數學傳播 44卷3期, pp. 66-72

圓內接多邊形的歐拉線

楊玉星

一、前言

在平面幾何中, 歐拉線是指過三角形的外心、重心、九點圓 (歐拉圓) 圓心和垂心的一條直線。歐拉線上的四點中, 九點圓圓心到垂心和外心的距離相等, 而且重心到外心的距離是重心到垂心距離的一半。換言之, 設三角形的外心爲 O、重心爲 G、九點圓圓心爲 K 和垂心爲 H, 可以推得 $\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:1:3$。如果現在我們也可以定義圓內接多邊形的外心、重心、歐拉圓心和垂心, 那麼圓內接多邊形的四心是否依然共線? 又四心的距離比能否維持不變呢? 這兩者都是我們感興趣的。

二、圓內接多邊形四心的定義

(一) 外心

一般定義多邊形的外接圓圓心即是外心, 因此圓內接多邊形必有外心。

(二) 重心

將三角形想像成在頂點位置各放一顆質量相等的質點, 則此三個質點的質心就是三角形的重心。因此依據力矩平衡的概念, 先找出其中兩質點的質心, 再跟剩餘的質點, 就可以確定最後的質心位置, 也就是三角形重心的位置。依此類推, 就可以定義任意多邊形的重心。

(本定義不同於參考資料 [1] 是利用多邊形中線定義其重心)

(三) 歐拉圓心

如果將圓上一弦的中點視爲兩邊形的歐拉圓心, 那麼三角形的歐拉圓心就是過此三中點之圓的圓心。圓內接四邊形四頂點中任取三頂點可得四個三角形, 因此可得四個三角形的歐拉圓心, 而此時這四個歐拉圓心會共圓, 不妨就定義圓內接四邊形的歐拉圓心就是過此四點之圓(歐拉圓) 的圓心。依此類推, 就可以定義圓內接多邊形的歐拉圓心。

(引用參考資料 [1] 的定義)

(四) 垂心

三角形的三條高線交於一點, 稱爲三角形的垂心。圓內接四邊形四頂點中任取三頂點可得四個三角形, 因此可得四個三角形的垂心, 而此時這四個垂心會共圓, 不妨就定義圓內接四邊形的垂心就是過此四點之圓(垂心圓) 的圓心。依此類推, 就可以定義圓內接多邊形的垂心。

(引用參考資料[1]的定義)

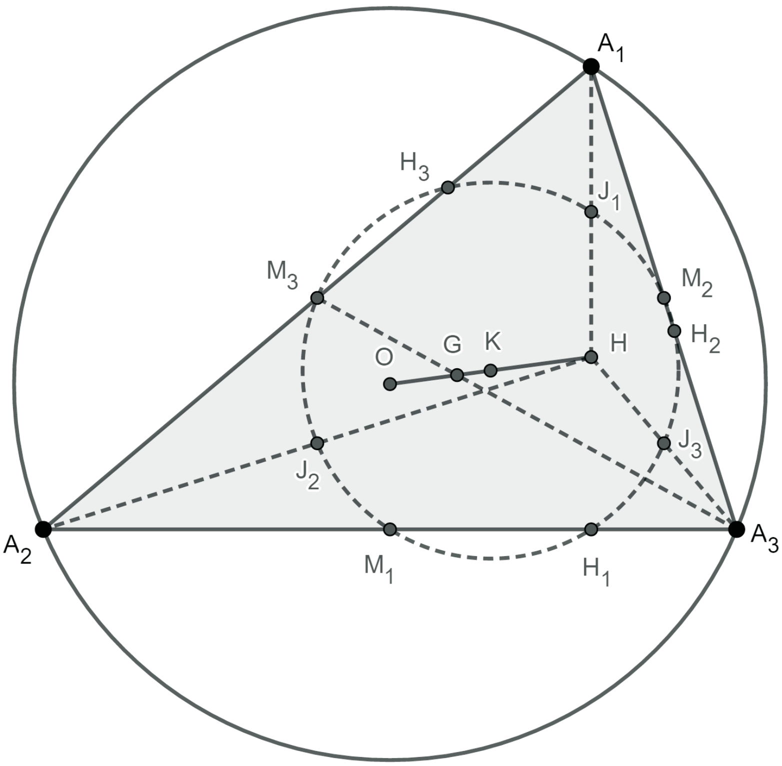
三、圓內接多邊形的四心共線與距離比

定理: 設圓內接 n $(n \geq 3)$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 中, 其外心爲 O、重心爲 G、歐拉圓心爲 K、垂心爲 H, 則此四心會共線且 $\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:(n-2):n$。

(此定理是作者個人的創見)

證明:

(一) 如圖一, 設 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三頂點坐標分別爲 $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$, 其外接圓半徑爲 r, 外心爲 O $(0,0)$, 則 $x_1^2+y_1^2=r^2$, $x_2^2+y_2^2=r^2$, $x_3^2+y_3^2=r^2$。(參考資料 [2] 的假設)



圖一

1. 已知 A_1 和 A_2 的中點爲 $M_3\Big(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\Big)$, 由前面三角形重心的定義可知 :

$$\begin{aligned}\triangle A_1A_2A_3 \text{ 的重心 } G &= \frac{2}{3}\Big(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\Big)+\frac{1}{3}(x_3,y_3)\\ &=\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\Big).\end{aligned}$$

2. 又 A_2 和 A_3 的中點為 $M_1\Big(\dfrac{x_2+x_3}{2},\dfrac{y_2+y_3}{2}\Big)$, A_3 和 A_1 的中點為 $M_2\Big(\dfrac{x_3+x_1}{2},\dfrac{y_3+y_1}{2}\Big)$,

由三角形各邊中點坐標之關係, (參考資料 [2] 的證法)

易知 $\triangle A_1A_2A_3$ 的九點圓圓心 $K\Big(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{2},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{2}\Big)$, 且

$\overline{KM_1}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\dfrac{1}{2}r$, $\overline{KM_2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\dfrac{1}{2}r$, $\overline{KM_3}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x_3^2+y_3^2}=\dfrac{1}{2}r$。

3. 設 $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心 H 為 (x,y), 由三角形垂心的定義可知:$\overrightarrow{A_1H}\cdot\overrightarrow{A_3A_2}=0$, $\overrightarrow{A_2H}\cdot\overrightarrow{A_3A_1}=0$, $\overrightarrow{A_3H}\cdot\overrightarrow{A_2A_1}=0$, (以下證法是作者個人的創見) 推得

$$\begin{aligned}
&(x-x_1)(x_2-x_3)+(y-y_1)(y_2-y_3)=0,\\
&(x-x_2)(x_1-x_3)+(y-y_2)(y_1-y_3)=0,\\
&(x-x_3)(x_1-x_2)+(y-y_3)(y_1-y_2)=0,
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
&(x_2+x_3)(x_2-x_3)+(y_2+y_3)(y_2-y_3)=0 \;\Leftrightarrow\; (x_2^2+y_2^2)-(x_3^2+y_3^2)=0,\\
&(x_1+x_3)(x_1-x_3)+(y_1+y_3)(y_1-y_3)=0 \;\Leftrightarrow\; (x_1^2+y_1^2)-(x_3^2+y_3^2)=0,\\
&(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0 \;\Leftrightarrow\; (x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)=0,
\end{aligned}$$

故 $\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心 $H(x,y)=(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)$。從而

$$\overrightarrow{OG}=\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\Big),\qquad \overrightarrow{OK}=\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\Big),$$
$$\overrightarrow{OH}=(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3),$$

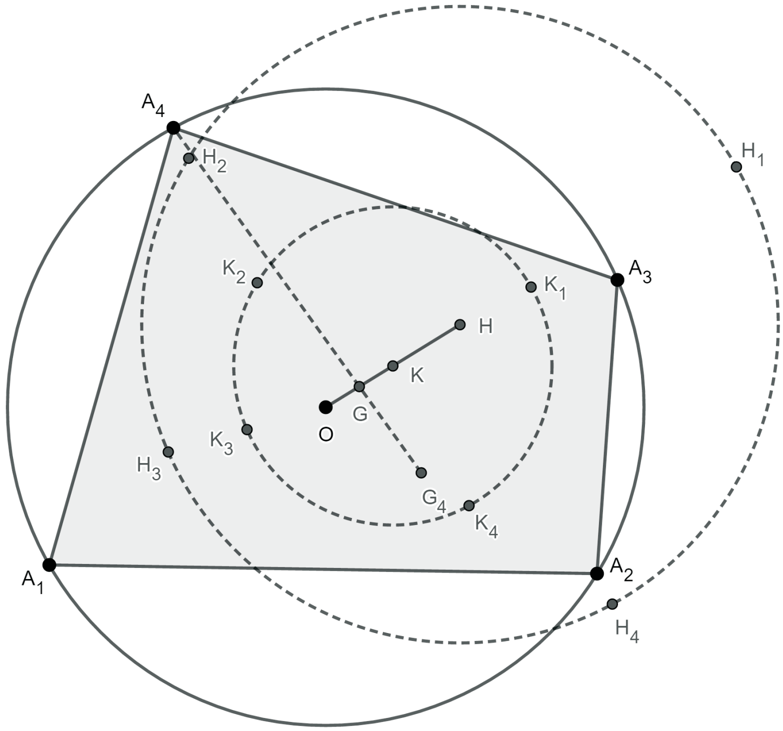
可推知:$\overrightarrow{OG}//\overrightarrow{OK}//\overrightarrow{OH}$, 且

$$\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OG}=\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{6},\frac{y_1+y_2+y_3}{6}\Big),$$

$$\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OK}=\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\Big),$$

故 $\triangle A_1A_2A_3$ 的四心 O、G、K、H 共線且 $\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:1:3$。

(二) 如圖二, 設圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四頂點坐標分別為 $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$, $A_4(x_4,y_4)$, 其外接圓半徑為 r, 外心為 O (0,0), 則 $x_1^2+y_1^2=r^2$, $x_2^2+y_2^2=r^2$, $x_3^2+y_3^2=r^2$, $x_4^2+y_4^2=r^2$。(參考資料 [2] 的假設)



圖二

1. 已知 $\triangle A_1A_2A_3$ 重心爲 $G_4\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, 由前面多邊形重心的定義可知：圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心爲

$$\begin{aligned}G&=\frac{3}{4}\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\Big)+\frac{1}{4}(x_4,y_4)\\&=\Big(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\Big).\end{aligned}$$

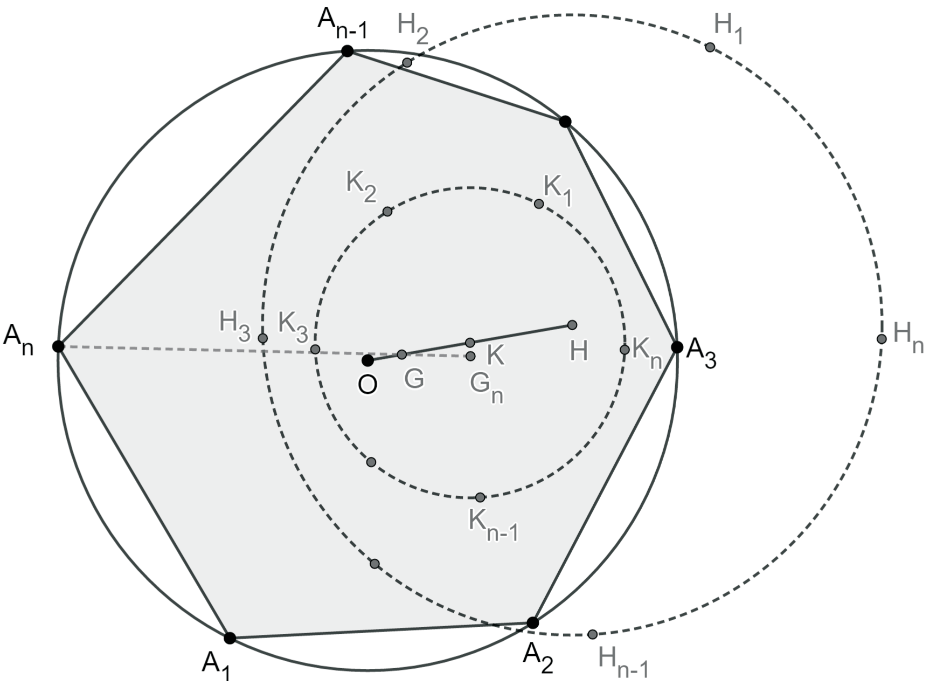
如圖三, 已知圓內接 $(n-1)$ 多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}$ 的重心爲

$$G_n\Big(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}}{n-1},\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}}{n-1}\Big),$$

則由多邊形重心的定義可知：圓內接 n 多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 的重心爲

$$\begin{aligned}G&=\frac{n-1}{n}\Big(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}}{n-1},\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}}{n-1}\Big)+\frac{1}{n}(x_n,y_n)\\&=\Big(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n},\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+y_n}{n}\Big),\end{aligned}$$

故由數學歸納法得證此重心公式爲真。



圖三

2. 已知圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中, $\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$ 的歐拉圓心分別爲

$$K_4\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\Big)、K_1\Big(\frac{x_2+x_3+x_4}{2},\frac{y_2+y_3+y_4}{2}\Big)、$$

$$K_2\Big(\frac{x_3+x_4+x_1}{2},\frac{y_3+y_4+y_1}{2}\Big)、K_3\Big(\frac{x_4+x_1+x_2}{2},\frac{y_4+y_1+y_2}{2}\Big),$$

則由這四個三角形歐拉圓心坐標之關係, (以下參考資料 [2] 的假設與證法)

易知圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的歐拉圓心爲 $K\Big(\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2},\dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}\Big)$,

$$\text{且}\qquad \begin{aligned}\overline{KK_1}&=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\frac{1}{2}r, &\quad \overline{KK_2}&=\frac{1}{2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\frac{1}{2}r,\\ \overline{KK_3}&=\frac{1}{2}\sqrt{x_3^2+y_3^2}=\frac{1}{2}r, &\quad \overline{KK_4}&=\frac{1}{2}\sqrt{x_4^2+y_4^2}=\frac{1}{2}r.\end{aligned}$$

如圖三, 設圓內接 n 多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 的 n 個頂點坐標分別爲 $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$, $\ldots$, $A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$, $A_n(x_n,y_n)$, 其外接圓半徑爲 r, 外心爲 O (0,0), 則

$$x_1^2+y_1^2=r^2,\ x_2^2+y_2^2=r^2,\ x_3^2+y_3^2=r^2,\ldots,\ x_{n-1}^2+y_{n-1}^2=r^2,\ x_n^2+y_n^2=r^2.$$

已知圓內接 n 多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 中, n 個圓內接 $(n-1)$ 多邊形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$、$A_2A_3\cdots A_n$ 、. . . 、$A_nA_1A_2\cdots A_{n-2}$ 的歐拉圓心分別爲

$$K_n\Big(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}}{2},\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}}{2}\Big),$$
$$K_1\Big(\frac{x_2+x_3+x_4+\cdots+x_n}{2},\frac{y_2+y_3+y_4+\cdots+y_n}{2}\Big),\ldots,$$
$$K_{n-1}\Big(\frac{x_n+x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}}{2},\frac{y_n+y_1+y_2+\cdots+y_{n-2}}{2}\Big),$$

則由這 n 個圓內接 $(n-1)$多邊形歐拉圓心坐標之關係, 易知圓內接 n 多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 的歐拉圓心爲

$$K\Big(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n}{2},\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+y_n}{2}\Big),$$

且

$$\overline{KK_1}=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\frac{1}{2}r,\ \ldots\ ,\overline{KK_{n-1}}=\frac{1}{2}\sqrt{x_{n-1}^2+y_{n-1}^2}=\frac{1}{2}r,$$
$$\overline{KK_n}=\frac{1}{2}\sqrt{x_n^2+y_n^2}=\frac{1}{2}r.$$

故由數學歸納法得證此歐拉圓心公式爲真。

3. 已知圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中, $\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$ 的垂心分別爲

$$H_4(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)、\qquad H_1(x_2+x_3+x_4,y_2+y_3+y_4)、$$
$$H_2(x_3+x_4+x_1,y_3+y_4+y_1)、\qquad H_3(x_4+x_1+x_2,y_4+y_1+y_2),$$

則由這四個三角形垂心坐標之關係,　(以下證法是作者個人的創見)

易知圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的垂心爲 $H(x_1+x_2+x_3+x_4,y_1+y_2+y_3+y_4)$,

且　$$\overline{HH_1}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=r,\qquad \overline{HH_2}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=r,$$
$$\overline{HH_3}=\sqrt{x_3^2+y_3^2}=r,\qquad \overline{HH_4}=\sqrt{x_4^2+y_4^2}=r.$$

如圖三, 已知圓內接 n 多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 中, n 個圓內接 $(n-1)$ 多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}$、$A_2A_3A_4\cdots A_n$、. . . 、$A_nA_1A_2\cdots A_{n-2}$ 的垂心分別爲

$$H_n(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1},y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}),$$
$$H_1(x_2+x_3+x_4+\cdots+x_n,y_2+y_3+y_4+\cdots+y_n),\ldots,$$
$$H_{n-1}(x_n+x_1+x_2+\cdots+x_{n-2},y_n+y_1+y_2+\cdots+y_{n-2}),$$

則由這 n 個圓內接 $(n-1)$多邊形垂心坐標之關係, 易知圓內接 n 多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的垂心為

$$H(x_1+x_2+\cdots+x_n, y_1+y_2+\cdots+y_n),$$

且 $\overline{HH_1}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=r,\ \ldots\ ,\ \overline{HH_{n-1}}=\sqrt{x_{n-1}^2+y_{n-1}^2}=r,\quad \overline{HH_n}=\sqrt{x_n^2+y_n^2}=r.$

故由數學歸納法得證此垂心公式為真。

從而 $$\overrightarrow{OG}=\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\Big),$$
$$\overrightarrow{OK}=\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{2},\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{2}\Big),$$
$$\overrightarrow{OH}=(x_1+x_2+\cdots+x_n, y_1+y_2+\cdots+y_n),$$

可推知：$\overrightarrow{OG}//\overrightarrow{OK}//\overrightarrow{OH}$,

且 $$\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OG}=\frac{n-2}{2}\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\Big),$$
$$\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OK}=\frac{n}{2}\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\Big),$$

故圓內接 n $(n\geq 3)$ 多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n$ 的四心 O、G、K、H 也會共線, 且

$$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=1:\frac{n-2}{2}:\frac{n}{2}=2:(n-2):n.$$

參考資料

1. 李冬梅, 白世忠譯。幾何學中的歸納法。九章出版社, 開明(大陸) 出版社, 101-119。
2. 黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社, 155-156。

—本文作者任教國立金門高級中學—