數學傳播 44卷3期, pp. 94-104

二維含參型一元三次函數極值點的最值

史立新

[1]、[2] 都涉及到對 2009 年中國大陸卷 I (理) 22 題第 (II) 小題的研究與評論, 讓我們來重溫該試題:

設函數 $f(x)=x^3+3bx^2+3cx$ 有兩個極值點 x_1, x_2, 且 $x_1\in[-1,0]$, $x_2\in[1,2]$,

(I) 求 b、c 滿足的約束條件, 並在下面的座標平面內, 畫出滿足這些條件的點 (b,c) 的區域;

(II) 證明: $-10\le f(x_2)\le -\dfrac{1}{2}$。

對於第 (I) 小題, 標準答案給出的 b、c 滿足的約束條件爲

$$\begin{cases} c\ge 2b-1 \\ c\le 0 \\ c\le -2b-1 \\ c\ge -4b-4 \end{cases}$$

滿足這些約束條件的點 (b,c) 的集合爲下圖陰影部分的平面區域 (包括全部邊界)。

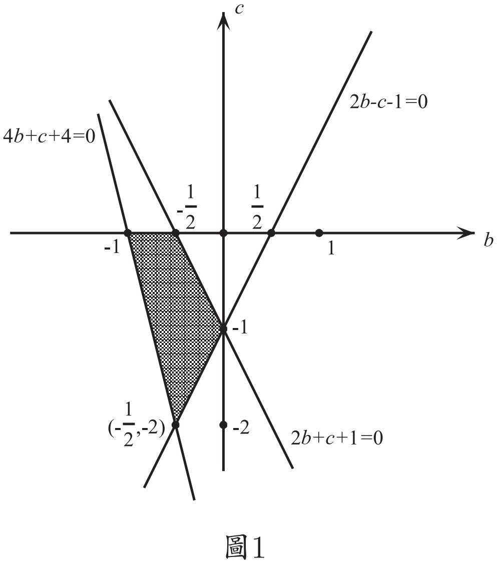


圖1

對於第 (II) 小題, 國家考試中心給出的標準答案如下:

由題設知 $f'(x_2)=3x_2^2+6bx_2+3c=0$, 故 $bx_2=-\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}c$, 於是 $f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2=-\frac{1}{2}x_2^3+\frac{3c}{2}x_2$。

由於 $x_2\in[1,2]$, 而由 (I) 知 $c\le 0$, 故

$$-4+3c\le f(x_2)\le -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}c,$$

又由 (I) 知 $-2\le c\le 0$, 所以 $-10\le f(x_2)\le -\frac{1}{2}$。

如果將「標準答案」稱爲「消 b 證法」, 那麼 [1] 給出的完全模仿「標準答案」、並且比「標準答案」更清晰的證法應叫「消 c 證法」:

「另解　由 $f'(x_2)=3x_2^2+6bx_2+3c=0$ 得 $3c=-3x_2^2-6bx_2$,

$\therefore 3cx_2=-3x_2^3-6bx_2^2$ 代入 $f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2$ 中

得 $f(x_2)=-2x_2^3-3bx_2^2$.

令 $g(x_2)=-2x_2^3-3bx_2^2$, 由 $x_2\in[1,2]$, $-1\le b\le 0$,

知 $g'(x_2)=-6x_2^2(x_2+b)\le 0$, 所以 $g(x_2)$ 在 $[1,2]$ 上單調遞減, 得

$-16-12b=f(2)\le f(x_2)\le f(1)=-2-3b$.

又 $b\in[-1,0]$, 且 $-16-2b$, $-2-3b$ 均遞減,

$-16=-16-12\times 0\le f(x_2)\le -2-3(-1)=1$ 竟然得不出

$-10\le f(x_2)\le -\frac{1}{2}$, 而且擴大了其範圍。」

按理說, 由於在這個數學問題中, 參變數 b 與 c 都具有獨立的對等地位, 只要「標準答案」的證明理論科學正確, 那麼無論採用「消 b 證法」還是採用「消 c 證法」, 得出的結果就應當完全相同。究竟是什麼原因導致「消 b 消 c 結果不一致」的呢? 這是筆者多年來長期思考、潛心探索的研究課題。

筆者查閱了[日] 笹部貞市郎編著的幾部數學大辭典, 從中搜集了近百道這種含有兩個獨立參變數的平面區域題型試題, 均沒有發現與該試題第 (II) 小題類同的範例. 所以筆者猜想該試題的第 (II) 小題 —「求證 $-10\le f(x_2)\le -\frac{1}{2}$」, 很可能是命題專家現場創新發明出來的。這道試題經筆者多種方法驗證, 它是一道正確無誤的命題, 也就是說, 試題本身沒有任何問題。

既然試題本身沒有問題, 那麼就要研究「標準答案」的證明理論是否科學正確? 如果「標準答案」的證明理論不可靠, 那我們又怎樣才能驗證它的不可靠性呢? 直覺告訴我, 最好的方法是尋找反例。可是國內外都沒有這種現成的試題可作反例, 於是筆者只能想辦法去改編試題,

使其滿足與 (09) 國家卷壓軸題類同, 並且不管你採用「消 b 證法」還是採用「消 c 證法」, 都無法證明到待證不等式, 最後推證結果都擴大了原函數在極值點處的取值範圍。這樣就能證明「標準答案」的證明理論是錯誤的。筆者花了較長的時間去尋找反例, 最終這個反例是由 [日]《代數學辭典》(上), p.314 第 1413 題改編而成, 它與 2009 年國家卷高考題有驚人的相似。其試題表述如下:

設函數 $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{2}bx^2+(2b-c+1)x$ 有兩個極值點 x_1,x_2, 且 $x_1\in[-1,0]$, $x_2\in[1,2]$,

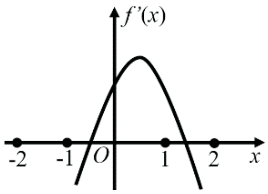
(1) 求點 (b,c) 的存在範圍;

(2) 求證: $\dfrac{1}{6}\le f(x_2)\le\dfrac{10}{3}$。

解: (1) $\because x_1,x_2$ 是函數 $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{2}bx^2+(2b-c+1)x$ 的極值點,

又 $\because f'(x)=-x^2+bx+2b-c+1$, 且 $x_1\in[-1,0]$, $x_2\in[1,2]$

$$\therefore\quad \begin{cases} f'(-1)\le 0\\ f'(0)\ge 0\\ f'(1)\ge 0\\ f'(2)\le 0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} c\ge b\\ c\le 2b+1\\ c\le 3b\\ c\ge 4b-3\end{cases}.$$



$\therefore$ 滿足題設條件的點 (b,c) 的存在範圍爲圖 2 中陰影部分的平面區域 (包括全部邊界)

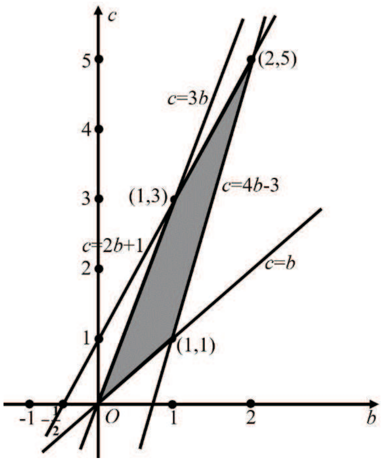


圖2

(2) 我們先來模仿「標準答案」給出類似的「消 b 證法」與「消 c 證法」。(正確的證明方法由後文給出)

證法一:「消 b 證法」:

由 $-x_2^2+bx_2+2b-c+1=0$, 得 $b=\dfrac{x_2^2+c-1}{x_2+2}$,

$$\begin{aligned}
f(x_2)&=-\frac{1}{3}x_2^3+\frac{1}{2}bx_2^2+(2b-c+1)x_2\\
&=-\frac{1}{3}x_2^3+\frac{x_2^2+c-1}{x_2+2}\left(\frac{x_2^2+4x_2}{2}\right)+(1-c)x_2\\
&=\frac{-2x_2^3(x_2+2)+3(x_2^2+c-1)(x_2^2+4x_2)+6(1-c)x_2(x_2+2)}{6(x_2+2)}\\
&=\frac{x_2^4+8x_2^3+3(1-c)x_2^2}{6(x_2+2)}.
\end{aligned}$$

由 (I) 知, $0\le c\le 5$, 故有

$$\frac{x_2^4+8x_2^3-12x_2^2}{6(x_2+2)}\le f(x_2)\le\frac{x_2^4+8x_2^3+3x_2^2}{6(x_2+2)},$$

令 $g(x_2)=\dfrac{x_2^4+8x_2^3+3x_2^2}{6(x_2+2)}$,　則 $g'(x_2)>0$, $\therefore g(x_2)$ 在 $[1,2]$ 上單調遞增,

令 $h(x_2)=\dfrac{x_2^4+8x_2^3-12x_2^2}{6(x_2+2)}$, 則 $h'(x_2)>0$, $\therefore h(x_2)$ 在 $[1,2]$ 上單調遞增,

$\therefore h(1)\le f(x_2)\le g(2)\quad \therefore -\dfrac{1}{6}\le f(x_2)\le\dfrac{23}{6}$.

由此可知,「消 b 證法」無法證明到待證不等式 $\dfrac{1}{6}\le f(x_2)\le\dfrac{10}{3}$, 最後擴大了 $f(x_2)$ 的取值範圍。

證法二:「消 c 證法」:

由 $-x_2^2+bx_2+2b-c+1=0$, 得 $-c=x_2^2-bx_2-2b-1$, 代入

$$f(x_2)=-\frac{1}{3}x_2^3+\frac{1}{2}bx_2^2+(2b-c+1)x_2\quad 得$$

$$\begin{aligned}
f(x_2)&=-\frac{1}{3}x_2^3+\frac{1}{2}bx_2^2+(2b+x_2^2-bx_2-2b-1+1)x_2\\
&=-\frac{1}{3}x_2^3+\frac{1}{2}bx_2^2+2bx_2+x_2^3-bx_2^2-2bx_2=\frac{2}{3}x_2^3-\frac{1}{2}bx_2^2.
\end{aligned}$$

$\because 0 \le b \le 2$,

$\therefore \dfrac{2}{3}x_2^3 - x_2^2 \le f(x_2) \le \dfrac{2}{3}x_2^3$,

又 $\because x_2 \in [1,2]$,

$\dfrac{2}{3}x_2^3$ 在 $[1,2]$ 上爲增函數, $\dfrac{2}{3}x_2^3 - x_2^2$ 在 $[1,2]$ 上爲增函數,

$\therefore -\dfrac{1}{3} \le f(x_2) \le \dfrac{16}{3}$.

由此可知,「消 c 證法」也無法證明到待證不等式 $\dfrac{1}{6} \le f(x_2) \le \dfrac{10}{3}$, 最後也擴大了 $f(x_2)$ 的取值範圍。

衆所周知, 2009年全國卷 I (理) 第 22 題中, 函數 $f(x) = x^3 + 3bx^2 + 3cx$ 是含有兩個獨立參變數 b 與 c 的一元三次函數, 筆者稱其爲二維含參型一元三次函數; x_2是它的一個極值點, $f(x_2)$ 是 $f(x)$ 在極值點 x_2 處的函數值, 要證明 $-10 \le f(x_2) \le -\dfrac{1}{2}$, 只要證明關於 b、c 的一次函數 $g(b,c) = (3x_2^2)\cdot b + (3x_2)\cdot c + x_2^3$ (視 x_2 爲參數, 且 $x_2 \in [1,2]$), 在陰影部分的平面區域上的最大值爲 $-\dfrac{1}{2}$, 最小值爲 -10, 問題就迎刃而解了。所以第 (II) 小題是屬於二維含參型一元三次函數在極值點處的最值問題, 其陰影部分的平面區域就是該二元一次函數的定義域。由於定義域是凸四邊形平面區域, 故要求該二元一次函數在定義域上的最值, 屬線性規劃問題, 但是它比常規的線性規劃問題要複雜多了, 因爲其目標函數中還含有一個參數 $x_2 \in [1,2]$, 由於我們高中數學中沒有學過多元函數的極值知識, 而該題又是高中畢業生的高考題, 所以考生只能選擇用線性規劃方法求目標函數的最值。

「實踐是檢驗真理的唯一標準」, 筆者給出的反例說明,「標準答案」的證明理論是經不起實踐檢驗的, 本文就要研究「標準答案」中的幾處理論性錯誤, 並且給出它的一般證明方法, 不妥之處, 請同仁指正。

1.「消 b」謀略既不科學也不可能實現

「標準答案」的第一步就是企圖「消 b」, 即由 $f'(x_2) = 3x_2^2 + 6bx_2 + 3c = 0$ 解出 $bx_2 = -\dfrac{1}{2}x_2^2 - \dfrac{1}{2}c$, 再代入 $f(x_2) = x_2^3 + 3bx_2^2 + 3cx_2$ 中, 得

$$f(x_2) = -\frac{1}{2}x_2^3 + \frac{3c}{2}x_2. \qquad (*)$$

從形式上看, $(*)$ 式中似乎看不到參變數 b, 好像消去了參變數 b。但是我們必須先弄清楚以下兩個問題: (1) 爲什麼要去「消 b」? (2) 僅僅依據 $x_2^2 + 2bx_2 + c = 0$ 真的能「消 b」嗎?

我們知道, 在這個數學問題中, 僅僅依據題設條件, 兩個參變數 b 與 c 中任一個也不能單獨消去, b 與 c 都是獨立參變數, 而滿足題設條件的四個約束條件中都有 b 與 c, 它們確定了滿

足四個約束條件的二維點 的存在範圍, 即陰影部分的平面區域。而這個陰影部分的平面區域正是二元一次函數 $g(b,c)=(3x_2^2)\cdot b+(3x_2)\cdot c+x_2^3$ 的定義域, 這樣我們一方面去「消 b」, 另一方面又要依據滿足題設條件的二維點 (b,c) 的集合去求最值, 這不是自相矛盾嗎? 再說, 二維點 (b,c) 是不可分割的整體, 消去 b, 點 (b,c) 也就不復存在了, 又如何去依據點 (b,c) 的存在範圍去求最值呢?

由於該試題是二維含參平面區域題型, 我們根本不可能消去一個參變數, 保留另一個參變數使其變成一維含參的數學問題, 也就是說兩個參變數任何一個都不可能單獨消去, 明知不可爲而爲之, 還具有科學性嗎?

其次, 僅僅依據 $x_2^2+2bx_2+c=0$ 真的能消去參變數 b 嗎? 其實這個式子是表達定義域中任一點 (b,c) 與另一變數 $x_2\in[1,2]$ 之間的一種制約關係, 也就是說, 對於陰影部分平面區域中任一點 (b,c), 在區間 $[1,2]$ 中存在唯一點 x_2 與其匹配, 使 $x_2^2+2bx_2+c=0$ 成立。根據這個式子, 其中任一變數均可以用含有另外兩個變數的代數式表示, 其中 $x_2=-b+\sqrt{b^2-c}$, $b=-\frac{1}{2}x_2-\frac{c}{2x_2}$, $c=-x_2^2-2bx_2$, 所以儘管 $f(x_2)=-\frac{1}{2}x_2^3+\frac{3c}{2}x_2$ 中看不到 b 的「身影」, 但是由於 x_2 中及 c 中本身均含有 b, 只不過 b 隱身在 x_2 中和 c 中罷了, 所以 $f(x_2)=-\frac{1}{2}x_2^3+\frac{3c}{2}x_2$ 中仍然含有 b, 並不能徹底消去 b 而使其變爲只含一個參變數 c 的數學問題。由於中國大陸的數學教師不熟悉此類二維含參平面區域題型, 所以看到二個參變數就按常規思維, 設法消去一個, 保留另一個使原問題變成只含一個參變數的數學問題, 殊不知此法不適用於二維含參平面區域題型, 所以, 消 b 實際上是不可能完成的任務。

2.「由 (I) 知 $c\le 0$」與「由 (I) 知 $-2\le c\le 0$」, 擴大了目標函數的定義域

在標準答案中, 用到「由 (I) 知 $c\le 0$」與「由 (I) 知 $-2\le c\le 0$」的條件,「(I)」是什麼? (I) 就是滿足題設條件的二維點 (b,c) 的集合, 即爲陰影部分的平面區域, 在參變數直角坐標平面 bOc 中,「$c\le 0$」表示 b 軸及其下方的平面區域,「$-2\le c\le 0$」表示兩平行直線 $c=-2$ 與 $c=0$ 所夾的平面區域, 他們都比陰影部分的平面區域大許多許多, 陰影部分的平面區域都只是它們的子區域。「標準答案」實際上用「$c\le 0$」或「$-2\le c\le 0$」來替代陰影部分的平面區域, 相當於擴大了目標函數 $g(b,c)=(3x_2^2)\cdot b+(3x_2)\cdot c+x_2^3$ 的定義域, 目標函數在擴大了的定義域上就存在擴大取值範圍的風險。所以不管是「消 b 證法」還是「消 c 證法」都存在擴大目標函數取值範圍的風險。事實上, 無論是用「$-2\le c\le 0$」, 還是用「$-1\le b\le 0$」替代陰影部分的平面區域, 都擴大了目標函數的定義域。

3. 二維思維模式才是解答此類題型的正道

不論是「消 b 證法」還是「消 c 證法」, 它們都是一維的思維模式, 都是消去一個參變數、

保留另一個參變數使其變爲一維含參的數學問題. 由於此類二維含參平面區域題型不可能單獨消去其中某個參變數, 所以無論是「消 b 證法」還是「消 c 證法」在理論上都是錯誤的。事實上, 定義域是二維的, 目標函數也是二維的, 我們怎麼可能用一維的思維模式去解題呢? 只要細心考察陰影部分的平面區域, 通常只用一個變數值, 都無法確定另一個變數值的。如 $b=-\dfrac{1}{2}$ 時, c 可取 $[-2,0]$ 中的無窮多個值; 如 $c=-1$ 時, b 可取 $[-\dfrac{3}{4},0]$ 中的無窮多個值, 也就是說只用一個變數值, 都無法確定點 (b,c) 的位置。只有 b、c 兩個變數值確定以後, 才能確定點 (b,c) 的位置, 從而才能依據 $x_2^2+2bx_2+c=0$ 來確定 x_2 的值 $(x_2\in[1,2])$, 只有當點 (b,c) 確定、x_2 的值確定後我們才能求出目標函數的函數值。這就是必須用二維的思維模式才能解答此類二維含參平面區域題型的理由。就是用高等數學多元函數的極值理論去解答此類問題時, 也是二維的思維模式, 也要先後對目標函數關於 b 求偏導數、關於 c 求偏導數, 再求出定義域中的駐點, 再考察駐點情況及相關情況後才能確定最值。

「消 b 證法」即「標準答案」運氣好, 恰好沒有擴大 $f(x_2)$ 的取值範圍; 而「消 c 證法」運氣不好, 擴大了 $f(x_2)$ 的取值範圍, 也不能說明「消 b 證法」就是正確的, 因爲數學論證與運氣好壞無關。只能說明「消 c 證法」挑戰了「消 b 證法」, 只能說明「消 b 證法」的證明理論不可靠, 而「消 c 證法」恰是「消 b 證法」的一個反例。所以 [2] 對 [1] 的評論:「'標準答案'的流暢、自然, 與其說是運氣好, 毋寧說是遭遇了如「另解」遇到的尷尬」, 此說確實有點耐人尋味, 數學論證運氣最好也不一定是完全正確的;「標準答案」之所以會遭遇到「另解」的尷尬, 完全是因爲「標準答案」本身的證明理論出了問題。此類數學問題, 凡是用一維思維模式去論證的, 不管運氣好壞, 都應一票否決, 任何「特殊解法」都必須解題理論正確, 解題理論不可靠的任何解法, 都叫錯誤解法, 都沒有資格稱爲「特殊解法」。

4. 二種二維思維模式的證明方法

由於高中數學沒有學過多元函數的極值知識, 所以高考考生只能用線性規劃知識解答該題, 而線性規劃方法正是二維的思維模式。

證法一: 先將一元三次函數在極值點 x_2 處的最值問題轉化爲在極值點 x_2 處的二次函數的最值問題, 然後再用線性規劃方法解答:

$\because\quad f(x)=x^3+3bx^2+3cx$, x_2 是它的一個極值點,

$$\therefore f'(x_2)=3x_2^2+6bx_2+3c=0,$$

$$\therefore x_2^2+2bx_2+c=0.$$

兩邊同乘以 x_2 得 $x_2^3+2bx_2^2+cx_2=0$,

$$\therefore\ f(x_2)=x_2^3+3bx_2^2+3cx_2-(x_2^3+2bx_2^2+cx_2)=bx_2^2+2cx_2\quad(x_2\in[1,2]).$$

當 $b \neq 0$ 時, 依據陰影部分的平面區域知 $\dfrac{c}{b} \geq 0$:

$\therefore$ 二次函數 $bx_2^2 + 2cx_2$ 的對稱軸 $x_2 = -\dfrac{c}{b} \leq 0$,

又 $\because b < 0$ 拋物線的開口向下, 由其單調性可知,

$$4b + 4c = f(2) \leq f(x_2) \leq f(1) = b + 2c.$$

由線性規劃知識知 $b + 2c$ 在陰影部分平面區域上的最大值爲 $-\dfrac{1}{2}$, (直線過頂點 $(-\dfrac{1}{2}, 0)$ 取得), $4b + 4c$ 在陰影部分平面區域上的最小值爲 -10 (直線過點 $(-\dfrac{1}{2}, -2)$ 取得)

$\therefore b \neq 0$ 時, $-10 \leq f(x_2) \leq -\dfrac{1}{2}$.

特別地, 當 $b = 0$ 時, 對應的陰影部分平面區域中只有一個點 $(0, -1)$, 即 $b = 0$ 時, $c = -1$, 此時 $f(x_2) = -2x_2$, 由 $x_2 \in [1, 2]$ 知,

$-4 \leq f(x_2) \leq -2$.

顯然它滿足 $-10 \leq f(x_2) \leq -\dfrac{1}{2}$, 綜上, $-10 \leq f(x_2) \leq -\dfrac{1}{2}$。 (證畢)

證法二: 利用二元一次函數在凸多邊形平面區域上的最值定理證明。

定理: 若點 $P(x, y)$ 在某凸多邊形 D 的邊界或內部運動, 則 x, y 的一次函數 $f(x, y) = ax + by + c$ 在 D 的頂點取得最大值與最小值 (《代數學辭典》(上), p.722, 第 2889 題)。

將 $f(x_2) = x_2^3 + 3bx_2^2 + 3cx_2$ 視爲關於 b, c 的二元一次函數, 所以它的最大值與最小值必在陰影部分凸四邊形的四個頂點 $(-\dfrac{1}{2}, 0)$、$(-1, 0)$、$(-\dfrac{1}{2}, -2)$、$(0, -1)$ 中取得。

當 $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = 0$ 時, 由 $x_2^2 + 2bx_2 + c = 0$ 得 $x_2^2 - x_2 = 0$ $\quad \therefore x_2 = 1$ ($\because x_2 \in [1, 2]$),

$$\therefore\ f(x_2) = f(1) = 1^3 + 3 \times (-\frac{1}{2}) \times 1^2 + 3 \times 0 \times 1 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

當 $b = -1$, $c = 0$ 時, 由 $x_2^2 + 2bx_2 + c = 0$ 得 $x_2^2 - 2x_2 = 0$ $\quad \therefore x_2 = 2$ ($\because x_2 \in [1, 2]$),

$$\therefore\ f(x_2) = f(2) = 2^3 + 3 \times (-1) \times 2^2 + 3 \times 0 \times 2 = 8 - 12 = -4.$$

當 $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = -2$ 時, 由 $x_2^2 + 2bx_2 + c = 0$ 得 $x_2^2 - x_2 - 2 = 0$ $\quad \therefore x_2 = 2$,

$$\therefore\ f(x_2) = f(2) = 2^3 + 3 \times (-\frac{1}{2}) \times 2^2 + 3 \times (-2) \times 2 = -10.$$

當 $b=0$, $c=-1$ 時, 由 $x_2^2+2bx_2+c=0$ 得 $x_2^2-1=0$ $\quad\therefore x_2=1$ $(\because x_2\in[1,2])$,

$\therefore\ f(x_2)=f(1)=1^3+3\times 0\times 1^2+3\times(-1)\times 1 \quad \therefore\ f(x_2)=f(1)=1-3=-2$,

$\therefore\ [f(x_2)]_{\max}=-\dfrac{1}{2}, \quad [f(x_2)]_{\min}=-10$,

$\therefore\ -10\le f(x_2)\le -\dfrac{1}{2}$. (證畢)

類似地, 也可以求出另一個極值點 x_1 處 $f(x_1)$ 的最值, 這裡只給出結果: $0\le f(x_1)\le 3.5$ (感興趣的讀者可自行完成)

最後按上面兩種證明方法對筆者提出的反例第(II) 小題加以證明:

證法 1: $\because\ f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}bx^2+(2b-c+1)x$,

$\therefore\ f'(x)=-x^2+bx+2b-c+1$,

$\therefore\ f'(x_2)=-x_2^2+bx_2+2b-c+1=0$.

兩邊同乘以 $\dfrac{1}{3}x_2$, 得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{3}x_2^3+\frac{1}{3}bx_2^2+\frac{1}{3}(2b-c+1)x_2=0,\\
&\therefore\ f(x_2)=-\frac{1}{3}x_2^3+\frac{1}{2}bx_2^2+(2b-c+1)x_2\\
&-\Big[-\frac{1}{3}x_2^3+\frac{1}{3}bx_2^2+\frac{1}{3}(2b-c+1)x_2\Big],\\
&\therefore\ f(x_2)=\frac{1}{6}bx_2^2+\frac{2}{3}(2b-c+1)x_2,
\end{aligned}
$$

當 $b>0$ 時, 對稱軸

$$x_2=\frac{-\frac{2}{3}(2b-c+1)}{2\times\frac{1}{6}b}=-4+\frac{2c}{b}-\frac{2}{b}.$$

由圖 2 可知, $1\le\dfrac{c}{b}\le 3$, $\therefore 2\le\dfrac{2c}{b}\le 6$,

又 $b\in(0,2]$, $\therefore\ \dfrac{2}{b}\ge 1$,

$\therefore -4+\dfrac{2c}{b}-\dfrac{2}{b}\le 1$,

即對稱軸 $x_2\le 1$, 拋物線開口向上,

$\therefore$ 在區間 $[1,2]$ 上, $f(x_2)$ 單調增加, 從而有 $\therefore f(1)\le f(x_2)\le f(2)$

即 $\dfrac{3}{2}b-\dfrac{2}{3}c+\dfrac{2}{3}\le f(x_2)\le\dfrac{10}{3}b-\dfrac{4}{3}c+\dfrac{4}{3}$.

令 $M=\frac{10}{3}b-\frac{4}{3}c+\frac{4}{3}$,　$\therefore c=\frac{5}{2}b+1-\frac{3}{4}M.$

當直線過 $(1,1)$ 點時, $M_{\max}=\frac{10}{3}$,　令 $N=\frac{3}{2}b-\frac{2}{3}c+\frac{2}{3}$,　$\therefore c=\frac{9}{4}b+1-\frac{3}{2}N.$

當直線過 $(1,3)$ 點時, $N_{\min}=\frac{1}{6}$,　$\therefore \frac{1}{6}\le f(x_2)\le\frac{10}{3}.$

當 $b=0$ 時, $c=0$, $\therefore f(x_2)=\frac{2}{3}x_2$, 它在 $[1,2]$ 上爲增函數,

$\therefore f(1)\le f(x_2)\le f(2)$,　即 $\frac{2}{3}\le f(x_2)\le\frac{4}{3}$,　綜上,　$\frac{1}{6}\le f(x_2)\le\frac{10}{3}$。

證明二: 利用最值定理求解

證明: 由圖 2 知, 陰影部分的平面區域爲凸四邊形, 其頂點有四個: $(0,0)$、$(1,3)$、$(2,5)$、$(1,1)$.
在點 $(0,0)$ 處, 由 $-x_2^2+bx_2+2b-c+1=0$, 得 $x_2^2-1=0$

$\therefore x_2=1$ ($\because x_2\in[1,2]$),

$\therefore f(x_2)=f(1)=-\frac{1}{3}\times1^3+\frac{1}{2}\times0\times1^2+(2\times0-0+1)\times1=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}.$

在點 $(1,3)$ 處, 由 $-x_2^2+bx_2+2b-c+1=0$ 得 $x_2^2-x_2=0$ $\therefore x_2=1$ ($\because x_2\in[1,2]$)

$\therefore f(x_2)=f(1)=-\frac{1}{3}\times1^3+\frac{1}{2}\times1\times1^2+(2\times1-3+1)\times1=\frac{1}{6}.$

在點 $(2,5)$ 處, 由 $-x_2^2+bx_2+2b-c+1=0$, 得 $x_2^2-2x_2=0$,

$\therefore x_2=2$ ($\because x_2\in[1,2]$).

$\therefore f(x_2)=f(2)=-\frac{1}{3}\times2^3+\frac{1}{2}\times2\times2^2+(2\times2-5+1)\times2=-\frac{8}{3}+4+0=\frac{4}{3}.$

在點 $(1,1)$ 處, 由 $-x_2^2+bx_2+2b-c+1=0$ 得

$x_2^2-x_2-2=0$　$\therefore x_2=2$ ($\because x_2\in[1,2]$).

$\therefore f(x_2)=f(2)=-\frac{1}{3}\times2^3+\frac{1}{2}\times1\times2^2+(2\times1-1+1)\times2=-\frac{8}{3}+2+4=\frac{10}{3}.$

$\therefore [f(x_2)]_{\max}=\frac{10}{3}$,　$[f(x_2)]_{\min}=\frac{1}{6}$,　$\therefore$　$\frac{1}{6}\le f(x_2)\le\frac{10}{3}.$　(證畢)

5. 結語

數學解題, 其指導解題的理論科學正確是最最重要的. 經不起實踐檢驗的任何解題方法, 都是錯誤的, 即使是運氣最好的證明方法, 也只能屬於無效的錯誤證明。2009 年中國大陸卷 (I) (理) 第 22 題第 (II) 小題的「標準答案」就是一種無效的錯誤證明。

參考文獻

1. 李志剛。消 b 消 c 結果不一致, 何去何從。數學通報, 2010.8, 41-42。
2. 夏長海。爭鳴無禁區, 探索無止境。數學通報, 2012.1, 55-56。
3. 史立新, 周公賢。含有兩個參變數的平面區域題型的研究與評論。數學通訊, 2016.3, 37-40。
4. [日] 笹部貞市郎編。蔣聲等譯《代數學辭典》(上)。上海教育出版社, 1982。

—本文作者現任職中國無錫華羅庚研究會—