數學傳播 44卷4期, pp. 34-37

無理數到底有多無理

張鎮華

1. 幕起 — 被扔進海裡的英雄

現在我們都知道實數分爲有理數與無理數兩類, 但這不是人們一開始就知道的。例如, 古希臘畢氏學派的學者, 把數與線段長度視爲一體的兩面, 他們認爲任意兩線段的長度總是可以公度, 也就是, 其比是兩個正整數之比, 用現代的說法, 他們心中的數都是有理數, 是兩個整數的比。

但是想不到, 學派中竟然出現「叛徒」(可能是 Metapontum 的 Hippasus), 論述了正方形的對角線長與邊長不可公度, 正五邊形的對角線長與邊長也一樣不可公度。這實在是一個驚天動地的大叛逆, 難怪他要因此被扔進海中處死。

不過人類是聰明的, 如果原來我們只知道有理數, 但卻發現了一個有理數講不通的現象, 那就接受現象, 用現象描述一個嶄新的事情。就好像牛頓發現蘋果從樹上往下掉落在地面, 他其實是看不到地球用「力」把蘋果拉下來, 但是既然有蘋果落地的現象, 就把這個現象叫做「地心引力」所產生的現象; 地心本未用「力」, 引力不過是蘋果落地現象的描述。

類似的手段, 有理數之中本來並沒有平方等於 2 的數, 不過聰明如 Dedekind 之輩, 就用兩邊包抄的方法, 將有理數分爲兩類, 一類是非正的有理數及平方小於 2 的正有理數, 另一類是平方大於 2 的正有理數, 於是就「想像」在大於與小於之間有一個等於, 用此創造出一種平方等於 2 的新數出來。

這樣的精神在複數也再次發生。本來只知道實數, 在實數中找不到平方等於 -1 的數, 但是解方程式時卻經常有平方爲負的方程式, 那就乾脆發明一種新的數, 它的平方就是 -1。

2. $\sqrt{2}$ 是無理數 — 開跑了

證明 $\sqrt{2}$ 是無理數, 長久以來都是台灣高一數學的教學內容, 用來訓練反證法。一般常見的證明如下證法一, 這個證明的精神最早由亞里斯多德 (Aristotle, 西元前 384~322 年) 在他的書 Analytica Priora 中提到, 後來歐基理德 (Euclid, 約西元前 300 年) 仔細寫爲《幾何原本》第 X 卷第 117 命題。以上的說明取自 wiki「Square root of 2」網頁 `https://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2`。但是根據我手邊的《幾何原本》版本 [1], 第 X 卷只到第 115 命題就停止。比較像的反而是第 297 頁的命題 9, 唯其敘述等同於「有理

數的平方等於一個平方數比一個平方數」, 也就是「不等於一個平方數比一個平方數的數不是有理數」, 而其證明相對簡略, 比較像下面的證法三。

證法一: 假設 $\sqrt{2}$ 是有理數, 則存在正整數 a 與 b 使得 $\sqrt{2}=a/b$, 不妨假設 a 與 b 互質。首先 $a^2=2b^2$。因爲 a^2 是偶數, 所以 a 也是偶數 (要不然, 如果 a 是奇數 $2k+1$, 則其平方 $a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2\ (2k^2+2k)+1$ 是奇數, 矛盾), 也就是存在正整數 c 使得 $a=2c$。所以 $(2c)^2=2b^2$, 也就是 $b^2=2c^2$。同理 b 也是偶數, 就存在正整數 d 使得 $b=2d$, 因此 a 與 b 有公因數 2, 這與原來假設它們互質矛盾。所以 $\sqrt{2}$ 不是有理數。 □

另外一種類似當年證明 $\sqrt{2}$ 不可公度的無窮下降法, 說明如下。

證法二: 假設 $\sqrt{2}$ 是有理數, 則存在正整數 a 與 b 使得 $\sqrt{2}=a/b$, 不妨假設 a 是能取到的最小可能正整數。因爲 $1<\sqrt{2}<2$, 所以 $b<a<2b$。由於

$$\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{2-a/b}{a/b-1}=\frac{2b-a}{a-b},$$

我們再次將 $\sqrt{2}$ 寫成兩個整數相除, 但其分子 $2b-a<a$, 這與原來假設 a 是最小可能矛盾。所以 $\sqrt{2}$ 不是有理數。 □

最後我們要用「算術基本定理」爲基礎, 證明 $\sqrt{2}$ 是無理數如下。

證法三: 假設 $\sqrt{2}$ 是有理數, 則存在正整數 a 與 b 使得 $\sqrt{2}=a/b$, 透過平方有 $a^2=2b^2$, 其中 a^2 和 b^2 的質因數分解中2的次方都是偶數, 因而 $2b^2$ 的質因數分解中 2 的次方會是奇數, 也就是 a^2 與 $2b^2$ 的質因數分解中 2 的次方不相同, 這與質因數分解的唯一性矛盾。所以 $\sqrt{2}$ 不是有理數。 □

最後這個證明之所以能夠這麼簡便, 是因爲它用到一個看似直觀, 但是證明也要費點功夫的質因數分解的唯一性。這個證法的威力是, 可以類似證明如下的一些與指數、對數有關的數是無理數, 這是因爲 $\sqrt{2}$ 其實是 2 的 $1/2$ 次方。

- $\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、更一般來說當正整數 n 不是平方數時的 $\sqrt{n}$ 。
- $\sqrt[3]{4}$、$\sqrt[5]{6}$、更一般來說當正整數 n 不是 m 次方數時的 $\sqrt[m]{n}$ 。
- $\log 2$、$\log 3$、更一般來說當正整數 n 不是 10 的次方時的 $\log n$ 。

3. e 是無理數 — 加速前進

e 這個數的由來始於 Euler 計算指數函數的微分, 也就是, 當 a 是正數時

$$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}.$$

其中的 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$ 是一個只與 a 有關的常數, 我們就定義 e 是使得此數爲 1 的 a。用一個簡單的估計, 那就是 $\dfrac{e^h-1}{h}\approx 1$, 也就是 $e^h-1\approx h$, 或是 $e\approx(1+h)^{1/h}$, 如果將連續的量 $1/h$ 視爲離散的正整數 n, 那應該定義 $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$。

類似前述的推導微分公式 $(e^x)'=e^x$, 再用以推導 $(\ln x)'=1/x$, 對現在有些追求「嚴格證明」的人來說可能覺得不完美, 所以有些微積分課本會反過來, 用積分定義自然對數

$$\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}dt.$$

再用微積分基本定理求得 $(e^x)'=e^x$。這種看似完美的推導, 其借助的是要花費大力氣才能證明的微積分基本定理。雖然說, 數學到後來, 當你知道所有結果之後, 如何推導都無礙; 可是我覺得, 對於一個初學的人, 知道歷史的原意, 更能感受其美。

不管如何, 接下來要證明 e 是無理數, 就要用到其無窮級數的展開式:

$$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

假設 e 是有理數, 則存在正整數 a 與 b, 使得 $e=a/b$。將上式兩邊乘上 $b!$, 得到

$$\frac{b!a}{b}=\frac{b!}{0!}+\frac{b!}{1!}+\frac{b!}{2!}+\cdots+\frac{b!}{b!}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\cdots,$$

其中前面的一些數都是整數, 但是後面的一段卻滿足

$$0<\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\cdots<\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\cdots=\frac{1}{b}\le 1,$$

因此得到整數等於整數加上一個介於 0 與 1 之間的小數, 矛盾。所以 e 是無理數。

4. 圓周率是無理數 — 起飛了

圓周率 π 是大家很熟悉的一個數學常數, 但是要證明它是無理數卻比上面的論述都要難, 這裡採用 Niven 的證明方法。

假設 π 是有理數, 則存在正整數 a 與 b 使得 $\pi=a/b$。對於正整數 n, 考慮多項式函數 $f(x)=x^n(a-bx)^n/n!=b^nx^n(\pi-x)^n/n!$。先證明一個性質。

性質: 對於任意非負整數 m, $f^{(m)}(0)$ 與 $f^{(m)}(\pi)$ 都是整數, 其中 $f^{(m)}(x)$ 是 f 在 x 的 m 次導數。

證明: 首先, 因爲 $f(x)=(c_nx^n+c_{n+1}x^{n+1}+\cdots+c_{2n}x^{2n})/n!$, 其中各個 c_i 都是整數。所以, 當 $m<n$ 時, $f^{(m)}(0)=0$; 而當 $m\geq n$ 時, $f^{(m)}(x)$ 常數項中的 $m!$ 抵消 $n!$, 所以 $f^{(m)}(0)$ 是整數。

另一方面, 因爲 $f(\pi-x)=f(x)$, 所以 $(-1)^{(m)}f^{(m)}(\pi-x)=f^{(m)}(x)$, 遂有 $f^{(m)}(\pi)=(-1)^mf^{(m)}(0)$ 也是整數。 □

接著, 對 $\int_0^\pi f(x)\sin xdx$ 做多次部分積分, 也就是對於偶數的 m, 計算

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f^{(m)}(x)\sin xdx &= \int_0^\pi f^{(m)}(x)(-\cos x)'dx\\ &= -f^{(m)}(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f^{(m+1)}(x)\cos xdx\\ &= \text{整數}+\int_0^\pi f^{(m+1)}(x)(\sin x)'dx\\ &= \text{整數}+f^{(m+1)}(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f^{(m+2)}(x)\sin xdx\\ &= \text{整數}-\int_0^\pi f^{(m+2)}(x)\sin xdx.\end{aligned}$$

利用這個結果 $n+1$ 次, 再加上 $f^{(2n+2)}(x)=0$, 就得到 $\int_0^\pi f(x)\sin xdx$ 爲整數。

另一方面, 當 $0<x<\pi$ 時, $0<f(x)\sin x\leq(a\pi)^n/n!$, 其中最右式當 n 趨近於 ∞ 時趨近於 0, 所以當 n 夠大時, $\int_0^\pi f(x)\sin xdx$ 是介於 0 與 1 之間的小數, 矛盾。所以 π 是無理數。

5. 幕落 — 打不完的蚊子

證明一個數是無理數並不一件容易的事, 事實上, 還有很多數我們猜想它們是無理數, 但都還不會證明, 例如 : $\pi+e$、$\pi-e$、或是更一般不爲零的整數組合 $m\pi+ne$、πe、π/e、2^e、π^e、$\pi^{\sqrt{2}}$、$\ln\pi$、Catalan 常數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(2n+1)^2$、以及 Euler-Mascheroni及常數

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\Big(-\ln n+\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\Big)=\int_1^\infty\Big(-\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}\Big)dx.$$

參考文獻

1. 藍紀正、朱恩寬譯, 梁宗巨、張毓新、徐伯謙校訂。歐幾里得 幾何原本。九章出版社, 中華民國 81 年 8 月一版。
2. 蔡聰明。無理數的證明。數學傳播季刊, 23(1), 12-23, 1999。

—本文作者爲臺灣大學數學系名譽教授—