-r-1}$ 的收斂區間內, 將 $r=10^k$ 代入定理 2, 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{10^{nk}}=\dfrac{10^k}{10^{2k}-10^k-1}$, 此即原文 [1] 中的公式。

當 $k=1$, 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{10^n}=\dfrac{10}{100-10-1}=\dfrac{10}{89}$, 此即張進安老師所得的結果 [1]。

推論2[1]: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{2^n}=2$。

證明: 由定理 2 可知 $r=2$ 在級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{r^n}=\dfrac{r}{r^2-r-1}$ 的收斂區間內, 將 $r=2$ 代入定理 2, 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{F_n}{2^n}=\dfrac{2}{2^2-2-1}=2$, 得證。

推論3: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n\cdot F_n}{10^n}=\dfrac{1010}{7921}$。

證明: 由定理 1

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=\frac{x}{1-x-x^2},\quad x\in\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big).$$

因冪級數在收斂區間可逐項微分, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(F_nx^n)=\frac{d}{dx}\Big(\frac{x}{1-x-x^2}\Big),$$

整理得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nF_nx^{n-1}=\frac{1(1-x-x^2)-(-1-2x)x}{(1-x-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x-x^2)^2}\quad x\in\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big),$$

將等號兩邊同乘 x, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}nF_nx^n=\frac{x+x^3}{(1-x-x^2)^2},\quad x\in\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big).$$

當 $x=\dfrac{1}{10}$ 時, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot F_n}{10^n}=\frac{1010}{7921},$$

得證。

推論 4:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{n+1}x^{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\ln\Big(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\Big)+\frac{2}{1-\sqrt{5}}\ln\Big(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\Big)\Big],$$
$$x\in\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big).$$

證明:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=\frac{x}{1-x-x^2},\quad x\in\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big).$$

因冪級數在收斂區間可逐項積分, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x F_nt^ndt=\int_0^x\frac{t}{1-t-t^2}dt,\quad x\in\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big). \tag{1}$$

將 $\dfrac{t}{1-t-t^2}$ 分解成兩個分式相減, 得

$$\frac{t}{1-t-t^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}t}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right), \tag{2}$$

將 (2) 式等號兩邊對從 0 到 x 對 t 積分, 得

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{t}{1-t-t^2}dt=&\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\int_0^x\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}t}dt-\int_0^x\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}dt\right)\\ =&\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\ln\Big|1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\Big|+\frac{2}{1-\sqrt{5}}\ln\Big|1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\Big|\Big)\\ =&\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\ln\Big(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\Big)+\frac{2}{1-\sqrt{5}}\ln\Big(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\Big)\Big],\\ &x\in\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big),\end{aligned}$$

其中 $1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x>0$ 且 $1-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x>0$。

由 (1) 式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{n+1}x^{n+1} =&\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x F_n t^n dt=\int_0^x\frac{t}{1-t-t^2}dt\\ =&\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\ln\Big(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\Big)+\frac{2}{1-\sqrt{5}}\ln\Big(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\Big)\Big],\\ &x\in\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big),\quad \text{得證。}\end{aligned}$$

肆、結語

冪級數是微積分中研究級數的主要工具之一, 對於本次探討的問題很自然的可以轉換成冪級數的求值與它的收斂區間問題。找出費氏數列的冪級數後將 x 以數值代入不但計算簡單, 而且在微積分中有不少方法可以找到冪級數的收斂半徑。特別的是, 在使用比值試驗法找收斂半徑時, 黃金比例自然而然的出現, 讓我們在整個計算過程中充滿著驚喜。

致謝 本文之完成, 感謝彰師大數學系蔡宗龍老師在寫作之初給予許多建議。另外作者感謝審稿人不厭其煩地審閱, 並在多次的修改過程中給予許多指導, 在此致上最高謝意。

參考資料

1. 張進安。$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{F_i}{10^i}=\frac{10}{89}$ 的探源與推廣。數學傳播季刊, 44(1), 89-93, 2020。
2. 張鎮華。費氏數列與等比數列的交會處。數學傳播季刊, 44(2), 58-61, 2020。
3. T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, 2001.
4. William R. Wade, *An Introduction to Analysis*, 3rd Edition, Prentice Hall, 2003.

—本文作者任教彰化藝術高中—