數學傳播 44卷4期, pp. 21-26

從代數史到當代表現理論

賴俊儒

—本文於 2020 年 10 月 22 日刊載於中研院訊漫步科研專欄, 作者及院訊同意本刊轉載—

一、

代數學是數學重要的分支, 從國民義務教育開始, 學生就要學習「代數」, 一邊設未知數, 一邊思考為什麼這世界上有那麼多人喜歡把雞和兔子放在同一個籠子裡。有趣的是, 不同的群體對於代數是什麼有著截然不同的看法。中學生覺得代數就是解 x, 大學生覺得代數就是群環體, 而數學家則通常沒辦法很簡潔的告訴你答案, 因為數學家知道的太多了。本文中筆者嘗試從歷史演進出發, 聊聊不同時代代數一詞代表的意義, 最後簡單介紹近世代數中重要的子領域 — 表現理論 (representation theory)。

在十九世紀之前, 代數學涵蓋的範圍都只是尋找四次以下的多項式方程式的解。雖然從西元前一千七百年的巴比倫人們就開始算代數, 會解二次多項式了, 代數成為一門學問要始於阿拉伯世界的驕傲 — 數學家花拉子米 (al-Khwārizmī)。花拉子米在 824 年寫了本專書《移項與消去之計算總成》(*al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa al-muqabala*), 其中移項 al-jabr 一詞的拉丁翻譯 algebra 就是代數一詞的起源。

上古時期的代數, 就是移項。

二、

到了文藝復興時期, 數學社群有公開挑戰的風氣, 兩個數學家會為了名譽互相向對方提出問題決鬥, 也就是比誰能解方程式解得又快又好。1535 年, 義大利數學家塔塔利亞 (Tartaglia) 和費爾 (Fior) 展開了一場著名的決鬥, 他們互相出了三十題三次方程式給對方解。費爾手中握有他的老師德費羅 (del Ferro) 親傳的祕方, 可以找出形如 $x^3+bx=c$ 的方程式解; 但是塔塔利亞除了費爾所知的形式以外, 也同時能解決形如 $x^3+bx^2=c$ 的方程式。最後塔塔利亞在比賽開始的兩小時就把費爾出給他的三十題盡數解出, 以 30 比 0 痛宰了半桶水的費爾。

這個結果震驚了義大利數學界, 當時人們因為缺少負數與複數的概念, 普遍相信三次方程式是不可解的。在米蘭任教的卡當 (Cardan) 便是如此, 他苦苦懇求塔塔利亞傳授解法, 甚至

提議要介紹米蘭大官給塔塔利亞, 讓他或許能得到更好的工作。塔塔利亞最後要卡當發誓不把解法外傳, 才勉強將解法用隱晦的詩句寫給卡當。不久以後, 卡當從德費羅的另一個弟子口中也學到了德費羅派的解法。卡當和自己的弟子法拉利 (Ferrari) 將三次的解法推廣發展出四次方程式的解法, 發表在他 1545 年的書《大術》(*Artis magnae*) 中。卡當覺得自己並不是發表塔塔利亞的工作, 因此沒有違背當初的誓言。塔塔利亞對此怒不可抑, 書信往來咒罵抨擊數年, 最後在 1548 年約定了與法拉利的決鬥。當天群衆聚集在米蘭的一個教堂, 下從販夫走卒上至米蘭市長都來看熱鬧。只是和前一次決鬥不同的是, 塔塔利亞雖然掌握了三次方程, 但是對於四次方程卻力有未逮, 在決鬥第一天的晚上趁夜遁逃, 讓法拉利取得這場決鬥的勝利。

文藝復興時的代數, 就是決鬥。

三、

到了 1770 年, 義裔法籍數學家拉格朗日 (Lagrange) 對四次以下的方程式舊有解法做了突破性的分析：要解一個 n 次方程式 $f(x)=0$, 可以從一個輔助的方程式 $R(x)=0$ 開始, $R(x)$ 的根對應到 $f(x)$ 的 n 個根的置換 (permutation), 也就是說 $R(x)$ 爲一個 $n!$ 次多項式。

例: 當 $n=3$ 的時候, 總共有 $3!=6$ 個置換：123,132,213,231,312,321。

拉格朗日證明了如果輔助方程式能解, 則原方程式可解。在 $f(x)$ 次數爲 3 的情況下, $R(x)$ 剛好是個 x^3 的二次多項式。換句話說, 是個僞裝成 $3!=6$ 次多項式的 2 次多項式; 在 $f(x)$ 次數爲 4 的情況下, $R(x)$ 剛好是個僞裝成 $4!=24$ 次多項式的 3 次多項式, 因此我們似乎總能將方程式降次解決。但是在 $f(x)$ 次數爲 5 的情況下, $R(x)$ 成了一個僞裝成 $5!=120$ 次多項式的 24 次多項式, 次數不減反增。拉格朗日因此猜測五次以上的方程式不保證可解, 最後這個定理由挪威數學家阿貝爾 (Abel) 於 1824 年證明。順帶一提, 諾貝爾獎的數學版本就叫做阿貝爾獎, 由挪威政府出資逐年頒發, 和只針對 40 歲以下的費爾茲獎 (Fields Medal) 不同, 阿貝爾獎沒有年齡限制。1831 年, 法國數學家伽羅瓦 (Galois) 奠基在拉格朗日和阿貝爾的工作之上, 給出了方程式可解的充要條件, 用現代的語言來說, 判斷方程式是否可解等價於了解置換群 (permutation group) 的內在結構。可惜的是, 伽羅瓦爲了愛情死於真刀真槍的決鬥之中, 要是伽羅瓦能用代數決鬥就好了。

十九世紀初期的代數, 就是根的置換。

四、

至十九世紀後半, 代數的發展開始發散。1870 年, 挪威數學家李 (Lie) 和普魯士數學家克萊恩 (Klein) 同時到巴黎訪問, 做了兩個月的鄰居與同事。擅長代數的克萊恩喜歡研究特例; 擅長分析的李喜歡思考最一般的情況。合作到一半, 普法戰爭爆發, 克萊恩不得不返回普魯士, 而李過一陣子計畫避難到義大利, 卻在楓丹白露被當作普魯士間諜逮捕, 李隨身攜帶的數學手稿還被當作加密後的機密情報高規格對待。還好有熟識的法國數學家將李保出來, 不然數學的發展可能會被拖累數十年。1871 年, 李和克萊恩發表了變形群 (transformation group) 的概念來研究物體在空間中的運動與幾何, 可以涵蓋連續或離散的情況。兩人的研究興趣之後往不同的方向分歧 : 克萊恩關心離散變形, 發展了置換群以外的有限群論; 李關心連續變形, 把方程式與置換群之間的連結推廣, 建立一類特殊的無限群來處理偏微分方程式, 這類無限群現在稱爲李群 (Lie group)。

李群理論的一個重點是, 與其研究李群本身, 不如研究李群所誘生的嶄新結構, 李將這個新結構稱爲「無窮小群」, 在現今的語言中稱作李代數 (Lie algebra)。約略來說, 李代數是個帶有額外操作的向量空間, 裡面的向量可以相加、可以延長、但是不能相乘。李代數自帶的額外操作叫做李括號 (Lie bracket), 可以用來產生新的向量, 例如說我們可以將向量 v 和 w 透過李括號包起來產生一個新的向量, 記做 $[v,w]$。一般來說李括號必須滿足包含賈可比 (Jacobi) 恆等式在內的一些條件, 但是如果我們設定讓所有的 $[v,w]$ 都等於零, 所有須檢查的條件都會成立, 也就形成最簡單的李代數 — 阿貝爾李代數。一般來說 $[v,w]$ 當然可以是非零向量, 這樣定義出來的李代數複雜的多, 分類並刻劃李代數便成爲數學家關心的問題。複數上的有限維李代數分類問題由法國數學家加當 (Cartan) 與德國數學家齊林 (Killing) 在 1888～1894 完成。而無限維李代數的分類要到 1967 年才由俄國數學家卡茲 (Kac) 和加拿大數學家穆敵 (Moody) 分別獨立完成。

另一方面, 人們從巴比倫時代開始, 解二次多項式的時候就遇見複數了。超過千年的無視也沒有辦法抹滅一個數學概念, 甚之, 無人看管的火苗只會越燒越旺。1843 年愛爾蘭數學家漢米爾頓 (Hamilton) 將複數系看成所有形如 $a1 + bi$ 的「數」, 其中 a 和 b 必須是實數, 1 和 i 是兩個需要描述特殊乘法規則 (即 $1 * 1 = 1$, $1 * i = i * 1 = i$, $i * i = -1$) 的「生成元」。漢米爾頓立刻就想到他可以將複數再推廣 — 增加需要定義特殊乘法規則的生成元個數, 來定義比複數還複雜的數系。漢米爾頓成功的定義了四元數 (quaternion), 當中所有的「數」形如 $a1+bi+cj+dk$, 其中 a,b,c,d 是實數、$1,i,j,k$ 是生成元。他的同事葛雷夫 (Graves) 在聽到消息的隔天就仿造四元數訂出了八元數 (octonion)。這樣配合現有的數系定出額外乘法規則來定義的結構, 很快地被發現出現在其他數學領域中。比方說所有的 n 階矩陣組成的集合, 當中每個元素可以視爲基礎矩陣 E_{ij}的線性組合, 而額外的乘法規則就是

$$E_{ij} * E_{jy} = E_{iy}, \quad E_{ij} * E_{xy} = 0 \quad (\text{若 } x \neq j)$$

此類結構, 由於通常是從複數擴張而成, 稱爲超複雜數系 (hypercomplex number system)。

1870 年, 美國數學家皮爾斯 (Peirce) 首次定義了結合代數 (associative algebra), 簡稱代數。大略來說, 一個代數中的元素也是向量, 每個向量除了可以延長、可以疊加以外, 還可以「相乘」。這裡的乘法也要額外指定係數來描述乘法規則, 只是規則的限制和李代數不同。皮爾斯在他超過一百頁的文章中描述了 150 種不同的六維以下代數結構, 也創造了如冪零 (nilpotent) 或是冪等 (idempotent) 此類至今仍然被廣泛使用的數學概念。到了 1908 年, 蘇格蘭數學家韋德本 (Wedderburn) 在他的博士論文中對於超複雜數系建立了通用的一般性理論, 包含理想 (ideal)、半單 (semisimple)、直積 (direct sum)、張量積 (tensor product), 時至今日, 許多概念仍然在大學代數課程中被廣泛使用。

十九世紀後半開始, 代數成爲一種數學結構的名字、而代數學就是研究結構。

五、

表現依賴於不同的代數結構上, 我們可以對不同的代數結構研究表現理論。比方說群的表現理論和李代數的表現理論就是不同但是有關聯的研究主題。打個比方, 表現理論之於代數結構就像動物行爲學之於野生動物。我們有時透過解剖不能完全的了解動物, 但是從觀察動物的行爲可以增進我們對牠的了解, 甚至有時候, 了解行爲要比了解動物本身更有意義。

表現理論的前身是特徵標 (character) 理論, 最一開始要追溯到德國數學家高斯 (Gauss) 在數論方面的工作, 我們盯著交換群看, 看不出太多有意思的結果, 但是這種群的特徵標卻能用來解答數論上的問題 — 什麼樣的整數 n 能表示成下面的整係數二次形式 ?

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

對於每個二次形式 F, 高斯定義了它的行列式值 $D = b^2 - ac$, 並證明了所有行列式值相同的二次形式會形成一個有限交換群 G。而 G 的特徵標就是某些函數 $\chi : G \to \mathbb{C}^*$, 滿足

$$\chi(g)\chi(h) = \chi(gh) \qquad \forall\ g, h \in G.$$

從此可看出本例中交換群的特徵標/表現理論不是拿來理解交換群的結構的。後來高斯的學生 — 德國數學家戴德金 (Dedekind) 繼承了這個研究發想, 戴德金定義了非交換群上的群行列式 (group determinant), 卻因爲缺少對超複雜數系的理解而未能完成工作。戴德金於是寫信給普魯士科學院士福比尼 (Frobenius) 請益。福比尼使用英國數學家凱萊 (Cayley) 在十九世紀中關於群代數 (group algebra) 的工作, 將超複雜數系的性質代入群行列式的研究, 於 1897 年催生了群表現理論。

回到超複雜數系理論, 韋德本的工作被奧地利數學家阿丁 (Artin) 和德國數學家諾特 (Noether) 推廣到某些擁有上升或下降鍊條件的環上。諾特認爲群表現理論和超複雜數系有緊密的關聯, 應該被一起對待, 成爲有限維代數表現的濫觴。諾特在 1928 年於哥廷根大學的授課講義成爲了所有近世代數課本的雛型。她對於代數結構獨到的觀點和工作讓她連續兩次成爲國際數學家大會受邀講者, 也因此被譽爲代數之母。

哥廷根學派對於結合代數表現理論的研究方法可以應用到李代數上。一言以蔽之, 李代數表現理論的核心問題是要找出並刻劃所有的不可約表現。就像科學家建立元素週期表並且研究每一種化學元素的性質一樣。表現理論的世界就是由不可約表現構築而成, 要理解世界必定要先理解元素。1925 年, 嘉當在完成半單李代數分類的同時, 也透過嘉當分解以完成半單李代數有限維不可約表現的分類。嘉當和德國數學家外爾 (Weyl) 討論之後才發現, 其實這些不可約表現都可以透過俄國數學家舒爾 (Schur) 1901 年博士論文中證明的舒爾對偶性 (Schur duality) 所實現。外爾也受到啟發, 建立了外爾特徵標公式來刻畫不可約表現。

從有限跨到無限, 在數學上一向是個艱難的挑戰。理解 (有限維) 半單李代數的無限維不可約表現是二十世紀數學的超級大難題。最先理出頭緒的是印度數學家威瑪 (Verma), 威瑪在他 1966 年的博士論文中構造了一類性質特別好的無限維表現, 現在我們稱爲威瑪模。只要我們能夠知道每個威瑪模當中哪些不可約表現會出現, 並計算它們出現多少次 (相當於群論中的約旦 - 赫德 (Jordan-Hölder) 重數), 我們就能完整解決半單李代數的不可約表現問題。

到了 1980 年左右, 這個純代數的問題有了一個石破天驚的解答, 蘇聯/以色列數學家卡日丹 (Kazhdan) 和羅馬尼亞數學家盧斯帝 (Lusztig) 指出了這個不可約表現出現的次數等於一類特殊的多項式 $p(q)$ 代入 $q = 1$ 的值。這類多項式現在稱爲 KL 多項式, 可以由岩堀 - 赫克代數 (Iwahori-Hecke algebra) 上的基底轉換得到。而這項理論的證明堪稱二十世紀的數學奇蹟, 需要結合眾多當代數學家在代數幾何、代數分析上深刻的結果。這個證明的精神, 就是將純代數的問題用幾何物件實現並解構算重數, 是爲二十一世紀火紅的數學, 幾何表現論 (geometric representation theory)、範疇化 (categorification) 和瑟格雙模 (Soergel bimodule) 的起點。

在二十世紀, 代數就是見山不是山。

六、

時至二十一世紀, 受前人啟發的研究往相距甚遠的不同方向綻放。如果我們回顧李代數發展的根源, 從理論物理中引入超對稱 (supersymmetry) 可以定義出又一種新的代數結構, 稱爲李超代數 (Lie superalgebra)。李超代數的分類在 1977 年由卡茲完成, 但是李超代數的表

現理論至今尚未完全解決。其中一類李超代數在 2013 年被卡茲的學生 — 中央研究院程舜仁、維吉尼亞大學的王偉強還有他們在成功大學的合作夥伴林牛攻破; 另一類李超代數的表現理論則由王偉強和他的學生 — 新加坡大學的鮑溴辰解決。除此之外, 數學社群僅有部分成果。

又, 前述提到的表現理論都是複數系上的表現理論, 若我們將複數體替換成其他特徵 p 的體, 那麼表現理論也會因此改變而更加困難, 就連半單李代數的特徵 p 表現理論至今也沒有完全被解決。更不用說前述代數結構可以量子化, 定出量子群 (quantum group)、量子超群 (quantum supergroup), 來給出楊振寧 - 巴克斯特 (Baxter) 等式的解。而量子群以及類似結構的表現理論也是二十一世紀數學家關心的難題。

最後, 如果我們追溯回伽羅瓦理論, 代數數論中的伽羅瓦群也能和代數群 (algebraic group) 的自守表現 (automorphic form) 關聯, 是爲朗蘭茲綱領 (Langlands program)。朗蘭茲綱領被視爲代數數論的最終問題, 吸引了衆多數學家的目光與興趣。越南數學家吳寶珠 (Ngô Báo Châu) 就靠著證明了朗蘭茲綱領中的基本引理而獲頒 2010 的費爾茲獎。

不時有人問筆者 :「數學不是已經發展得差不多了嗎? 那你們數學家到底還在做什麼?」我只能說 —

二十一世紀代數未知的新問題仍然不可勝數, 我們數學家的奮鬥永不止息。

參考文獻

1. O'Connor, J. J. and Robertson, E. F. (2020). The MacTutor history of mathematics archive. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk
2. Kleiner, I. (2007). A history of abstract algebra. Springer Science & Business Media.
3. Van der Waerden, B. L. (1985). *A History of Algebra: From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer Science & Business Media.

—本文作者任職中央研究院數學研究所—