數學傳播 44卷3期, pp. 87-93

# 有理角的三角函數哪些是無理數?

黃 越

在中學數學課程裡, 一門課程裡所接觸到的問題在另一門課程裡往往完全被忽視掉, 因而數學知識就沒有了整體性。在代數裡, 我們談到有理數與無理數的問題, 然而在三角函數裡, 儘管經常和大量的三角函數值打交道, 它們的算術性質— 是有理數呢? 還是無理數? 就很少有人關注。和中學生打交道的大多都是有理數, 然而在數學的世界裡無理數是要比有理數多得多的。在中學, 所認識的除了 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$ 等開根號類型的無理數以及 $e, \pi$ 以外, 就只知道一些「人工製造」的無理數, 如 $0.12345678910111213141516\cdots$。

表 1: 一些特殊角的三角函數值

| 角度 | $0$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | $0$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | $1$ |
| cos | $1$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | $0$ |
| tan | $0$ | $2-\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}-1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{3}$ | $\infty$ |
| cot | $\infty$ | $2+\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}+1$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $2-\sqrt{3}$ | $0$ |
| sec | $1$ | $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ | $\infty$ |
| csc | $\infty$ | $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ | $2$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ | $1$ |

先要說的是, 一般而言, 要去驗證一個三角函數值是有理數還是無理數是有難度的, 先來看下面兩例。

**例** 1: 證明: $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ 是一個無理數。

**證明**: 考慮 5 次單位根 $\cos\dfrac{2\pi}{5}k+i\sin\dfrac{2\pi}{5}k$ $(k=1,2,3,4,5)$, 記

$$x_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}, x_2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5},$$

於是

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^5-1}{x-1}=(x-x_1)(x-\bar{x_1})(x-x_2)(x-\bar{x_2}),$$

即

$$\frac{x^5-1}{x-1}=\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{5}+1\right),$$

可是分圓多項式 $x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^5-1}{x-1}\in\mathbb{Q}[x]$ 是不可約的, 命 $x=y+1$, 則有

$$\frac{x^5-1}{x-1}=\frac{1}{y}\left[(y+1)^5-1\right]=y^4+\binom{5}{1}y^3+\binom{5}{2}y^2+\binom{5}{3}y+5,$$

取 $p=5$, 再由 Eisentein 判別法知作爲 $y$ 的多項式在 $\mathbb{Q}[x]$ 上是不可約的, 所以作爲 $x$ 的多項式在 $\mathbb{Q}[x]$ 上是不可約的。

但現在 $\dfrac{x^5-1}{x-1}=\left(x^2-2\cos\dfrac{2\pi}{5}+1\right)\left(x^2-2\cos\dfrac{4\pi}{5}+1\right)$, 因而 $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ 不可能爲有理數。

想法是華東師範大學數學科學學院劉治國教授的。

還可以通過直接求出 $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ 來證明, 多項式 $x^5-1\in\mathbb{C}[x]$ 有五個根, 分別爲

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\ (k=0,1,2,3,4)$$

由韋達公式知道這些根的和爲 0, 所以這個和的實部是 0, 即

$$2\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+1=0,$$

命 $\cos\dfrac{2}{5}\pi=y$, 則 $\cos\dfrac{4\pi}{5}=2y^2-1$, 從而

$$4y^2+2y-1=0,$$

於是

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

用類似的方法可以證明 $\cos\dfrac{2\pi}{7}$ 也是個無理數。

**例**2 (2014**年北約自主招生數學試題**): 證明: $\tan 3^\circ$ 是無理數。

**證明**: 反證法, 假設 $\tan 3^\circ$ 是有理數, 則

$$\tan 6^\circ=\frac{2\tan 3^\circ}{1-\tan^2 3^\circ}\in\mathbb{Q},$$

進而 $\tan 12°, \tan 24° \in \mathbb{Q}$, 所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30° = \tan(6° + 24°) \in \mathbb{Q}$, 矛盾了。(由兩角和的正切公式知, 若 $\tan\alpha$ 爲有理數, 則 $\tan n\alpha$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ 爲有理數)

也可以通過直接求出 $\tan 3°$ 的方法。因

$$\cos 18° = \sin 72° = 2\sin 36° \cos 36° = 4\sin 18° \cos 18°(1 - 2\sin^2 18°),$$

所以

$$8\sin^3 18° - 4\sin 18° + 1 = (2\sin 18° - 1)(4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1) = 0,$$

解得 $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, 進而 $\tan 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$。

又因爲

$$\tan 15° = \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \tan 45°} = 2 - \sqrt{3},$$

所以

$$\tan 3° = \tan(18° - 15°) = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - (2-\sqrt{3})}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \cdot (2-\sqrt{3})},$$

顯然爲無理數。

同理, 還可以驗證 $\tan 1°$ 也是個無理數。

其實在這裡還可以將問題更一般化, 到底哪些有理角的三角函數是無理數? 解決這一問題只需要用上簡單的複數知識與線性代數多項式的內容, 並不需要太高深的知識。

凡形如 $\dfrac{m}{n}\pi$(其中$(m,n)=1$) 的角就叫做「有理角」。由此可知普通三角函數表上以若干度若干分若干秒表示的角全屬有理角。關於有理角的三角函數其數值的算術性質我們可得下面的一個結論:

> 有理角的正餘弦值除了 $0, \pm\dfrac{1}{2}$ 及 $\pm 1$ 之外全部都是無理數, 有理角的正切值除了 $0, \pm 1$ 之外全部都是無理數。

由 de Moivre 公式[1], 比較等式左右兩邊後, 我們得到

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots;$$

這裡的 $n$ 爲正整數。如果 $n$ 爲偶數, 則上式的最後一項爲 $(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta$; 如果 $n$ 爲奇數, 則上式的最後一項爲 $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos\theta\sin^{n-1}\theta$。

[1]de Moivre 公式: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

設 $\theta=\dfrac{m}{n}\pi$ 爲一個有理角, 則 $\cos n\theta=\cos m\pi=\pm 1$。從而 $\cos\theta$ 滿足整係數方程

$$x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2)+\binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2-\cdots=\pm 1. \tag{1}$$

將式 (1) 依$x$的降冪整理, 並注意到$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1}$, 那麼當$n$爲奇數時, 得到

$$2^{n-1}x^n+\cdots\pm 1=0, \tag{2}$$

當 $n$ 爲偶數時, 得到

$$2^{n-1}x^n+\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}+1=0. \tag{3}$$

在這裡, 我們要引用一個著名的代數定理

*一個整係數的代數方程*

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

*如果有有理根* $\dfrac{p}{q}$(*其中*$(p,q)=1$), *則* $q|a_n, p|a_0$。

應用這個定理於 (2) 和 (3), 便知當 $n$ 爲奇數及「$4k$ 形」的偶數時, $x=\cos\theta$ 必爲「$\pm\dfrac{1}{2^\lambda}$ 形」, 其中 $0\le\lambda\le n-1$ (在 (3) 中, 雖然 $a_0=2$, 但是 $|\cos\theta|\le 1$)。再由 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$, 而 $2\theta$ 和 $\theta$ 同屬於「$\dfrac{m}{n}$ 形」(同一個 $n$) 的有理角, 故 $\cos 2\theta$ 也必須爲「$\pm\dfrac{1}{2^\mu}$ 形」, 其中 $0\le\mu\le n-1$, 這樣便得到關係:

$$\pm\frac{1}{2^\mu}=2\left(\frac{1}{2^\lambda}\right)^2-1,$$

但這關係只有當 $\lambda=0$ 或 $1$ 時才能成立, 這就是說: 當 $n$ 爲奇數或「$4k$ 形」的偶數時, $\cos\frac{m}{n}\pi$ 只能有 $\pm\dfrac{1}{2}$ 及 $\pm 1$這幾個有理值。

其次, 當 $n$ 爲「$4k+2$ 形」的偶數時, 因爲 $2\theta=\dfrac{m}{2k+1}\pi$ 的分母爲奇數, 利用上面已得的結果, 便知必有

$$2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta=\pm\frac{1}{2}\text{或}\pm 1;$$

這就是說: 當 $n$ 爲「$4k+2$ 形」的偶數時, $\cos\dfrac{m}{n}\pi$ 只能有 $0$ 這一個有理值。

由於 $\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)^2$, 從而也就知道了這幾個數也是有理角的正弦值所僅有的有理值。

---

[2]「餘弦」即「餘角的正弦」, 這裡就蘊含了正餘弦函數的誘導公式。

最後, 設 $\theta$ 爲有理角, 而 $\tan\theta = \frac{p}{q}((p,q)=1)$, 那麼立刻得到

$$\sin 2\theta = \pm\frac{2pq}{p^2+q^2}, \cos 2\theta = \pm\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}.$$

這就是說 $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ 將同時爲有理數, 但根據上面的結果, 一個有理角的正弦及餘弦同時爲有理數的情況只能限於二者之一爲 0, 而另一個爲 $\pm 1$ 的時候。這就是說 0 和 $\pm 1$ 爲有理角正切僅有的有理值了。

因此有理角的三角函數就只有

$$\cos 0^\circ(\sin 90^\circ), \cos 90^\circ(\sin 0^\circ), \cos 60^\circ(\sin 30^\circ), \tan 0^\circ(\cot 0^\circ), \tan 45^\circ(\cot 45^\circ)$$

是有理數, 其餘的全是無理數。

至此, 我們只是用了簡單的複數知識與多項式內容, 就解決了有理角的三角函數中哪些數是無理數的問題, 這比起一個個三角函數值去單獨地驗證無疑是更加優越的, 這也是高等數學比起初等數學更有優勢的地方。

不過值得一提的是, 由 (1) 可知所有有理角的餘弦值 (從而正弦值與正切值) 都是代數數。依 Galois 理論, 還可知道這種類型的代數數都可以由整數出發而通過有限次的四則運算及開方運算而顯式表示出來。至於可用有限次四則運算及開方運算表示出來的卻只限於一個狹小範圍內的有理角, 關於這個問題有 Gauss 著名的結果可以參考柯斯特利金的《代數學引論》第三卷。

作爲結論的應用, 來看下面三個有趣的例子。

**例** 1: 證明: 格點正多邊形只有正方形。

**證明**: 設格點正 $n$ 邊形各邊的斜率分別爲 $k_1, k_2, \ldots, k_n$, 由於正多邊形的頂點都是整點, 因而 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 這 $n$ 個數中至少有 $n-2$ 個不爲 $\infty$ (即斜率存在)。

$n=4$時, 格點正方形是容易找到的。下面討論 $n\neq 4$ 的情況, 由上面的分析知, 必有兩相鄰邊的斜率都是存在的, 不妨設爲 $k_1, k_2$, 於是

$$|\tan\theta| = \left|\tan\frac{(n-2)\pi}{n}\right| = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| \in \mathbb{Q},$$

由此可知 $\theta$ 只能爲 $135^\circ$ (舍去 $45^\circ$, 因爲不存在內角爲 $45^\circ$ 的多邊形)。

下面就只需要證明不存在格點正八邊形, 證明是簡單的。假設這樣的格點正八邊形存在, 通過平移可將一個頂點 $O$ 設爲 $(0,0)$, 其相鄰的兩頂點 $A(a_1,a_2), B(b_1,b_2)$。依餘弦定理

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 135^\circ = \frac{AO^2+BO^2-AB^2}{2AO\times BO} \notin \mathbb{Q},$$

而
$$\frac{AO^2+BO^2-AB^2}{2AO\times BO}=\frac{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2}{2(a_1^2+a_2^2)}\in\mathbb{Q},$$
這就矛盾了!

**例**2: 如果 $\cos\alpha=\dfrac{1}{n}$ $(n>2)$, 證明: 不存在正整數 $m$, 使得 $m\alpha$ 爲 $\pi$ 的整數倍。

**證明**: 一般的方法是通過數學歸納法去證明 $\cos k\alpha$ $(k\geq 1)$ 所化成的最簡分數中, 分母均爲 $n^k$, 因而 $\cos k\alpha$ 中的分子和分母都不相同, 也就是說 $\cos k\alpha\neq\pm 1, \forall k\in\mathbb{N}^+$。也就說明了 $k\alpha$ 不會爲 $\pi$ 的整數倍, 從而命題得證! 不過這樣的證明方法需要對 $n$ 分奇偶情況來討論。

而通過先前的結論, 既然 $\cos\alpha=\dfrac{1}{n}\in\mathbb{Q}$, 就說明了 $\alpha$ 不爲有理角, 因此也就不存在正整數 $m$ 使得 $m\alpha$ 爲 $\pi$ 的整數倍了。我們還可以證明當 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{7},\ldots$ 時, 結論也是正確的!

這一問題在證明 Hilbert 第三個問題中等體積的四面體和正方體不是等構的會涉及到。

**例**3: 證明: 如果一個三角形每個邊長和每個內角的角度都是有理數, 那麼這個三角形是等邊三角形。

**證明**: 不妨設爲 $\triangle ABC$, 三邊分別爲 $a,b,c$, 依餘弦定理
$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.\end{cases}$$
由於 $a,b,c\in\mathbb{Q}$, 因而 $\cos A,\cos B,\cos C\in\mathbb{Q}$, 而 $A+B+C=\pi$, 有理角中只有 $0^\circ,60^\circ,90^\circ$ 的餘弦值爲有理數, 因而只能 $A=B=C=60^\circ$, 從而 $\triangle ABC$ 爲正三角形。又由於餘弦定理還可以寫成
$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}-\dfrac{a^2}{bc}\right),\\ \cos B=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}-\dfrac{b^2}{ca}\right),\\ \cos C=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-\dfrac{c^2}{ab}\right),\end{cases}$$
因而問題的條件可以減弱成 $\triangle ABC$ 各個角以及各邊比值均爲有理數。

## 參考文獻

1. 程其襄。三角函數表上的數哪些是無理數 [J]。數學教學, 1955年第一期, 16-18。
2. 孟道驥等。高等代數與解析幾何 (上冊)[M]。科學出版社, 2013年, p46。
3. 孟道驥等。高等代數與解析幾何學習輔導 [M]。科學出版社, 2008年, p42。

—本文作者就讀於中國上海華東師範大學數學系—