

Bourbaki 與 André Weil

康明昌

1. Bourbaki 大會與 Bourbaki 研討會

1934 年 12 月 10 日 (星期一) 中午, 巴黎拉丁區的一家咖啡館 (Café A. Capoulade) 地下一個房間聚集六個年輕人, 他們正在熱烈的討論如何寫一本微積分課本。他們是

- Jean Delsarte (1903~1968),
- André Weil (1906~1998),
- Henri Cartan (1904~2008),
- René de Possel (1905~1974),
- Jean Dieudonné (1906~1992),
- Claude Chevalley (1909~1984)。

他們都是巴黎高師 (École normale supérieure, 以下簡稱 ENS) 的畢業生 (註1), Delsarte 與 Weil 是 1922 年入學, Cartan 與 de Possel 是 1923 年入學, Dieudonné 是 1924 年入學, Chevalley 是 1926 年入學。ENS 是法國的最高學府, 這些人畢業之後都到過國外接受新進數學思潮的洗禮。他們完成博士學位之後, 目前擔任博士後研究員或外省大學的教師 (法國人有巴黎情結。外省是指巴黎以外的省區)。

法國從 19 世紀以來就有知名數學家撰寫微積分課本的傳統。他們所謂的微積分 (Treatise on Analysis) 比現在的微積分涵蓋的內容還要廣泛深入, 它包含微分方程、複變函數、變分學、理論力學、微分幾何, 甚至還包含代數幾何。

1930 年代 ENS 流行的微積分課本是 É. Goursat (1858~1936) 在 1902 年寫的《Course of Mathematical Analysis》, Goursat 也是 ENS 的畢業生, 1885 年開始在 ENS 任教 (註2)。

這些年輕人為什麼要重寫微積分的課本?

Weil 與 Henri Cartan 當時都在 Strasbourg 大學教書, 他們用的課本也是 Goursat 的書。他們發現, Goursat 書中許多定理的證明並不嚴謹, 並且定理的敘述經常畫蛇添足, 加上很多沒有必要的條件。他們就興起重塑河山的念頭。

這樣的聚會以後每兩個禮拜就舉行一次。然而大家覺得意猶未盡，他們決定在 1935 年 7 月 10~17 日舉行一個大會，Bourbaki 大會 (Bourbaki Congress)。地點訂在 Besse-en-Chandesse [31, p.105]。

這是一本集體創作的書，作者的虛擬姓氏叫做 Bourbaki, de Possel 的妻子 Eveline de Possel 替 Bourbaki 取個名字，叫他 Nicolas Bourbaki (註3)。

他們這些人都是 Julia 研討會的成員。這個研討會是以 Weil 為首的一些年輕數學家自發組織起來的。當時法國數學界的活動十分稀少，風氣也很閉塞。年輕的數學家到國外 (尤其是德國) 一看，才知道法國數學的落伍。大家呼朋引伴，自己組織研討會，每第二個與第四個星期一從法國各地回到巴黎討論數學。

在 Julia 研討會開始之前，有一段午餐的空檔時間，這就是 Bourbaki 成員討論寫書計畫的時間，也是 Bourbaki 大會的先聲。

Gaston Julia (1893~1978) 是巴黎大學 (Sorbonne) 的年輕教師，他以教師的身份幫這些 ENS 的學弟們在當時剛建好不久的 Institut Henri Poincaré 借到一個開會的場所。因此他們把這個研討會叫做 Julia 研討會 (註4)。

Julia 研討會每年訂個主題並安排每次的演講人，它的目的既不是教課，也不是讓聽講的人瞭解與演講主題有關的文獻，而是希望透過演講，促使演講者與聽眾加入當時國際上新產生的數學理論的研究工作 [4, p.32]。在 1933~1939 之間，它有以下幾個主題的研討會，

- 1933~1934, 羣論與有限維代數,
- 1934~1935, Hilbert 空間,
- 1935~1936, 拓樸學,
- 1936~1937, Élie Cartan 的研究工作,
- 1937~1938, 代數函數,
- 1938~1939, 變分學。

1939 年 Julia 要為自己的學生規畫研討會，這個山寨版的 Julia 研討會只好正名為 Bourbaki 研討會。Bourbaki 研討會在戰後恢復 (1948)，目前每年舉辦三次，每次有五個演講。

2. 第一代的 Bourbaki 成員

第一代的 Bourbaki 成員，除了上一節提到的六個人之外，他們後來還邀請

- Paul Dubreil (1904~1994),
- Jean Leray (1906~1998),
- Szolem Mandelbrojt (1898~1983)。

Dubreil 只參加一、兩次的寫書討論會, Leray 參加的次數較多, 但是他沒有參加 1935 年第一次的 Bourbaki 大會, 因此都不算 Bourbaki 成員。他們只好再邀請其他人

- Jean Coulomb (1904~1999),
- Charles Ehresmann (1905~1979),
- Claude Chabauty (1910~1990),
- Charles Pisot (1910~1984)。

de Possel 與 Weil 的觀點不合, 他們經常有衝突 [15, p.20]。de Possel 在參加 1936 年 9 月第二次 Bourbaki 大會之後就退出 Bourbaki 的活動。

我們把 Weil、Delsarte、H. Cartan、Dieudonné、Chevalley 稱為 Bourbaki 的創始成員。Weil、H. Cartan、Chevalley 都是二十世紀數學的一代宗師。Dieudonné 幫助 Grothendieck 整理 EGA, 因此變成代數幾何學者熟知的人物。Weil 是 Bourbaki 成員的靈魂人物。

Leray 在 1940~1945 年在德軍的戰俘營渡過。由於這個戰俘營是軍官戰俘營, 許多人具有大學學歷, 德國人允許他們成立大學, 並授予博士學位, Leray 成為這個戰俘營大學的校長, 他自己擔任拓樸學的教授。他因此發展出 Sheaf theory、Sheaf cohomology、spectral sequences (譜序列) 的理論。這些理論是研究代數拓樸 (homotopy groups)、多複變函數 (Cousin problems)、代數幾何 (Leray spectral sequence、étale cohomology) 的工具。

Weil 是拒服兵役者 (conscientious objector), 雖然後來他被軍事法庭判刑五年或自願到軍中服役 (普通士兵役), ENS 的畢業生是服軍官役的。許多人對於 Weil 的行為十分不諒解 (包括 Leray)。二戰結束後, 1947 年 Leray 與 Weil 申請法蘭西學院 (College of France) 的講座職位, 結果由 Leray 勝出 (註 5)。

Mandelbrojt 是波蘭人, 他在波蘭念完碩士學位才到法國唸博士, 他不是 ENS 的畢業生。他的侄子 Benoît Mandelbrot (1924~2010) 是碎形理論的權威, 以公開抨擊 Bourbaki 聞名 [Man]。注意, 這叔侄二人姓氏的拼法不一樣, 差了一個 j 的字母。

3. 第二代與第三代的 Bourbaki 成員

Bourbaki 寫書的計畫十分龐大, 他們自己又訂立一個成員退休的年齡上限: 每個 Bourbaki 成員年滿 50 歲就要退休; 除了特別邀請, 不能再參與 Bourbaki 大會。因此他們必須不斷的邀請優秀的年輕人成為第二代、第三代的 Bourbaki 成員。第二代的 Bourbaki 成員是

- Laurent Schwartz (1915~2002),
- Roger Godement (1921~2016),

- Jean-Louis Koszul (1921~2018),
- Pierre Samuel (1921~2009),
- Jacques Dixmier (1924~),
- Jean-Pierre Serre (1926~),
- Samuel Eilenberg (1913~1998)。

其中 Schwartz 與 Serre 分別是 1950 年與 1954 年的 Fields 獎得主。Schwartz 創建 distribution theory (俄國數學家 S. L. Sobolev 也獨立的建立這套理論)。

Godement、Koszul、Serre 都是 H. Cartan 的學生 [17], Samuel 是 Chevalley 在美國的學生, Dixmier 是 Julia 的學生 [21]。

Eilenberg 是美國哥倫比亞大學的教授,他是二戰前夕流亡到美國的波蘭數學家。他與 H. Cartan 合著《*Homological Algebra*》,是這領域的權威文獻。他是代數拓樸的專家, Bourbaki 邀請他加入恐怕與他們想寫代數拓樸的書有關。2016 年 Bourbaki 終於出版《代數拓樸》一書。

第三代的 Bourbaki 成員是

- Armand Borel (1923~2003),
- Alexandre Grothendieck (1928~2014),
- François Bruhat (1929~2007),
- Pierre Cartier (1932~),
- Serge Lang (1927~2005),
- John Tate (1925~2019)。

其中 Grothendieck 是 1966 年 Fields 獎的得主,他是 Schwartz 在 Nancy 大學的學生,博士論文是泛函分析方面的,他在美國做博士後研究時轉到代數幾何(從 Serre 的 FAC 入手),掀起一場代數幾何驚天動地的革命 [23, p.202]。

Armand Borel 是瑞士人,1949 年他獲得法國政府的資助到巴黎唸書,認識許多第二代的 Bourbaki 成員。他是 Leray 的學生,後來他成為普林斯頓高等研究所的教授,他是 Lie theory 與自守形式的權威 [6]。

Bruhat 與 Cartier 都是 H. Cartan 的學生。

Lang 與 Tate 是數論的領袖人物,他們是 Emil Artin (1898~1962) 在 Princeton 大學的學生。Tate 是 Harvard 大學的教授,Lang 曾任教於 Columbia 大學與 Yale 大學。

可以說, Bourbaki 網羅法國數學界 1930~1960 年代許多精英。但是也有不少傑出人才,如 Leray、René Thom (1923~2002; 1958 年 Fields 獎得主) 都不是 Bourbaki 的成員。

英國人 Michael Atiyah (1929~2019, 1966 年 Fields 獎得主) 雖曾受邀參加 Bourbaki 大會, 但顯然也不是 Bourbaki 的一員 [2]。

Bourbaki 成員有好幾個具有左派政治傾向或無政府主義政治立場的人, 如 Chevalley、Schwartz、Godement、Samuel、Grothendieck。Weil 對於左派人士的活動始終採取冷眼旁觀的態度; 他的妹妹與左派人士多有往來, 深知他們的想法與作法。Weil 在 1935 年訪問莫斯科, 儘管共黨份子使出渾身解數美化紅色政權, Weil 卻不受迷惑 [31, p.108]。

4. 數學原理

Bourbaki 大會的目的是為了寫書召開的會議, 只有 Bourbaki 成員才能參加。Bourbaki 研討會是個學術會議, 開放給所有的人參加。

Bourbaki 寫的書總名叫做《數學原理》(*Éléments de mathématique*), 這些書分成十多本 Books, 每一本 Book 分成幾章。Bourbaki 採用單數的 *mathématique*, 而不是複數的 *mathématiques*, 因為他們相信數學是統一的, 彼此相通的。第一代與第二代的 Bourbaki 成員寫了以下幾本書:

- I Set Theory,
- II Algebra,
- III Topology,
- IV Functions of One Real Variable,
- V Topological Vector Spaces,
- VI Integration。

在 1960 年之後, 第二代與第三代寫的書是

- VII Commutative Algebra,
- VIII Lie Groups and Lie Algebras,
- IX Spectral Theory,
- X Differential and Analytic Manifolds,
- XI Algebraic Topology。

這些書的內容也隨著歲月更迭而擴增。以 Algebra 一書為例, 1940 年代只有 3 章, 之後增加到 7 章, 最後變成 10 章。

嚴格的說, Bourbaki 的書不適合做教科書, 它卻是很方便的參考文獻。

Bourbaki 大會審查每一章的內容極為挑剔, 每一份定稿幾乎都經過五、六次草稿。以李

羣與李代數第 5 章與第 6 章為例，第一次草稿只有 70 頁，第二次草稿變成 130 頁，經過多次重寫與修改，最後變成 288 頁 [6, p.379], [21, p.38]。Jacques Tits (1930~) 雖然不是 Bourbaki 的成員，但是在李羣與李代數這本書也幫了很大的忙 [24, p.25]。

審稿時採取共識決，只要有一票反對，這份稿子就被拒絕。因此大部分的書都要經過五、六個稿子。直到所有的人都精疲力竭，Dieudonné 才跳出來大吼一聲，「夠了，我們決定接受這份稿子。」於是他搜集相關的紀錄，把書寫下來。

Dieudonné 說：「我並沒有過度工作。每天早晨 5 點到 8 點，我坐下來寫書，一天只寫 5 頁。」秉持這種精神，數十年如一日，Dieudonné 替 Bourbaki 寫了許多 Books，幫 Grothendieck 寫 EGA，自己還寫了 9 卷的《*Treatise on Analysis*》。

到了第二代、第三代的 Bourbaki 成員的時候，這種「一票否決制」就無法嚴格遵守。在撰寫《交換代數》時，Grothendieck 堅決反對把 Valuation Theory 納入。1961 年 10 月他寫了一封怒氣沖沖的信給 Serre [23, p.213]，他說，他主張把 higher rank valuation theory 這一章完全刪除；他說，他的反對意見不知講了多少次，卻沒有人聽進去。

當時法國爲了阿爾及利亞的殖民戰爭，全國騷動不安。戴高樂總統勸說法國人民放棄這塊殖民地，說它是「老爹們的阿爾及利亞 (Papa's Algeria)」。

Grothendieck 借用戴高樂的話，說 valuation theory 是「老爹們的交換代數」[23, p.213]。事後看來，他的反對立場不無道理。Valuation theory 在 Zariski 的 local uniformization (1940)，在 Weil 的《*Foundations of Algebraic Geometry* (1946)》[27] 確實扮演一個重要的角色，可是自從 Serre 的 FAC (1955) 取代 Weil 的書 [27] 之後，似乎再也看不到 valuation theory 出場的機會了 [註6]。

5. 數學原理再探

根據 Dieudonné 的說法 [11, p.134-135]，法國政府在第一次世界大戰期間 (1914~1918) 犯了一個致命的錯誤，基於人人平等的原則，它把 ENS 的學生與一般的青年無差別的送上前線，導致三分之二的 ENS 的學生死於壕溝。這些 1910~1918 年級的 ENS 的學生有許多人可以變成數學家或科學家，可以成爲 1920~1930 ENS 學生的年輕教師，可是他們卻爲國捐軀。

這正是 Bourbaki 創始成員 1920 年代在 ENS 入學的情況。他們的老師不是年輕的數學家，而是更前一輩的教師，如 Hadamard (1865~1963)、Emile Borel (1871~1956)、Henri Lebesgue (1875~1941)、Paul Montel (1876~1975)、Arnaud Denjoy (1884~1974)。除了 Hadamard 之外，他們都是研究單變實函數或複變函數的學者，對於國外的研究現況 (如：多複變函數、積分方程) 所知不多，也沒有興趣。當時的法國是函數論大行其道的國度，大部分數學家對於德國、義大利的數學進展並沒有太多關注。

在 1920 年代資深的教授贏得 Bourbaki 青睞的只有幾何學者 Élie Cartan (註7)。E.

Cartan 是 H. Cartan 的父親，其實他在法國並未受到應有的重視，反而是德國的 Weyl 在 1925 年左右的幾篇論文多次提到 E. Cartan 的名字。瞭解 Cartan 的工作成爲 Julia 研討會在 1936~1937 的主題。

在另一方面，Bourbaki 真正欣賞 Henri Poincaré (1854~1912) 則需要較長的時間 [24, p.24], [19]。Poincaré 與 Hilbert 是二十世紀初期少數瞭解數學全局的人 (而不是一兩個特殊領域)。Poincaré 具有高度的幾何直觀，他並不想花很多時間寫出嚴謹的證明。在 1880 年代，Poincaré 的老師 Charles Hermite (1822~1901) 在寫給 Mittag-Leffler 的信中，多次抱怨年輕的 Poincaré 無法把一個完整的證明寫下來 [19, p.11]。

Poincaré 在自守函數與非歐幾何、微分方程與天體力學、偏微分方程與數學物理、電磁學、代數拓樸、數學哲學，都有深邃的創見。這都不是年輕 Bourbaki 成員在 1940、1950 年代所能欣賞的。

1950~1970 年代是 Bourbaki 的全盛時期。

在 1950 年代，數學界的會議或工作坊(workshop) 還不多，Bourbaki 研討會提供一個很好的機會幫助許多人瞭解不少數學領域的最新進展。但是 Bourbaki 研討會沒有觸及的主題並不是不重要，Bourbaki 只有十多個成員，可能基於成員的能力或不易尋找合適的演講人，有些重要的數學成果並沒有在 Bourbaki 研討會呈現 [12]。

到了 1960 年代中期，數學原理的每個章節成爲數學家與研究生重要的參考文獻。嚴格的證明與最一般性的定理已經是大部分人撰寫論文的最高準則。至於數學內涵的統一性則需要身體力行，不是喊喊口號而已。Weil 把代數幾何與代數數論結合在一起 (函數體的黎曼猜想)，Chevalley 把李羣的方法應用到有限單羣 (Chevalley groups)，H. Cartan 把 Sheaf theory 引入多複變函數，都有力的說明現代數學是統一的整體。

在數學原理的幾本書裡面 Books I ~ VI 是屬於比較基礎的數學，現在變成碩士班學生必備的知識。最成功的是 Book VII (交換代數) 與 Book VIII (李羣與李代數)。Book X (微分流形與複流形) 只是羅列一些重要定理的內容，並沒有包含證明過程。Book XI (代數拓樸) 可能是早年留下來的文稿再重新整理而成。

幾乎可以說，Bourbaki 創始成員早年追求的理想到了 1960 年代中期已經逐步實現。這正好說明爲何 Bourbaki 第四代、第五代沒有新的出書計劃。

Bourbaki 也有自身的缺憾，他們對於物理、機率、應用數學的瞭解不夠 [13, p.31]。他們以少數人的力量掀起一場數學的法國大革命，應該可以算是二十世紀數學史的大事 (註8)。

6. Mordell-Weil 定理

André Weil 的父母都是猶太人，他的父親是外科醫師，他的母親是奧地利人，出生於俄羅斯。他還有一個妹妹 Simone Weil (1909 ~1943)。兄妹從小就非常親近。Simone Weil 是

ENS 哲學系畢業 (1931), 擔任過高中教師, 積極參與社會運動、抵抗運動 (Resistance) 與宗教思想的討論, 死後留下 20 卷的著作 [33]。

1920~1940 年代, 法國資深的數學家幾乎沒有人的專長是數論, 年輕一輩第一個數論學者就從 André Weil 開始。

數論的主題之一是解 Diophantine equations。例如, 整係數方程 $x^2 - 13y^2 = 1$ 有沒有整數解? 有沒有有理數解? 除了 $(x, y) = (649, 180)$ 的解之外, 還可以找出哪些新的整數解?

更一般的, 令 $f_1(x_0, \dots, x_n), f_2(x_0, \dots, x_n), \dots, f_m(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ 是一組齊次多項式, 這些多項式定義複射影多樣體 $V = V(f_1, \dots, f_m)$, 其中

$$V := \{a = (a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{C}P^n : f_1(a) = \dots = f_m(a) = 0\}.$$

若 k 是包含 \mathbb{Q} 的體, 定義 V 的子集

$$V(k) = \{a = (a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in V : \text{點 } a \text{ 有一組座標皆落在 } k \text{ 上}\}.$$

Diophantine equations 的求解問題因此可以轉化成以下的幾何問題: 研究 $V(k)$ 的性質與結構。

Louis Mordell (1888~1972) 出生於美國費城, 18 歲渡海到英國劍橋大學, 以劍橋大學 Mathematical Tripos 第三名畢業, 留校研究 $y^2 = x^3 + b$ (b 是非零的整數) 的整數解, 他因此獲得 Smith Prize 的第二名。

Poincaré 在 1901 年曾提出一個問題: 若 E 是定義於 \mathbb{Q} 的橢圓曲線, 那麼 $E(\mathbb{Q})$ 是不是有限生成? 橢圓曲線 E 是虧格為 1 的平滑射影曲線, 它的點還可以用割線、切線的方法定義加法, 因此 $E(\mathbb{Q})$ 不只是一個集合, 它變成一個加法羣。

定理1: (Mordell, 1922) 若 E 是定義於 \mathbb{Q} 的橢圓曲線, 則 $E(\mathbb{Q})$ 是有限生成。

換句話說, 只要在 $E(\mathbb{Q})$ 上選取適當的 (!) 幾個點, 再用割線與切線製造新的點, 就可以得到 $E(\mathbb{Q})$ 的所有點。

那麼, 如果 C 是虧格 ≥ 2 定義於 \mathbb{Q} 的平滑代數曲線, 集合 $C(\mathbb{Q})$ 是不是有限集? 這就是所謂的 Mordell 猜想。

答案在六十年後才出現, G. Faltings (1954~) 因此獲得 1986 年的 Fields 獎。

定理2: (Faltings, 1983) 若 C 是定義於 \mathbb{Q} 的平滑射影曲線且 C 的虧格 ≥ 2 , 則 $C(\mathbb{Q})$ 是有限集 (當然也可能是空集合)。

Faltings 定理在費馬最後定理還有個簡單的應用。若 $n \geq 4$, 代數曲線 $X^n + Y^n + Z^n = 0$

的虧格是 $\frac{(n-1)(n-2)}{2} \geq 3$, 根據定理 2 得知 $X^n + Y^n + Z^n = 0$ 如果有非零的整數解, 則其整數解只有有限個。由於費馬最後定理已經解決 (A. Wiles, 1995), 我們現在用不著利用定理 2 去瞭解費馬最後定理。

事實上, 橢圓曲線 E 的有理點並沒有因為定理 1 與定理 2 而結束, 有名的 BSD 猜想 (Millennium Prize Problems 之一) 就是討論 $E(\mathbb{Q})$ 的秩 (rank) 與 E 的 L -series 的關係。

在 Faltings 定理出現之前, 有許多人也想證明 Mordell 猜想, 包括 Weil。1927 年 Weil 在哥廷根大學訪問, 突然靈光一現, 他發現 Mordell 在定理 1 的方法可以應用到 Jacobian 多樣體 (Jacobian variety) [31, p.55]。

定理 3: (Weil, 1928) 若 C 是虧格 ≥ 2 且定義於 \mathbb{Q} 的平滑射影曲線, $J = J_C$ 是 C 的 Jacobian 多樣體, 則 $J(\mathbb{Q})$ 是有限生成。

Weil 的定理得到 Siegel 正面的回應。Carl Siegel (1896 ~1981) 畢業於哥廷根大學 (1920), 後來任教於法蘭克福大學 (1922) 與哥廷根大學 (1938)。他是傑出的數論學者, 在多複變函數與天體力學也做出重要的貢獻。Siegel 不是猶太人, 但是他不能接受納粹的極權統治, 憤而移居美國, 任職於普林斯頓高等研究所 (1940~1951)。1951 年他才回到哥廷根大學。1978 年 Siegel 與 I.M. Gelfand 共同獲得第一屆的 Wolf 獎。

Siegel 利用定理 3, 證明另一個定理。

定理 4: (Siegel, 1929) 設 C 是定義於整數且虧格 ≥ 1 的仿射代數曲線, 則 C 上只有有限個整數點。

定理 4 的證明綜合 Diophantine 逼近論與 Mordell-Weil 定理的方法, 直到二十年前定理 4 才有新的證明方法, 如 Corvaja 與 Zannier (2002), Terry Tao (2014)。

Weil 的定理並沒有在當時激起很大的反響。兩年後 Weil 在印度遇到 C. V. Raman (1888~1970, 1930 年諾貝爾物理獎得主)。Raman 問他, 究竟有多少人唸過他的博士論文 (即定理 3)。他答道, 至少有一個 (就是 Siegel), 可能還有第二個 (他想的, 是 Emil Artin)。Raman 似乎很同情 Weil 的知音如此的少, 令 Raman 更吃驚的是, Weil 對此似乎一點兒也不在意 [31, p.94]。Emil Artin (1898~1962) 是另一個傑出的數論學者, 他將在下一節出現。

7. 函數體的黎曼猜想

E. Artin 是萊比錫大學的博士 (1921), 他的指導教授是 G. Herglotz (1881~1953)。1921~1922 年 Artin 到哥廷根大學做博士後研究, 在這裏他遇見 Siegel, 因為 Siegel 早 Artin 一年畢業, 繼續留在哥廷根做博士後研究。

Artin 在他的博士論文引進函數體的數論研究。令 k 是特徵數不為 2 的有限體, $f(x) \in k[x]$ 是沒有平方因子的多項式, 定義 $K = k(x, \sqrt{f(x)})$ 。Artin 發現 K 具有許多類似二次數體 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 的性質, 例如, 在環 $k[x, \sqrt{f(x)}]$, 他可以考慮質理想的分解、單位元定理、類數、二次互逆定理, 他還可以考慮 K 的 ζ 函數 $\zeta_K(s)$ [22, p.18~20]。

1921 年 11 月 25 日 Artin 在哥廷根大學演講, 介紹他的博士論文。哥廷根的數學大老 David Hilbert (1862~1943) 似乎很不喜歡 Artin 的博士論文, 他不停的打斷 Artin 的演講。幾天後 Hilbert 告訴 Artin, 他現在開始瞭解 Artin 博士論文的重要性, 他願意把它推薦到 *Math. Annalen* 刊登。

Artin 寫了一封 5 頁的信把這段遭遇告訴他的老師 Herglotz。他沒有接受 Hilbert 的「好意」, 他的博士論文登在 *Math. Zeitschrift* (1924), 他從此再也不發表這方面的研究成果。1922 年他到漢堡大學工作, 開始另一段輝煌的學術生涯。1927 年他解決 Hilbert 第 9 問題與第 17 問題, 兩年後 Siegel 與俄國數學家 A. O. Gelfond 獨立的解決 Hilbert 第 7 問題 (註9)。

設 k 是有限體, C 是定義於 k 的平滑射影代數曲線, 令 $k(C)$ 是 C 上的有理函數形成的集合。則 $k(C)$ 是一個「體」(注意, k 在 $k(C)$ 之內必須是代數封閉)。 $k(C)$ 就是所謂的定義於 k 的 (單變數) 函數體。Artin 考慮的體 $K = k(x, \sqrt{f(x)})$ 對應代數曲線 $Y^2 = f(x)$ 。

定義: 令 k 是具有 q 個元素的有限體, 設 C 是定義於 k 的平滑射影曲線, $K := k(C)$ 是 C 的函數體。定義黎曼 ζ 函數

$$\zeta_K(s) = \prod_P \frac{1}{1 - |P|^{-s}}$$

其中 $s \in \mathbb{C}$, P 是 K 的所有質除子 (prime divisor) 且定義 $|P| = q^{\deg P}$ 。令 $t = q^{-s}$, 則 $\zeta_K(s)$ 可以改寫為

$$Z_K(t) = \prod_P \frac{1}{1 - t^{\deg P}}$$

根據 Riemann-Roch 定理 (F. K. Schmidt, 1927), $Z_K(t)$ 是 t 的有理函數 [22, p.47]。

函數體的黎曼假說 (Riemann Hypothesis for Function Fields) 是想證明 $\zeta_K(s)$ 的零點都落在直線 $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ 之上。與此等價的是證明 $Z_K(t)$ 的零點都落在圓 $\{t \in \mathbb{C} : |t| = q^{-1/2}\}$ 之上 [22, p.11, p.43], [20, p.14-15]。

8. Castelnuovo-Severi 不等式

Helmut Hasse (1898~1979) 與 Artin 同年, 他們在同一年獲得博士學位 (1921), 他曾就讀於哥廷根大學, 後來離開哥廷根到 Marburg 跟 Kurt Hensel (1861~1941) 學習。1922 年 Hasse 解決 Hilbert 第 11 問題, 他使用的方法 (local-global principle) 正是依賴 Hensel

建立的 p -adic numbers 的理論 (註 10)。

1932 年 11 月 Artin 邀請 Hasse 到漢堡大學演講。Artin 告訴 Hasse 關於函數體的黎曼猜想。Artin 在 1924 年發表他的博士論文之後，從此再也沒有刊登這方面的研究成果，可是他還是留意這領域的進展。

1934 年 Hasse 發現橢圓函數體黎曼猜想的證明。他有兩個證明 [22, p.90]，第一個證明的細節並沒有發表，只是在漢堡大學的期刊宣佈一下而已，第二個證明在 1936 年登出 [22, p.135]。即使如此，許多學者還是很好奇，對於虧格 ≥ 2 的代數曲線，黎曼猜想究竟對不對？

Max Deuring (1907~1984) 是近世代數的開創者 Emmy Noether (1882~1935) 的學生，這時是 Hasse 研究團隊的一員。1936 年 5 月 Deuring 寫給 Hasse 一封信，告訴 Hasse，他正在寫一篇文章可能有助於解決虧格 ≥ 2 的情形。

用現在的觀點來看，Deuring 的方法其實是用代數的方法建造曲線的 Jacobian 多樣體及其自同構環 (endomorphism ring)。但是 Deuring 並沒有完成他的證明，因為他需要在這個自同構環找到一種正定的 Hermitian form [22, p.148]。

André Weil 在這個關鍵時刻適時出現。

Hasse 早在 1934 年 6 月與 Weil 的通信中討論他的構想 (如何處理虧格 ≥ 2 的問題)。Weil 表現出極大的興趣 [22, p.134]。

1936 年 7 月 12 日 Hasse 在出發到挪威奧斯陸參加國際數學家大會前夕，寫給 Weil 一封打字的 8 頁信件 (還附有手寫的許多註記)。在信件中 Hasse 描述哥廷根大學一些人近期的研究成果，其中包含 Deuring 的方法。五天後他回到哥廷根，Weil 的回信 (5 頁) 已經在信箱。Weil 只針對 Deuring 的方法提出他的見解。他告訴 Hasse，Deuring 的方法與義大利代數幾何學家的結果極為類似，它甚至和 1886 年 A. Hurwitz 的論文有關。可是當時的代數幾何是特徵數為零的理論 (並且使用了超越函數!)，而函數體是特徵數為 p 的個體，兩者如何聯繫？

Hasse 在奧斯陸碰見普林斯頓大學的 Solomon Lefschetz (1884~1972)，他們談起 Deuring 的方法。Lefschetz 在離開奧斯陸之前，寫了一封信給 Hasse，告訴他 Deuring 的方法一定隱藏在義大利代數幾何學者 Severi 的某一篇文章之中 [22, p.148-151], [23, p.48]。

義大利的代數幾何學家 Castelnuovo、Enriques、Severi、Rosati 等人，在 20 世紀初期的確完成許多了不起的研究成果。外界的人對於他們的工作卻不太注意。Hasse 因此在 1937 年組織一個會議，試圖瞭解 Severi 的工作。

Hasse 的學習代數幾何之旅並沒有得到預期的效果。他所需要的正定的 Hermitian form，歸結到所謂的 Castelnuovo-Severi 不等式 [22, p.166], [20, p.19], [23, p.48-49]。但是這個正定的形式與不等式都需要重新予以嚴格的證明 [22, p.211]。

Hasse 與 Severi 在 1937~1939 年見過幾次面。他們分別是當時德國與義大利數學界的代表人物 (註 11)。

9. Weil 的兩個證明

André Weil 聲稱他是拒服兵役者 (conscientious objector)。1938 年 9 月下旬第三次的 Bourbaki 大會在 Dieulefit 舉行, Élie Castan 與 Simone Weil 都受邀參加。這時是慕尼黑會議前夕, 戰爭風雲密布。Bourbaki 成員忙著看報紙, 聽收音機廣播。他們都是法國的預備軍官, 只要動員令頒佈, 所有人都要到軍中服役。André Weil 卻自有他的一番盤算。

他向 Delsarte 打個招呼, 就動身前往瑞士。他打定主意不到軍隊報到。在瑞士待了兩天, 情勢緩和下來, 9 月 30 日慕尼黑協定簽訂, 不會有戰爭了, 只是一場虛驚, 他才回去參加 Bourbaki 大會 [31, p.123-124]。

但是戰爭的陰影並沒有完全消除。1939 年 3 月德國併吞捷克, 9 月 1 日德軍入侵波蘭, 9 月 3 日英國與法國向德宣戰。但是德軍與英法聯軍在 1939 年 9 月 ~ 1940 年 4 月並沒有接觸, 沒有發生戰鬥, 這就是所謂的假戰時期 (Phoney War)。

Weil 與他的妻子在 1939 年 6 月 15 日到芬蘭旅遊 (註12)。第二次世界大戰爆發時 (9 月初), 由於身在國外, Weil 當然沒有到軍隊報到。10 月 26 日 Weil 的妻子單獨回到法國, 留下 Weil 一個人在芬蘭繼續旅遊。由於行蹤詭異, Weil 被懷疑是俄國間諜被捕 (11 月 30 日), 他差一點因此被槍斃。12 月 12 日他被驅逐出境。1940 年 2 月 Weil 被解送回法國, 並被移置盧昂 (Rouen) 的軍人監獄 (沒有遵照動員令到軍隊報到)。

就在盧昂的監獄, 他竟然可以好好的整理函數體黎曼猜想的思路, 他寫了一篇文章 (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 210 (1940), 345-347) 宣佈黎曼猜想已獲證明。其實其中有一個 “important lemma” 並沒有給予完整的證明 [22, p.208~209]。

1940 年 5 月 3 日 Weil 被軍事法庭判處 5 年徒刑。他聲請上訴, 法庭同意, 如果他願意以普通士兵的身份入伍服役, 就可免除 5 年徒刑。這時假戰時期已經結束, 德軍大舉進攻英法聯軍, Weil 所屬的部隊迅速崩潰並撤退到英國, 然後他們被轉送到法國南方的維琪政府就地解散 (註13)。由於維琪政府積極配合納粹黨衛軍抓捕猶太人, Weil 全家想盡辦法逃出法國, 1941 年 3 月他們終於到了紐約。

1941 年 Weil 宣佈發現函數體黎曼猜想的第二個證明 (Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 27 (1941), 345-347)。他在 1942 年 7 月 10 日寫了一封信給 Artin, 比較詳盡的描述他第二個證明 [30, p.280-298]。完整的證明出現在 [28]。Weil 顯然認定 Artin 是這個領域的最高權威。

Weil 關於黎曼猜想的第一個證明還是對的, 可是它要花費更大的力氣與更多的時間才講得清楚, 那需要特徵值數 p 的代數幾何。

10. 特徵數 p 的代數幾何

Weil 的書 [27], 《*Foundations of Algebraic Geometry*》, 其實是爲了 Weil 的第一個

證明做準備。

在 [29], Weil 建造任意特徵數的 Jacobian 多樣體, 並把他的第一個關於函數體黎曼猜想的證明方法寫出來。

在 [29], Jacobian 多樣體的建造是透過剪貼 (patching along locally affine sets) 的方法 [23, p.49], 就像微分流形的建造一樣 (locally Euclidean), 但是這不是傳統的代數多樣體的建造方式 (仿射與射影多樣體)。同時在 Weil 寫 [29] 的時候, 他無法證明 Jacobian 多樣體是射影多樣體, 但是它仍然具備射影多樣體一個重要的性質: universal closedness [16, p.100]; 這使得他仍然可以得到 Castelnuovo-Severi 不等式。

Weil 碰到的「困難」影響了 [27] 的寫作方式。[27] 有幾個特點:

1. [27] 的結果在特徵數零與特徵數 p 都成立。之前義大利學者與 van der Waerden 都考慮特徵數零的代數幾何 (它的幾何直觀很容易想像), 但是特徵數 p 的幾何定理如何想像? 這只好歸結到特徵數零的相關敘述, 再採取類比的方式去想像。
2. [27] 的多樣體是抽象多樣體 (abstract varieties [16, p.105]), 它是 locally affine 的多樣體, 而不是傳統的射影多樣體或擬射影多樣體 (quasi projective variety)。這個革命性的定義成為以後新一代的講述代數幾何的典範, 如 Serre 的 FAC, Grothendieck 的 EGA, 都採取 Weil 的方式定義代數多樣體 (locally affine)。
3. 爲了彌補一時還無法證明 Jacobian 多樣體是射影多樣體, [27] 定義完備多樣體 (complete varieties [16, p.105]): 一個抽象多樣體是完備的, 如果它是 universally closed, separated, finite type。
Weil 能夠證明 Jacobian 多樣體是完備多樣體 [29]。引入完備多樣體一方面固然解決 Weil 在第一個證明遭遇到的困難, 它卻引起許多人的疑慮 [34], Zariski 就質問, 完備多樣體與射影多樣體是否等價? 許多諸如此類的問題都陸續解決 (正面的或否定的) [16, p.105]。此後 W. L. Chow (周煒良, 1911~1995) 證明 Weil 所定義的 Jacobian 多樣體的確是射影多樣體 (1949; 1954 論文發表); T. Matsusaka (1926~2006) 證明任意的 abelian variety 都是射影多樣體 (1953), Weil 自己還有一個簡化的證明 (1954; 1957 論文發表)。
4. Weil 聲稱 [27] 的目的是提出多樣體相交 (intersection theory) 的嚴謹的理論。他的確完成這個目標 [26]。至於函數體黎曼猜想的第一个證明就留待 [29] 解決。

尾聲

函數體的黎曼猜想只是代數曲線的問題, 如果 X 是定義在有限體的高維度的射影平滑多樣體, 與代數曲線對應的情況會如何呢? 這就是有名的 Weil 猜想 (Weil conjecture, 1949), 參見 [16, p.449], [20]。它是 1950~1980 年代許多代數幾何學家研究的課題。由此發展出

Grothendieck 與他的追隨者許多美妙深奧的數學, 如 étale cohomology、motives [23]。

第二次世界大戰結束後, 1945 年夏天 Weil 與 Leray 在巴黎碰面, 他們曾有短暫的交談。1947 年 1 月 Weil 寫給 H. Cartan 一封信, 告訴 Cartan 他有一個方法可以重新證明 de Rham 定理, Weil 這篇論文在瑞士的雜誌刊登 (Comment. Math. Helv. 26 (1952), 119-145)。

H. Cartan 當時正在學習 Leray 的 Sheaf theory 與 spectral sequences 的理論。他驚訝的發現 Weil 的方法竟與 Leray 的理論如此相似, 這個巧合只能用英雄所見略同來解釋 [7, p.424]。

後記

本文出現的數學家多半是二十世紀知名的人物, 他們的傳記與研究工作都可以在 [33] 與 [18] 查到。網路的資源難免有一些錯誤, 只要用心比對核實, 不難得出較全面的訊息。以下列出一些 Bourbaki 成員以個人名義寫的書:

- Weil: Basic Number Theory,
- H. Cartan and Eilenberg: Homological Algebra,
- Chevalley: Séminaire C. Chevalley 1956~1958,
- Godement: Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux,
- Samuel and Zariski: Commutative Algebra,
- Dixmier: C^* -Algebras,
- Serre: Galois Cohomology,
- A. Borel: Linear Algebraic Groups,
- E. Artin and Tate: Class Field Theory.

註釋

註1: 巴黎高師 (ENS) 創建於法國大革命期間 (1794), 1830年重建, 包含科學與人文兩個學門, 最有名的系所是: 數學、物理、哲學、歷史。到目前為止, ENS 的校友有 12 人得過 Fields 獎, 8 人得過諾貝爾物理獎, 12 人得過諾貝爾獎。在 1920 年代 ENS 的修業期限是 3 年, 相當於目前一般大學的碩士學位。

註2: Goursat 是法國科學院院士, 他的指導教授是 G. Darboux。Darboux 有幾個有名的學生: C. E. Picard (1877), Goursat (1881), Emile Borel (1893), Élie Cartan (1894)。

Élie Cartan 是 Henri Cartan 的父親。

註3: Eveline de Possel 與 René de Possel 在 1937 年夏天離婚。Eveline 在 1936 年與 André Weil 到西班牙旅行，他們在 1937 年 10 月結婚 [1, p.90-91, p.95], [31, p.112]。

G. Shafer 的文章 “The education of Jean André Ville” 有一段關於 René de Possel 的描述 (p.25)。這篇文章發表在 *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, 5(2009), 1-50。

註4: Julia 在 ENS 唸書期間受徵召入伍參加對德國的戰爭 (第一次世界大戰)。他僥倖沒有死於戰場，卻失去鼻子，終生戴著面具。Julia 是當時老一輩數學家 (如：Picard、G. Humbert、E. Borel) 寄予厚望的接班人。二戰期間他變成親德派。二戰結束後曾被調查七星期之久。可能是通敵罪證不嚴重才被飭回 [3, p.175], [21]。碎形幾何 (fractal geometry) 的 Julia 集就是他與 P. Fatou (1878~1929) 發見的。

註5: 法蘭西學院與一般以講課、授予學位為主的大學不同，它的講座教授只需做公開演講，一般民衆均可自由聽講。在二次大戰前，法蘭西學院有兩個數學的講座教授：Jacques Hadamard (1865~1963) 與 Henri Lebesgue (1875~1941)。Hadamard 以與 C. de La Vallée Poussin 獨立的證明質數定理聞名。Hadamard 在法蘭西學院組織 Hadamard 研討會，其內容涵蓋當時分析各領域的最新進展 [31, p.38-39]。Lebesgue 是 Lebesgue 測度論的創建者。Weil 在 ENS 求學期間，積極參加 Hadamard 研討會。

1938 年 Hadamard 退休，同為 Hadamard 學生的 Weil 與 Mandelbrojt (他們也都是 Bourbaki 成員) 申請 Hadamard 留下來的職位。結果是 Mandelbrojt 勝出，Weil 為此深為不滿 [22, p.194]。

Lebesgue 在二戰期間生病去世，二戰之後為了填補他留下來的空缺，Leray 與 Weil 爭奪這個位置，Leray 的成就一點兒也不比 Weil 差。這次 Weil 再度失利。1979 年 Leray 與 Weil 共同獲頒 Wolf Prize。

註6: Weil 的書 [27] 是代數幾何劃時代的著作。在 [27] 出現之前，代數幾何的書都是以義大利學者 Castelnuovo、Enriques、Severi 或 van der Waerden 的書 (*《Einführung in die algebraische Geometrie》*, 1939) 為主。這些書只討論特徵數為零的情形。Weil 的書大體上使用 van der Waerden 的方法，但是涵蓋特徵數 p 的情形 (尤其在 abelian varieties 的情況)，這就產生許多新的疑慮 [34]。Serre 的論文 FAC (1955) 出現之後，Weil 跟 Cartier 說，看來我的書要過時了 [13, p.31]。

註7: É. Cartan (1869~1951) 出生於法國東南方的鄉村 (Dolomieu)，他的父親是個鐵匠，他有姊妹各一個，還有一個弟弟，他的姐姐後來成為裁縫師傅，他的弟弟繼承父業也當個鐵匠，他

的小妹妹是個高中數學老師, É. Cartan 能走出山村成爲世界聞名的數學大師, 則是他小時候的一段奇遇。

É. Cartan 小時候非常聰明, 記憶力又很好, 他唸書幾乎沒有遭遇什麼困難, 經常是老師還沒有講解完畢, 他就已經全盤瞭解。有一次來了一個督學到他唸書的小學視察, 督學對這個害羞早慧的小孩十分驚奇, 特別交代校長與老師要輔導這個學生參加法國政府提供的獎學金競賽。É. Cartan 不負衆望, 贏得這份獎學金, 得到到一所國立初中唸書, 以後他申請各種獎學金終於完成 ENS 的學業。

他在 ENS 畢業後, 應召服兵役一年, 遇到一個朋友告訴他 Sophus Lie (1842~1899) 研究團隊的現況。Lie 是挪威人, 當時在萊比錫大學任教, 是李羣理論的創立者。Wilhelm Killing (1847~1923) 是柏林大學 Weierstrass 的學生, 他分四次在數學期刊 *Math. Annalen* 刊登他的長文 (1880~1890): 複單李代數的分類。文章登出之後, Lie 與 F. Engel (1861~1941) 發現許多錯誤, 尤其在 exceptional Lie algebras 的部份有許多證明不完整的地方; Engel 也從事這方面的研究。Lie 十分生氣, 吩咐他的學生與博士後不要再看 Killing 這篇文章。

É. Cartan 一時好奇, 把這篇論文找來, 他發現錯誤果然不少, 但是他可以用新的方法補救。因此他完成複單李代數的分類 (the classical types 與 exceptional types), 這就是 É. Cartan 的博士論文 (1894)。

Cartan在黎曼幾何的研究則遲至 1920 年代才全面展開, 見 [10], [32]。

註8: Armand Borel 私下把 Bourbaki 的活動比擬爲另一場法國大革命, 雖是戲謔之語, 卻含至理。Bourbaki 創始成員只是幾個名不見經傳的年輕教師, 竟能把已經成名的 E. Borel、Lebesgue、Denjoy、Montel 等人拉下神壇, 爲當時冷門的抽象代數與拓樸學戴上桂冠, 這跟法國大革命的場景不是十分相似嗎? 注意, P. Montel (1876~1975) 還是 H. Cartan (1928), Dieudonné (1931), Chabauty (1938) 博士論文的指導教授。

註9: Artin 有許多有名的學生, 他在漢堡大學的合作者有 O. Schreier, 學生有 M. Zorn (1930, 有名的 Zorn's Lemma), H. Zassenhaus (1934)。他在 1937 年由於希特勒的反猶政策移居美國, 學生有 D. Gilbarg (1941, 後來從事 PDE 的研究), Shianghaw Wang (王湘浩, 1949), J. Tate (1950), S. Lang (1951), B. Dwork (1954); Tate 與 Lang 都是第三代 Bourbaki 成員。Artin 的書《Galois theory》(1942) 改寫了此後 Galois theory 教學的方式,《Rings with minimum condition》(1948 與 Nesbitt, Thrall 合寫) 的第 9 章嘗試要簡化 R. Brauer 在有限羣的模表示理論,《Geometric Algebra》(1957) 的後半部用幾何方法重新組織線性羣,《Class Field Theory》(1961, 與 Tate 合寫) 則是類體論的權威著作。

Artin 在 1958 年回到漢堡大學。Hel Braun (1914~1986) 是 Siegel 在法蘭克福大學的學生 (1937), 後來他們同居, 但沒有結婚。戰後 Braun 成爲哥廷根大學與漢堡大學的教授。

Artin 回到漢堡大學，與 Braun 同居，也沒有結婚；認識他們的人說，他們的關係與結婚沒有兩樣 (Artin 與原來的妻子 Natasha 在 1959 年離婚) [33]。

註10: 1933 年納粹實施反猶法案，哥廷根大學有 18 個數學家自願或被迫離開。Hermann Weyl (1885~1985) 準備離開德國時 (1933)，德國政府宣佈把 Hasse 從 Marburg 大學調到哥廷根大學。Hasse 不支持反猶政策，但是他具備強烈的民族主義政治立場。1934~1939 年他成爲德國數論與代數學研究的核心人物。1939~1945 年他在哥廷根大學請假，到柏林從事導彈研究。1950 年擔任漢堡大學教授。Hasse 是個傑出的數學家，培養許多優秀的學者，寫了許多書成爲重要的數學文獻，他擔任 *Crelle's Journal* 的編輯達 50 年之久。

註11: 義大利代數幾何的發展在 1890~1920 達到全盛時期。G. Castelnuovo (1865 ~1952)，F. Enriques (1871~1946) 與 F. Severi (1879~1961) 是最有名的三人。他們在代數曲面與雙有理幾何的研究引進許多新的概念與技巧，但是他們宣稱的有些定理卻缺乏嚴謹的證明。

Severi 的主要工作是, Theorem of the Base (Néron -Severi Theorem)、irregularity of algebraic surfaces、algebraic cycles (rational equivalence and intersection theory) [5]。

Severi 早年信仰社會主義，後來變成墨索里尼法西斯政權的支持者。他是一個複雜的人物，見 [14]。

註12: 他們拜訪芬蘭數學家 R. Nevanlinna (1896~1980) 與 L. Ahlfors (1907~1996)。Ahlfors 與 J. Douglas (1897~1865) 共同獲得第一屆 Fields 獎 (1936)。

註13: 1940 年 5 月 10 日德軍大舉進攻法國、荷蘭、比利時，6 月 14 日佔領巴黎，6 月 22 日簽訂停戰協議，法國分成南北兩部份，北部由德軍佔領，南部以維琪 (Vichy) 爲首都成立政府，由一戰的英雄貝當元帥 (H. P. Pétain, 1856~1951) 擔任元首，史稱維琪政府。二戰結束後高齡 89 歲的貝當被判死刑，因其一戰時的戰功減刑爲無期徒刑，被監禁至 1951 年過世爲止。

參考文獻

1. A. D. Aczel, The artist and the mathematician: the story of Nicolas Bourbaki, the genius mathematician who never existed, Thunder's Mouth Press, August 2006
2. M. Atiyah, A review of the books by Mashaal and Aczel, *Notices AMS*, 54 (2007), 1150-1152.
3. M. Audin, Fatou, Julia, Montel, Springer LNM vol. 2014, 2011, Springer, Berlin.
4. L. Beaulieu, A Parisian café and ten Proto-Bourbaki meetings (1934-1935). *The Mathematical Intelligencer*, 15(1993) (1), 27-35.
5. D. Babbitt and J. Goodstein, Guido. Castelnuovo and Francesco Severi: two personalities, two letters, *Notices AMS*, 56 (2009), 2-10.
6. A. Borel, Twenty-five years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973, *Notices AMS*, 45(1998),

- 373-380.
7. A. Borel, André Weil and algebraic topology, *Notices AMS*, 46 (1999), 422-427.
 8. A. Borel, André Weil, *Bulletin AMS*, 46 (2009), 661-666.
 9. H. Cartan, Nicolas Bourbaki and contemporary mathematics, *The Mathematical Intelligencer*, 2(4), 175-180, 1979~80.
 10. S. S. Chern and C. Chevalley, Élie Cartan, *Bull. AMS*, 58 (1952), 217-250.
 11. J. Dieudonné, The work of Niebolas Bourbaki, *Amer. Math. Monthly*, 77 (1970), 134-145.
 12. J. Dieudonné, *A Panorama of Pure Mathematics*, Academic Press, New York, 1982.
 13. J. Fresán, The Castle of Groups: Interview with Pierre Cartier, *EMS Newsletter*, December 2009, 30-33.
 14. J. Goodstein and D. Babbitt, A fresh look at Francesco Severi, *Notices AMS*, 59 (2012), 1064-1075.
 15. D. Guedj, Nicolas Bourbaki, Collective mathematician: an interview with Claude Chevalley, *The Mathematical Intelligencer*, 7(1985) (2), 18-22.
 16. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer GTM vol.52, Springer, 1977, New York.
 17. A. Jackson, Interview with Henri Cartan, *Notices AMS*, 46 (1999), 782-788.
 18. MacTutor History of Mathematics archive, URL:www-mathshistory.st-andrews.ac.uk
 19. B. B. Mandelbrot, Chaos, Bourbaki and Poincare, *The Mathematical Intelligencer*, 11(1989) (3), 10-12.
 20. J. S. Milne, The Riemann hypothesis over finite fields, *ICCM Notices*, 4 (2016) (2), 14-52.
 21. M. Raussen, Interview with Jacques Dixmier, *EMS Newsletter*, 34-40, June 2009.
 22. P. Roquette, The Riemann hypothesis in characteristic p in historical perspective, Springer LNM vol. 2222, 2018, Springer, Berlin.
 23. L. Schneps (editor), Alexandre Grothendieck: a mathematical portrait, International Press, Boston, 2014.
 24. M. Senechal, The continuing silence of Bourbaki: an interview with Pierre Cartier, *The Mathematical Intelligencer*, 20 (1998) (1), 22-28.
 25. J. P. Serre, André Weil, *Biog. Mems. Fell. R. Soc. London*, 45(1999), 519-529.
 26. B. L. Van der Waerden, The foundations of algebraic geometry from Severi to André Weil, *Archive for the History of Exact Sciences*, 7 (1971), 171-180.
 27. A. Weil, *Foundations of algebraic geometry*, AMS, 1946.
 28. A. Weil, *Algebraic curves and the varieties induced by them (French)*, Algebraic Curves and Abelian Varieties, Hermann, 1948.
 29. A. Weil, *Abelian varieties and algebraic curves (French)*, Algebraic Curves and Abelian Varieties, Hermann, 1948.
 30. A. Weil, *Collected papers: vol. 1*, Springer, 1980, Berlin.
 31. A. Weil, *The Apprenticeship of a Mathematician*, Birkhäuser, Berlin, 1992.
 32. J. H. C. Whitehead, Élie Cartan, *Notices Roy. Soc. London*, 8 (1952), 71-95.
 33. Wikipedia, available via Google.
 34. O. Zariski, Book review of “*Foundations of Algebraic Geometry*”, *Bull. AMS*, 7(1948), 671-675.