數學傳播 44卷3期, pp. 76-86

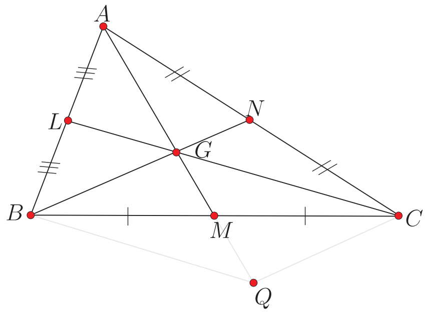
通過物理方法解決數學問題

于安邦

一、引言

眾所皆知數學領域中的微積分是因應實際的物理問題, 進而發展出來的一門學問, 主要探討無限大與充分小這兩個抽象的相關概念。物理學當中確實有很多現象可以通過數學模型來加以解釋, 例如單擺的週期公式可以通過常微分方程來設定模型; 以初速 v_0 斜向拋擲一個物體 (假設初速 v_0 與水平線的夾角爲 θ 並且不計空氣阻力), 可以通過二次曲線當中的拋物線 $h=(v_0\sin\theta)t-\dfrac{1}{2}gt^2$ 來建立模型, 其中 h 是拋擲經過時間 t 秒後物體的高度, 而 g 是重力加速度。因此建立適當的假設與模型, 以數學的方程或函數關係來解釋物理現象, 是很容易見到一種數量分析方法。數學的本質就是爲了要解決實際遇到的問題, 是以大多數的物理現象或問題, 數學方法大抵來說都可以充分發揮作用。那麼反過來說, 數學的問題能否通過熟知的物理現象或知識來加以解決呢 ? 這個問題似乎有很大的空間可以發揮, 也是值得深思的一個好問題, 下面我們就是通過既有的物理知識來解決一些數學問題。

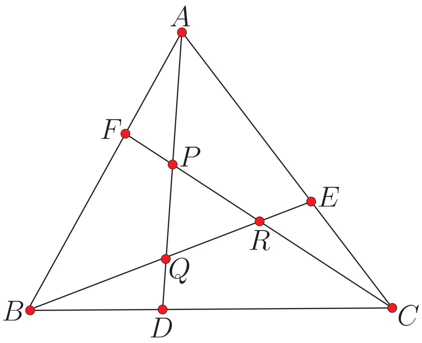
二、平面幾何關於面積比的問題



圖一: 三角形及其重心

三角形當中, 三條中線 (頂點到對應邊中點的連線段) 會交於一點 G, 這一個點 G 就是所謂的重心, 同時重心把三條中線長皆分割成 $2:1$ 的兩段。平面上給定任意的 $\triangle ABC$, 如右圖所示, 傳統的證明方法, 較爲常見的方法有向量的方法, 或是做輔助線, 延長線段 $\overline{GM}$ 至點 Q 使得 $\overline{GM}=\overline{MQ}$, 再根據四邊形 $GBQC$ 是一個平行四邊形而得到論證。若以物理的方法來分析, 我們可以假設 $\triangle ABC$ 的重量是均勻分布的, 並且放置在一個均勻的重力場下。現在分別在三個頂點各懸掛一個 1 克重的砝碼, 那麼當達成靜力平衡時, 所有的合力矩必須等於 0。由於 L, M, N 是三個邊上的中點, 所以三個邊上是呈現靜力平衡狀態, 此時相當於三個中點 L, M, N 處各懸掛 1 個 2 克重的砝碼。因爲整個系統的總重量是 3 克重, 注意到線段 $\overline{CL}$, 點 L 處懸掛一個 2 克重的砝碼, 而點 C 處懸掛一個 1 克重的砝碼, 這兩個點的總重量是 3 克重, 所以重心 G 必定落在線段 $\overline{CL}$ 上。同理分析線段 $\overline{AM}$ 與 $\overline{BN}$, 也會得到重心

G 必定落在線段 $\overline{AM}$ 與 $\overline{BN}$ 上, 這一個事實便說明了重心 G 即爲三線段 $\overline{AM}$、$\overline{BN}$、$\overline{CL}$ 共同的交點, 也就是三條中線 $\overline{AM}$、$\overline{BN}$、$\overline{CL}$ 同時相交於點 G。另外一方面, 根據線段 $\overline{AM}$ 上的兩個端點所懸掛的砝碼重量, 即可得知 $\overline{AG} : \overline{GM} = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$, 這裡係利用力矩 (torque) = 作用力大小 × 力臂長。同理亦有 $\overline{BG} : \overline{GN} = 2 : 1$, $\overline{CG} : \overline{GL} = 2 : 1$。



圖二:　面積比值問題

這樣的想法可以解決數學競賽當中常見到的一類問題, 我們予以一般化這一個問題。平面上任意給定三角形 ABC, 已知 D, E, F 分別在線段 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 上, 並且 $\overline{AF} : \overline{FB} = p : 1$, $\overline{BD} : \overline{DC} = q : 1$, $\overline{CE} : \overline{EA} = r : 1$。這裡 p, q, r 爲三個正實數, 那麼 $\triangle PQR : \triangle ABC$ 之比值爲何 ? 請同時參照左圖 (二)。

同樣假設 $\triangle ABC$ 的重量是均勻分布的, 並且放置在一個均勻的重力場下。如果於點 A 處懸掛一個 1 克重的砝碼, 當線段 $\overline{AB}$ 達到靜力平衡時, 頂點 B 處應懸掛一個 p 克重的砝碼; 同理當線段 $\overline{BC}$ 欲達到靜力平衡時, 頂點 C 處應懸掛一個 pq 克重的砝碼。此時整個系統的總重量爲 $(1+p+pq)$ 克重, 而支點 F 處相當於懸掛一個 $(p+1)$ 克重的砝碼, 支點 D 處相當於懸掛一個 $(p+pq)$ 克重的砝碼。注意到線段 $\overline{AD}$, 兩個端點上的重量之和爲 $(1+p+pq)$ 克重, 所以 $\triangle ABC$ 的重心必定落在線段 $\overline{AD}$ 上; 另外再注意到線段 $\overline{CF}$, 兩個端點上的重量之總和爲 $(1+p+pq)$ 克重, 所以 $\triangle ABC$ 的重心必定落在線段 $\overline{CF}$ 上。故 $\triangle ABC$ 的重心即 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CF}$ 的交點 P, 且

$$\begin{aligned}\overline{AP} : \overline{PD} &= 1 : \frac{1}{p+pq} = (pq+p) : 1,\\ \overline{CP} : \overline{PF} &= \frac{1}{pq} : \frac{1}{1+p} = (1+p) : pq,\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\triangle ACP &= \frac{1+p}{pq+p+1}\triangle ACF = \frac{p+1}{pq+p+1}\cdot\frac{p}{p+1}\triangle ABC\\ &= \frac{p}{pq+p+1}\triangle ABC.\end{aligned}$$

利用類似的分析方法同理亦可得出

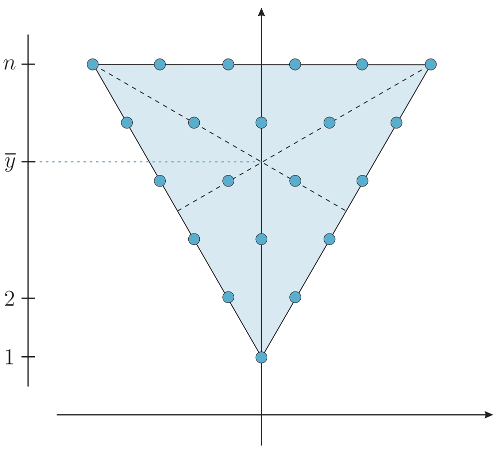
$$\begin{aligned}\triangle ABQ &= \frac{q}{qr+q+1}\triangle ABC,\\ \triangle BCR &= \frac{r}{pr+r+1}\triangle ABC,\end{aligned}$$

於是

$$\begin{aligned}\triangle PQR =&\triangle ABC - \triangle ACP - \triangle ABQ - \triangle BCR\\ =&\Big(1-\frac{p}{pq+p+1}-\frac{q}{qr+q+1}-\frac{r}{pr+r+1}\Big)\triangle ABC\\ =&\frac{(pqr-1)^2}{(pq+p+1)(qr+q+1)(pr+r+1)}\triangle ABC.\end{aligned}$$

特別地當 $pqr=1$ 時 $\Leftrightarrow \triangle PQR=0 \Leftrightarrow$ 三線段 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於同一點。通過上面的計算過程可以看出, 平面上給定線段比例欲求算面積比例的這一類問題, 通過物理學上的『槓桿 (lever) 原理』來求解, 整個計算過程其實也不會太過於繁複。另一方面, 初等微積分的練習題確實有求算形心 (centroid) 坐標的相關問題, 有一些特殊圖形的形心位置根據對稱性就很容易直接看出, 並非一定要通過積分來求算形心坐標。

三、前 n 項完全平方數的總和



圖三: 利用重心坐標求總和

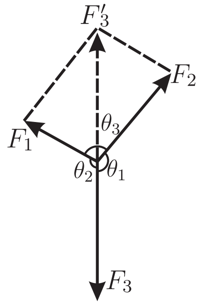
如圖 (三) 所示, 假設平面上的直角坐標系上有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個小球, 每一個小球的重量都是 1 公克重, 把它們排列成如左圖的等邊三角形, 其中頂點的坐標位於 $(0,1)$, 那麼我們的問題是這一個三角形重心的 y 坐標應爲何？基本的假設如同先前所述, 由於等邊三角形關於內角的角平分線爲軸對稱圖形, 所以重心的 y 坐標必定落在內角分角線上並且把相對應的中線長分割爲 2:1 的兩條線段, 故重心的坐標 $\bar{y}$ 根據內分點公式就可以求出爲 $\bar{y}=\dfrac{2n+1}{3}$。另一方面, 重心的坐標也可以通過所有小球的 y 坐標來求算。因此 $\bar{y}=\dfrac{1\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+n\cdot n}{1+2+\cdots+n}=\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}$, 然而這兩種方法計算所求得的重心坐標 $\bar{y}$ 應該要相等, 於是我們便可以得到 $\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2n+1}{3}$, 從而有 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。這裡是通過重心坐標反過來求算某一個特定級數的前 n 項總和問題。

四、平面幾何中的Pick 面積定理

假設平面上的直角坐標系有一個簡單格點多邊形 P (simple lattice polygon), 也就是平面上的一個簡單封閉的並且頂點的坐標皆爲整數值的多邊形。假設 P 的邊界上有 b 個格子點, 而 P 的內部有 i 個格子點, 那麼 Pick 定理告訴我們, 這個簡單格點多邊形 P 的面積 $\mu(P)$ 等於 $(i+\frac{b}{2}-1)$。一般而言, 這個定理的證明大多是通過分割以及圖形三角化 (triangularization) 的想法來做爲論證的。想像整個歐式平面 R^2 是一個無窮大的鐵板, 並且假設於時間 $t=0$ 時, 平面上的每一個格子點皆有 1 單位的熱能。根據物理學熱傳導的概念, 於時間 $t=\infty$ 最終所有的這些熱能皆會以單位密度均勻地分布在整個平面上, 特別地這時包含於 P 以內的總熱能爲 $\mu(P)$。現在考慮 P 邊界上相鄰的任意連續兩個頂點, 這兩個頂點連接所形成的線段記爲 e, 那麼線段 e 的中點 M 顯然是平面格點的一個對稱中心。因此在任何一個時刻, 熱流關於這一個中點 M, 線段 e 熱能的流進與流出之總和爲 0, 也就是淨流入的總熱量值恆等於 0。我們可以賦予 P 一個方向, 以逆時針方向做爲 P 的正向, 如此 P 的內部相當於我們沿著邊界行走時的左手邊區域。上述的線段 e 淨總熱量值恆等於 0, 也就是線段 e 左側流進了多少熱能, 那麼其右側就流出了等量的熱能。因此 P 的熱能來自於兩個部分： 其一是來自於它自身內部 i 個格點的全部熱能; 另外一部分則是邊界上的 b 個格點, 它們各自在某一角度範圍內所傳入熱能。根據邊界上的 b 個格點可形成一個內角和爲 $(b-2)\cdot 180^\circ$ 的凸 b 邊形, 又凸多邊形的外角和恆等於 360°, 於是這 b 個格點所貢獻的熱能一共有 $\frac{(b-2)\cdot 180}{360}=\frac{b}{2}-1$。把這兩個部分進行加總, 即有 $\mu(P)=i+\frac{b}{2}-1$。

五、平面向量關係式與面積比

假設平面上給定任意一個 $\triangle ABC$, 點 P 是平面上某一點但不在 $\triangle ABC$ 的邊界上, 若存在非零的實數 m,n,l 滿足 $m\overrightarrow{PA}+n\overrightarrow{PB}+l\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$, 則有 $\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB=|m|:|n|:|l|$。而這一個定理的逆定理也是成立的, 因此只要知道面積比例關係, 反過來也可以得到相對應的向量關係式。事實上就 m,n,l 的正負情形, 我們只需要討論三者皆爲正實數以及兩正一負的情形即可, 這是因爲三者都是負實數或兩負一正的情形時, 我們只要在向量關係式等量乘上純量 (-1), 那麼就會變爲三個正實數與兩正一負的情形。再者假設 $l<0$ 而其餘兩者是正實數, 此時有 $m\overrightarrow{PA}+n\overrightarrow{PB}=-l\overrightarrow{PC}$, 注意到這時 $-l>0$。那麼通過向量的平行四邊形加法可得知, $m\overrightarrow{PA}$ 與 $n\overrightarrow{PB}$ 形成這一個平行四邊形的兩個鄰邊, 並且對角線上的向量就是 $-l\overrightarrow{PC}$, 所以不難發現此時點 C 在 $\triangle PAB$ 的外部, 也等價於點 P 在 $\triangle ABC$ 的外部, 至於另外兩種情形也同理可推出點 P 會落在 $\triangle ABC$ 的外部。針對係數爲兩正一負的情形, 可以通過變數轉換假設 $l\overrightarrow{PC}=(-l')\overrightarrow{PC}$, 由 $l<0$ 可推知 $l'>0$, 那麼此時的向量關係式變爲 $m\overrightarrow{PA}+n\overrightarrow{PB}+l'(-\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{0}$, 其中 $(-\overrightarrow{PC})$ 是向量 $\overrightarrow{PC}$ 的逆向量或反向量。所以這一個



圖四: 合力爲零向量 $\overrightarrow{0}$ 與拉密定理

證明, 不失其一般性, 我們就可以只分析三個正實數的情形, 此時點 P 會落在 $\triangle ABC$ 的內部。假設 $m\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PA'}$, $n\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB'}$, $l\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC'}$, 於是向量關係式可以改寫爲 $\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow$ 點 P 是 $\triangle A'B'C'$ 的重心, 或者根據物理學上的拉密定理 (Lami's Theorem), 可以想像有三個力 $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{PA'}$、$\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{PB'}$、$\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{PC'}$, 它們三者的合力等於 $\overrightarrow{0}$, 亦即此時呈現靜力平衡的狀態, 如左圖(四) 所示。拉密定理告訴我們

$$\frac{|\overrightarrow{F_1}|}{\sin\theta_1}=\frac{|\overrightarrow{F_2}|}{\sin\theta_2}=\frac{|\overrightarrow{F_3}|}{\sin\theta_3},$$

事實上這也等價於三角形的正弦定理, 主要係根據這三個向量可以形成一個頭尾相接的封閉三角形。那麼根據拉密定理可以得知

$$\begin{aligned}\triangle PB'C':\triangle PC'A':\triangle PA'B'=&\frac{1}{2}|\overrightarrow{F_2}||\overrightarrow{F_3}|\sin\theta_1:\frac{1}{2}|\overrightarrow{F_1}||\overrightarrow{F_3}|\sin\theta_2:\frac{1}{2}|\overrightarrow{F_1}||\overrightarrow{F_2}|\sin\theta_3\\=&1:1:1.\end{aligned}$$

又上面這三個三角形面積的連比也會等於

$$\frac{1}{2}nl|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\sin\theta_1:\frac{1}{2}lm|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{PA}|\sin\theta_2:\frac{1}{2}mn|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\sin\theta_3,$$

而這又等價於 $nl\triangle PBC:lm\triangle PCA:mn\triangle PAB$, 最後我們就可以得到

$$\begin{aligned}&\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB\\&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\sin\theta_1:\frac{1}{2}|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{PA}|\sin\theta_2:\frac{1}{2}|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\sin\theta_3\\&=\frac{\triangle PB'C'}{nl}:\frac{\triangle PC'A'}{lm}:\frac{\triangle PA'B'}{mn}=m:n:l.\end{aligned}$$

平面幾何有著這樣的一個問題 :

『坐標平面上給定一個$\triangle ABC$, 那麼滿足$\triangle PAB=\triangle PBC=\triangle PCA$的點 P 一共有幾個 ?』

事實上通過這一個定理, 當 $l=m=n=1$ 時, 此時這一個點正是 $\triangle ABC$ 的重心。而當 $(l,m,n)=(1,1,-1)$、$(1,-1,1)$、$(-1,1,1)$, 也就是係數爲兩正一負的情形一共有三種可能, 於是立即可以得知這樣的點 P 在平面上一共會有 4 個。這一個定理的最大優勢, 除了存在性以外, 同時也能告訴我們滿足條件的點位於平面上的相對位置爲何。特別地當點 P 是 $\triangle ABC$ 的外心 O 時, 那麼不論 $\triangle ABC$ 是銳角、直角、鈍角三角形的哪一種, 恆有面積關係式

$$\frac{\triangle OBC}{|\sin 2A|}=\frac{\triangle OCA}{|\sin 2B|}=\frac{\triangle OAB}{|\sin 2C|}.$$

倘若出現分母爲 0 的情形時, 我們就定義相對應的分子也爲 0, 並且於連比的等式當中把這一項剔除掉, 而這種情形只會發生在直角三角形, 此時外心 O 落在斜邊的中點上, 面積關係式中會有一項爲 0。對於銳角三角形與鈍角三角形, 恆有 $(\sin 2A)\overrightarrow{OA}+(\sin 2B)\overrightarrow{OB}+(\sin 2C)\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 只要出現兩正一負的係數時, 我們就可以得知外心 O 落在 $\triangle ABC$ 的外部, 而這也等價於 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形。對於直角三角形的情形, 不妨假設 $\angle A=90°$, 於是有 $\angle B+\angle C=90°$, 則 $\angle B$ 與 $\angle C$ 必爲銳角且滿足 $\sin B=\cos C>0$ 以及 $\cos B=\sin C>0$, 據此我們就可以推導出

$$\sin 2B:\sin 2C=(2\sin B\cos B):(2\sin C\cos C)=1:1.$$

此時上述的向量關係式爲 $0\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 即 $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$, 從而可以得知點 O 落在斜邊 $\overline{BC}$ 上的中點, 是以向量關係式

$$(\sin 2A)\overrightarrow{OA}+(\sin 2B)\overrightarrow{OB}+(\sin 2C)\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$$

對於任意形狀的三角形都是成立的! 其中當某一項係數爲 0 時, 那麼所對應的三角形面積也是 0, 此時也容易看出某一個內角等於直角。

至於內心 I 的結論甚是容易, 由於內心 I 必定落在 $\triangle ABC$ 的內部, 又面積關係式

$$\frac{\triangle IBC}{a}=\frac{\triangle ICA}{b}=\frac{\triangle IAB}{c}$$

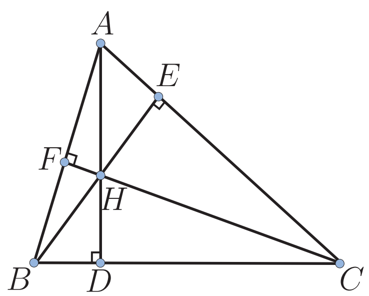
恆成立。(這裡與一般符號使用上的習慣相同, 我們定義 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$ 分別是 $\triangle ABC$ 三個頂點所對應的邊長) 那麼向量關係式 $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$, 對於任意三角形的內心 I 都是成立的。至於旁心的向量關係式, 由於一個三角形的旁心一共會有三個, 而且必定落在 $\triangle ABC$ 的外部, 此時只需要把上面內心的向量關係式, 其中某一項的係數加上一個負號, 即可得到相對應的旁心關係式。例如當 $-a\overrightarrow{I_AA}+b\overrightarrow{I_AB}+c\overrightarrow{I_AC}=\overrightarrow{0}$, 此時該點 I_A 即爲 $\angle B$ 與 $\angle C$ 外角分角線的交點, 以 I_A 爲圓心並且半徑爲 $r_A=\dfrac{\triangle ABC}{p-a}$ 的旁切圓會與 $\overline{BC}$ 邊相切, 這裡的 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, 而對於另外兩個旁心所對應的結論則依此類推。

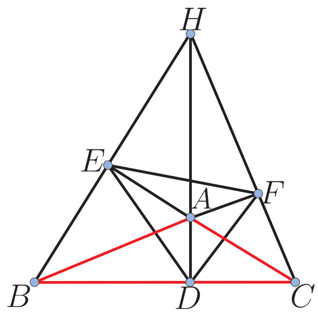
關於垂心的結論就稍微麻煩了一點, 當 $\triangle ABC$ 是銳角三角形時, 此時垂心 H 會落在 $\triangle ABC$ 的內部, 由四邊形 $HDCE$ 對角互補可得知 $\angle AHE=180°-\angle EHD=\angle C$。注意到直角 $\triangle AHE$ 中, 我們有

$$\overline{AH}=\overline{AE}\csc C=(\overline{AB}\cos A)\csc C=\left(\frac{c}{\sin C}\right)\cos A=2R\cos A,$$

其中 R 爲 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑, 如圖 (五) 所示; 同理亦有 $\overline{BH}=2R\cos B$ 以及 $\overline{CH}=2R\cos C$, 則銳角 $\triangle ABC$ 中, 可以將

$$\frac{\overline{AH}}{\cos A}=\frac{\overline{BH}}{\cos B}=\frac{\overline{CH}}{\cos C}=2R$$





圖五: 不同形狀三角形所對應的垂心 H

這一個關係式視爲『廣義的正弦定理』。當 $\triangle ABC$ 是直角三角形時, 此時垂心 H 會落在斜邊的對應頂點上, 亦即 H 就是兩股的交點; 而當 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形時, 此時垂心 H 會落在 $\triangle ABC$ 的外部, 我們不妨假設 $\angle A$ 爲鈍角, 於是可以推出

$$\overline{AE}=\overline{AB}\cos(180^\circ-A)=(-c)\cos A=-2R\sin C\cos A=2R\sin C|\cos A|.$$

再注意到 C, H, E, D 這四個點共圓, $\angle AHE=\angle ACB$, 於是有 $\overline{AE}=\overline{AH}\sin C$, 從而得出 $\overline{AH}=2R|\cos A|$, 同理也有 $\overline{BH}=2R|\cos B|$ 以及 $\overline{CH}=2R|\cos C|$。因此我們可以把上面得到的關係式表示爲

$$\frac{\overline{AH}}{|\cos A|}=\frac{\overline{BH}}{|\cos B|}=\frac{\overline{CH}}{|\cos C|}=2R,$$

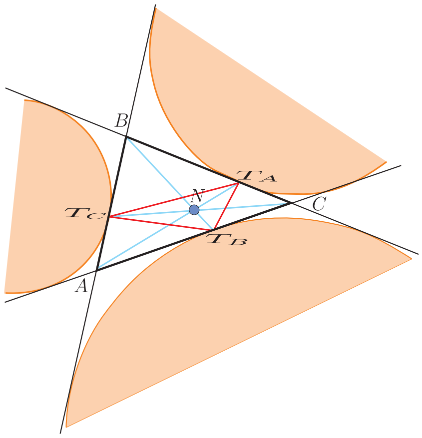
倘若分母出現 0 時, 則定義相對應的分子爲 0, 同時該項於上述關係式當中剔除, 因而通過這樣的定義, 不論是哪一種形狀的三角形, 這一個關係式得以成立。最後注意到在推導的過程當中, 可以進一步得出 $\triangle HAB=2R^2|\cos A\cos B\sin C|$, 同理也會有 $\triangle HBC=2R^2|\cos B\cos C\sin A|$ 以及 $\triangle HCA=2R^2|\cos C\cos A\sin B|$, 所以有 $\triangle HBC:\triangle HCA:\triangle HAB=|\tan A|:|\tan B|:|\tan C|$, 倘若連比關係式當中的某一項無定義時, 通過三角函數的定義便可以推知 : $\triangle ABC$ 的形狀爲直角三角形。而等式 $(\tan A)\overrightarrow{HA}+(\tan B)\overrightarrow{HB}+(\tan C)\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{0}$, 這一個向量關係式對於銳角三角形與鈍角三角形皆適用。如果出現兩正一負的係數時, 即可得知 $\triangle ABC$ 爲鈍角三角形。值得一提的是當 $\triangle ABC$ 爲銳角三角形時, 此時通過 $A+B=\pi-C$, 取正切函數並且根據和角公式即有恆等式 : $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, 再利用上面的面積關係式, 就可以推出下面三個等式:

$$\begin{aligned}
\triangle HBC&=\frac{\tan A}{\tan A+\tan B+\tan C}\triangle ABC=\frac{1}{\tan B\tan C}\triangle ABC;\\
\triangle HCA&=\frac{\tan B}{\tan A+\tan B+\tan C}\triangle ABC=\frac{1}{\tan C\tan A}\triangle ABC;\\
\triangle HAB&=\frac{\tan C}{\tan A+\tan B+\tan C}\triangle ABC=\frac{1}{\tan A\tan B}\triangle ABC.
\end{aligned}$$

例如當給定$\triangle ABC$且已知$\tan A=1, \tan B=2, \tan C=3$, 此時根據上面三個等式立即可知

$$\frac{\triangle HBC}{\triangle ABC}=\frac{1}{6},\quad \frac{\triangle HCA}{\triangle ABC}=\frac{1}{3},\quad \frac{\triangle HAB}{\triangle ABC}=\frac{1}{2},$$

並且易見 $\angle A=45°$ 與 $\angle B+\angle C=135°$ (其中 $\angle B\approx 63°$ 而 $\angle C\approx 72°$)。



圖六: 點 N 爲 $\triangle ABC$ 的界心

最後我們也附帶提一下平面上一個 $\triangle ABC$ 的『界心』, 關於這一個點的性質介紹, 一般而言是比較少見到的, 請同時參照左圖 (六)。沿用先前所使用的符號, $\triangle ABC$ 的周長可以表示爲 $2p$, 其中 p 表示周長之半。如左圖所示, 假設點 T_A 落在線段 $\overline{BC}$ 上, 並且滿足 $\overline{AB}+\overline{BT_A}=p=\overline{AC}+\overline{CT_A}$, 這意味著當我們從頂點 A 逆時針與順時針沿著 $\triangle ABC$ 的邊界上行走, 一直走到 $\overline{BC}$ 線段上的某一點 T_A, 從頂點 A 至這一個點 T_A 順時針與逆時針的路徑總長恰好被平分爲周長之半, 此時這一個點 T_A 稱爲由頂點 A 所對應的周界中點; 類似地可以分別定義頂點 B 與 C 所對應的周界中點 T_B 以及 T_C。根據定義顯然有 $\overline{BT_A}=p-\overline{AB}=p-c>0$, 而且 $\overline{CT_A}=p-\overline{AC}=p-b>0$, 由上述周界之半的等式關係便可以得知三個邊上的周界中點都是唯一存在的, 並且滿足 $\overline{AT_B}=p-c=\overline{BT_A}$, $\overline{CT_B}=p-a=\overline{BT_C}$, $\overline{AT_C}=p-b=\overline{CT_A}$。另外我們把頂點與對應邊上的周界中點以線段連接, 則線段 $\overline{AT_A}$、$\overline{BT_B}$、$\overline{CT_C}$ 可以稱爲這一個 $\triangle ABC$ 的三條『平分界線段』或『平分周線段』。通過簡單的計算我們有

$$\frac{\overline{AT_B}}{\overline{T_BC}}\cdot\frac{\overline{CT_A}}{\overline{T_AB}}\cdot\frac{\overline{BT_C}}{\overline{T_CA}}=\frac{p-c}{p-a}\cdot\frac{p-b}{p-c}\cdot\frac{p-a}{p-b}=1,$$

於是根據 Ceva 逆定理便可以得知 $\overline{AT_A}$、$\overline{BT_B}$、$\overline{CT_C}$ 這三條線段交於同一個點 N。這個點 N 是德國數學家 Christian Heinrich von Nagel 於西元 1836 年所提出, 因此也被稱爲『奈格爾點 (*Nagel point*)』或者稱爲『第一界心』。再者由

$$\frac{\triangle NBA}{\triangle NBC}=\frac{\overline{AT_B}}{\overline{T_BC}}=\frac{p-c}{p-a},$$

同理亦有

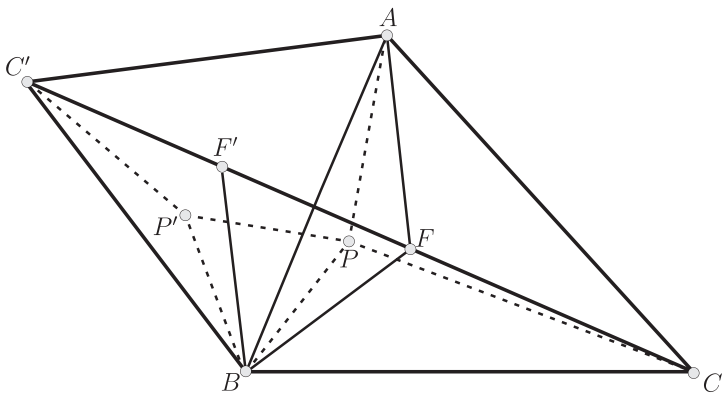
$$\frac{\triangle NAB}{\triangle NAC}=\frac{p-c}{p-b}\quad 與 \quad \frac{\triangle NCA}{\triangle NCB}=\frac{p-b}{p-a},$$

於是我們可以得到 $\triangle NBC:\triangle NCA:\triangle NAB=(p-a):(p-b):(p-c)$, 根據定義容易看出界心 N 必定落在 $\triangle ABC$ 的內部, 最後再由面積比與向量的關係式就可以推導出

$(p-a)\overrightarrow{NA}+(p-b)\overrightarrow{NB}+(p-c)\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$。事實上圖(六) 當中三個邊上的周界中點 T_A、T_B、T_C, 正好就是三個旁切圓分別與三個邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 相切所對應的切點。

六、光的反射以及折射定律

物理領域光學中的反射定律, 係指光線在同一介質中遇到屏蔽物而反彈, 此時有入射角等於反射角並且入射線、法線、反射線這三條直線皆包含於同一個平面, 這也等價於光線通過某一個點 A 行進時遇到屏蔽物後反彈, 反射後經過點 B, 假設入射點 (也是反射點) 為 P, 於是反射定律也可以等價地敘述為 : 光所行進的路徑總長 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值。至於折射定律則是光線在兩種不同的介質中運動時, 從其中一種介質穿過另外一種介質時, 會遵循所謂的折射定律, 亦即著名的『*Snell's Law*』。此時假設光線在第一種介質行經過點 A, 折射點為點 P, 穿過界面後在第二介質行經過點 B, 由於光線在兩種介質時以不同的速度行進, 假設在兩種介質中光的速度分別是 v_1 與 v_2, 通過簡單的微積分計算, 容易得到折射時並非路徑總長 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 為最小, 而是行進時間 $\dfrac{\overline{PA}}{v_1}+\dfrac{\overline{PB}}{v_2}$ 有最小值。

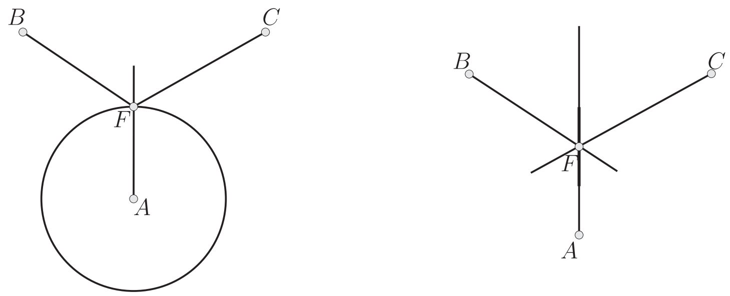


圖七: Fermat point F

據說 17 世紀時, Fermat 曾經向義大利的物理學家身兼數學家的 Torricelli 提出這樣的一個問題:『給定銳角 $\triangle ABC$, 於三角形內部求出一點 P 使得$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$為最小』。不久後 Torricelli 證明了這樣的點 P 是存在且唯一的, 並且滿足條件 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$。請同時參照圖 (七)。同時他還指出, 分別以三邊長向外部做正三角形 $\triangle ABC'$、$\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$, 那麼有 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 三條線段同時交於一點 P, 這一個點 P 即為所求。這一個點後來被稱為 Fermat 點, 常以符號 F 來表示這一個點。一般較為初等的幾何證明方法, 是考慮 $\triangle ABC$ 內部任意一點 P, 將 $\triangle APB$ 以點 B 為旋轉中心逆時針旋轉 $60°$, 假設得到對應的三角形為 $\triangle C'P'B$, 顯然此時的 $\triangle BPP'$ 是一個正三角形。又

$\overline{PA} = \overline{P'C'}$, 於是 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{P'C'} + \overline{P'P} + \overline{PC}$, 根據上圖 (七) 容易看出當 $P = F$ 以及 $P' = F'$ 時, $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 有最小值爲 $\overline{CC'}$。注意到點 C' 的位置與點 P 是無關的, 這是因爲 $\triangle C'AB$ 始終爲一個正三角形。而這一個最小值是可以取得的, 當且僅當 C', P', P, C 這四個點共線時。如果點 P 落在線段 $\overline{CC'}$ 並且滿足 $\angle APB = 120°$ 時, 那麼旋轉過後的對應角 $\angle C'P'B = 120°$, 注意到此時的 $\angle C'P'B + \angle BP'P = 180°$ 恰好爲一個平角, 這也等價於 C', P', P, C 這四個點是共線的。此外通過另外兩邊的對稱性, 同理也會有 $\angle BFC = 120° = \angle CFA$, 並且點 F 也會落在線段 $\overline{AA'}$ 以及 $\overline{BB'}$ 上, 這就說明了爲什麼三條線段 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 同時交於 Fermat 點這一點 F。

如果以物理學中的光學性質來分析這一個問題, 我們可以這樣思考：假定點 F 與點 A 的線段長 $\overline{AF}$ 爲定值時, 那麼此時點 F 所形成軌跡是一個以點 A 爲圓心的圓。當 $\overline{BF} + \overline{FC}$達到最小值時 (請參照下圖), 路徑 $B \to F \to C$ 必定符合光傳播的性質, 於入射點或反射點 F



圖八

處滿足入射角等於反射角, 也就是說 $\overline{AF}$ 的延長線 (亦即法線) 會是 $\angle BFC$ 的角平分線。通過同樣的論述與對稱性, 當固定線段 $\overline{BF}$ 的長度時, 欲使 $\overline{AF} + \overline{FC}$ 達到最小值時, $\overline{BF}$ 的延長線也應該平分 $\angle AFC$。同理亦有 $\overline{CF}$ 的延長線也應該平分 $\angle AFB$。綜上當且僅當上面的三個角平分關係成立時, $\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF}$ 才得以取到最小值。倘若其中至少有一個角平分關係不成立時, 那麼我們可以進一步調整它們之間的角度, 使得 $\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF}$ 變得更小或是再優化。最後根據對頂角相等, 從圖 (八) 的右上方圖形, 就可以看出 $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 三條線段同時交於一點 F, 並且形成的六個角當中, 每一個角度大小都是 $60°$。因此我們就得到了前面的論述：存在點 F 使得 $\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF}$ 有最小值, 此時的點 F 必須滿足條件 $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120°$。

七、一個小結論

以上的物理方法, 所解決的數學問題, 不難看出大多與 Lebesque 測度是相關的, 例如線段長度是一維空間當中的 Lebesque 測度, 而面積是二維空間當中的 Lebesque 測度, 因此某

一些三維空間中的幾何圖形之體積求算的方法, 也可以通過類似的物理分析思想來解決。另外許多的光學儀器或機械設備, 於製作的過程當中, 確實滿足某些特定的幾何學性質, 這也是爲什麼路徑總長問題, 往往與光學的領域密不可分, 並且產生極值時, 也同時會伴隨一定程度的『對稱性』。值得說明的一點是, 如果以非退化的二次曲線或圓錐曲線之光學性質做爲說明, 可以看出數學性質多數從切線相關的特徵著手; 然而物理學中的光學性質卻是經常從法線相關的性質來進行分析的。前面所介紹的一些問題, 有一些是頭一次看到這種方式的論證, 有一些是自己進一步推論而得到。基本上這一些分析方法的思想, 主要源自於林琦焜先生所編纂的《從量綱看世界》, 著實令人有耳目一新之感！

参考資料

1. Christian Blatter, *Another proof of Pick's Area Theorem* (*a slightly revised version of the original paper*), ETH Zürich, Switzerland.
2. Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, Fourth Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
3. 林琦焜。從量綱看世界。數學傳播季刊, 33(3), 13-27, 2009。
4. 阮瑞泰。三角形的四心之向量關係式。數學傳播季刊, 34(1), 29-34, 2010。

—本文作者目前服務於奧創邦國際—