數學傳播 44卷3期, pp. 73-75

從幾何觀點推導二階逆矩陣公式

周伯欣 · 李依淳

眾所皆知, 對於任意的實數 a, b, c, d, 若滿足 $ad-bc \neq 0$, 則二階矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 具有逆矩陣

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

我國的高中數學教材 (從民國 59 年的東華本到現在 99 課綱) 與大部分的線性代數教材[1], 推導的方式主要有兩種：(i) 直接列方程式後以 Cramer 公式求解; (ii) 使用 Gauss-Jordan 消去法進行列運算 (row operation)。筆者認爲這兩種方法都偏於代數面, 很遺憾地沒有用到二階矩陣的幾何性質。在一次的討論中, 我們發現了一種幾何的詮釋, 充分地展現二階矩陣對應的平面線性變換特性。

對於任意向量 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 矩陣 A 與 x 的乘積就是矩陣 A 的行向量 (column vector) 的線性組合:

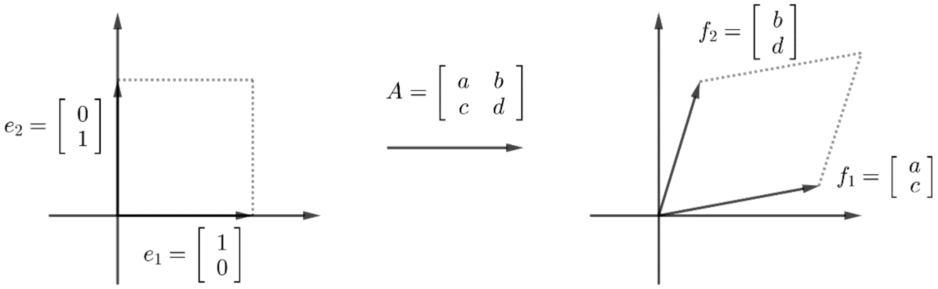
$$Ax=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}.$$

由此可知, 一旦我們搞清楚 A 對基底向量 $e_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的作用結果, 就可以確定 A 對任意向量作用後的結果。另外, 根據這樣的乘法定義, 很容易推導出具有伸縮效果的對角矩陣 D、(擬) 推移 (剪切) 矩陣 S 與旋轉矩陣 R。

首先假設矩陣 A 的兩個行向量皆不平行。設 $f_1=Ae_1=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $f_2=Ae_2=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$, 並且假設 f_1, f_2 與正 x 軸的夾角分別爲 θ, φ, 此時可知 $\cos\theta=\dfrac{a}{\|f_1\|}$, $\sin\theta=\dfrac{c}{\|f_1\|}$, $\cos\varphi=\dfrac{b}{\|f_2\|}$, $\sin\varphi=\dfrac{d}{\|f_2\|}$。下圖演示了矩陣 A 把由 e_1, e_2 構成的單位正方形變爲由 f_1, f_2 構成的平行四

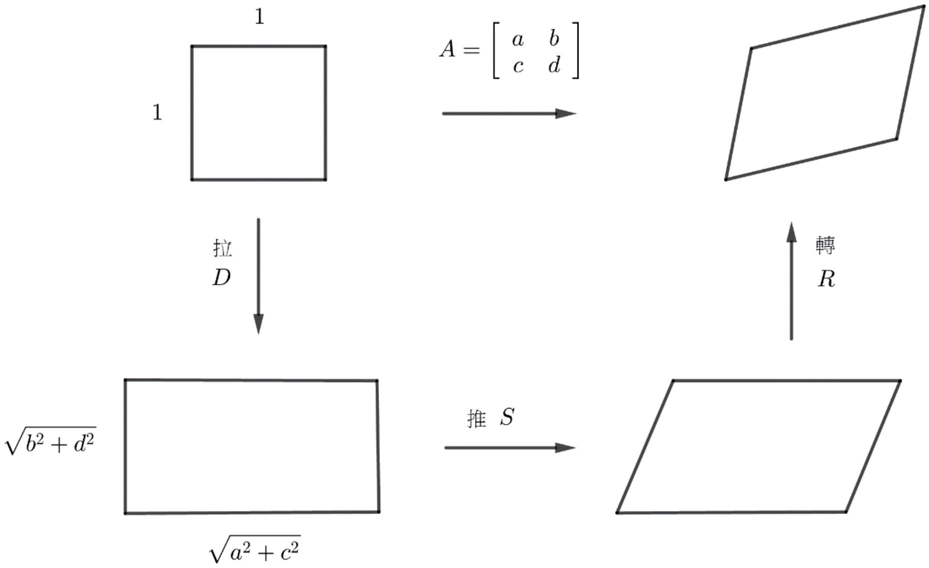
[1] 第一作者家中收藏了約 15 種線性代數教材, 涵蓋美、德、中、日。

邊形的過程。



圖一

我們可以將以上的形變過程想作是一連串可逆形變的複合:



圖二

設形變過程中的三個變換矩陣依序爲 D, S, R, 矩陣具體表達式分別是

$$D = \begin{bmatrix} \|f_1\| & 0 \\ 0 & \|f_2\| \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\varphi-\theta) \\ 0 & \sin(\varphi-\theta) \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

由圖二即得

$$A = RSD.$$

由於 D, S, R 三個矩陣顯然都可逆, 容易寫出它們的逆矩陣分別爲

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \|f_1\|^{-1} & 0 \\ 0 & \|f_2\|^{-1} \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-\cos(\varphi-\theta)}{\sin(\varphi-\theta)} \\ 0 & \dfrac{1}{\sin(\varphi-\theta)} \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

再由矩陣乘積的逆公式得到

$$A^{-1}=(RSD)^{-1}=D^{-1}S^{-1}R^{-1}.$$

代入以上計算結果有

$$\begin{aligned}A^{-1}=&\begin{bmatrix}\|f_1\|^{-1} & 0\\ 0 & \|f_2\|^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{-\cos(\varphi-\theta)}{\sin(\varphi-\theta)}\\ 0 & \dfrac{1}{\sin(\varphi-\theta)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\ =&\frac{1}{\sin(\varphi-\theta)}\|f_1\|^{-1}\|f_2\|^{-1}\begin{bmatrix}\|f_2\|\sin\varphi & -\|f_2\|\cos\varphi\\ -\|f_1\|\sin\theta & \|f_1\|\cos\theta\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{\sin(\varphi-\theta)}\|f_1\|^{-1}\|f_2\|^{-1}=\frac{1}{\|f_1\|\|f_2\|\sin\varphi\cos\theta-\|f_1\|\|f_2\|\sin\theta\cos\varphi},$$

於是

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}.$$

此外, 根據以上的幾何形變過程, 可知 A 的行列式值 $ad-bc$ 就是 $\|f_1\|\|f_2\|\sin(\varphi-\theta)$, 其幾何意義即是正方形經 A 變形之後的平行四邊形的面積。

以上討論是基於兩個行向量不平行的情況。那當兩行向量平行時又如何呢? 此時正方形會變成一條線段 (被壓扁的平行四邊形), 這意味著線段無法經過前面的形變過程變回正方形, 也就是說矩陣 A 是不可逆的。

致謝

本文寫作過程中, 承蒙中研院數學研究所李宣北、張清煇研究員提供意見, 第一作者的朋友連威翔先生亦提供了建議, 特此鳴謝。

參考文獻

1. 許志農主編。高中數學(四) (99課綱), 龍騰文化。
2. G. Strang, *Introduction to Linear Algebra* (5^{th} edition), Wellesley-Cambridge Press, 2016.

—本文作者周伯欣任教於台北市私立鵬展文理補習班, 並主持「宇宙數學教室」部落格; 李依淳投稿時爲台北市立景美女中, 高一學生—