數學傳播　44卷3期, pp. 42-55

從張進安老師的問題到 Riemann 的複變定理

林開亮

在《數學傳播》2020 年第 1 期刊登的 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{F_i}{10^i}=\frac{10}{89}$ 的探源與推廣 一文 [19] 中, 張進安老師推導了與 Fibonacci 數列 F_n (按定義 $F_0=0, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geq 2)$) 有關的幾個無窮級數的運算式, 例如他得到了標題中的等式 (改用無窮級數的常用記號)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{10^n}=\frac{10}{89}. \tag{1}$$

張進安老師還得到, 對一切正整數 k, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{10^{kn}}=\frac{10^k}{10^{2k}-10^k-1}. \tag{2}$$

他認爲 (2) 式中的 k 不必限於正整數, 例如取 $k=\log 2$, 就有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=2. \tag{3}$$

更進一步, 張進安老師認爲可以令 $k=\log r$ (注意, 這相當於令 $10^k=r$), 這裡 r 是一個正數, 從而 (2) 式成爲

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{r^n}=\frac{r}{r^2-r-1}. \tag{4}$$

[在原文中, (4) 式右邊分母中的r被誤寫爲 r^k。]

張進安老師在文章末尾進一步提出一個問題。他注意到, (4) 中的 r 不必限於正數, 對 $r=-2,-3$ 也成立。於是問 : 有誰能將這個問題說得更清楚? 台灣大學數學系張鎮華教授在發表於 2020 年第 2 期《數學傳播》的文章 [20] 中給出了一個清楚的回答, 我們在此給出另一個解決方案並推而廣之。

整個文章所討論的問題, 似乎以生成函數 (generating function) 的觀點最爲直接。令

Fibonacci 數列 F_n 的生成函數爲

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n, \tag{5}$$

則一個簡單的推理告訴我們, 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n$ 對某個複數 z 收斂, 則其無窮和 $G(z)$ 爲

$$G(z) = \frac{z}{1-z-z^2}. \tag{6}$$

推理如下：

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} F_n z^n + F_1 z + F_0 \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) z^n + z \\ &= z\Big(\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} z^{n-1}\Big) + z^2\Big(\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} z^{n-2}\Big) + z \\ &= zG(z) + z^2 G(z) + z. \end{aligned}$$

從而

$$G(z)(1-z-z^2) = z, \tag{7}$$

由此就推出 (6)。並且, 從等式 (7) 立即可以看出冪級數 (5) 對 $z = r_i (i = 1, 2)$ 不收斂, 其中

$$r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \qquad r_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \tag{8}$$

是方程 $1 - z - z^2 = 0$ 的兩根。

現在, 通過做變數替換 $z = \dfrac{1}{r}$, 張進安老師的問題轉化爲:

問題: 冪級數 (5) 究竟對那些複數 z 收斂呢? (也許張進安老師只考慮實數。)

回答這類問題的一個基本結果, 是著名的 Cauchy–Hadamard 公式。我們引述如下 (參見 [2, p. 73] 定理 1.2, 作者稱之爲 Abel 定理, 並將 Cauchy–Hadamard 公式稱作 Hadamard 公式):

定理 1 (Cauchy–Hadamard **公式**): 冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在以 R 爲半徑的圓盤 $|z| < R$ 內收斂, 其中 R 叫收斂半徑, 按照下述公式確定:

$$R = \Big(\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\Big)^{-1} \tag{9}$$

且冪級數在這個圓的外部任何點處都發散。

回到 $c_n = F_n$ 的具體情況, 看來我們是要計算這樣一個麻煩的上極限

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{F_n}.$$

如果我們知道 F_n 的通項公式, 其實是可以求出上述極限 (準確的說, 可以直接算出極限)。當然如果知道 F_n 的通項公式, 張老師的問題完全可以直接解決 (我們留給有興趣的讀者。) 如果不利用 F_n 的通項公式, 可否求出這個收斂半徑 R 呢? 回答是肯定的。

在複變函數中, 我們有下述基本結果 (參見 [3, pp. 73–74], 作者概括爲函數 $f(z)$ 在其冪級數收斂圓周上必有奇點, 我們重新表述如下) :

定理 2 (Riemann **定理**): 函數 $f(z)$ 在原點處的冪級數的收斂圓盤, 恰好是使得函數 $f(z)$ 有定義並且解析的最大圓盤 $|z|<R$。

據 [6] 講, Riemann 在 1856 年關於複分析的講義中提出定理 2, 並 (早於 Hadamard) 重新發現了定理 1 中的公式 (9)。

回到冪級數 (5), 我們知道, 它是 $G(z)=\frac{z}{1-z-z^2}$ 在原點的冪級數, 於是根據定理 2, (5) 的收斂圓盤是使得 $G(z)=\dfrac{z}{1-z-z^2}$ 有定義且解析的最大圓盤 $|z|<R$。因爲 $\dfrac{z}{1-z-z^2}$ 僅僅在在 $z=r_1,r_2$ 處沒有定義且不解析, 從而容易看出

$$R=\min\{|r_1|,|r_2|\}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{10}$$

於是根據定理 1, 級數 (5) 對對一切 $|z|<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 收斂, 而對一切 $|z|>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 發散。進一步, 利用 F_n 的通項公式 (參見 [20, p. 61]) 可以確定, 冪級數 (5) 在收斂圓周 $|z|=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 上均發散。綜合起來, 我們得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n \text{ 收斂 } \iff |z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 且此時有 } \sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n=\frac{z}{1-z-z^2}. \tag{11}$$

於是在 (11) 中令 $z=\dfrac{1}{r}$, $(r\neq 0)$, 就得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{r^n} \text{ 收斂 } \iff |r|>\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \text{ 且此時有 } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{r^n}=\frac{r}{r^2-r-1}. \tag{12}$$

特別地, 在 (12) 中分別令 $r=10, 10^k(k\text{爲正整數}), 2$ 就得到 (1) (2) (3) 各式。而 (12) 所框定的 r 之取值範圍 $|r|>\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (也許他只是考慮實數值的 r) 就是張老師最後的問題的答案。

注1: 這裡介紹的方法適用於由高階遞推關係 (給定初值 $a_0, a_1, \ldots, a_{d-1}$)

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_d a_{n-d}, \qquad n \geq d \tag{13}$$

(其中 $c_1, \ldots, c_d$ 是常數) 給出的數列 $\{a_n\}$ 所對應的冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{14}$$

的收斂區域問題之討論。此時容易確定, 若 (14) 對某複數 z 收斂, 則必收斂於其生成函數 (推導如前, 也可參見 [1, pp. 337–338])

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + (a_1 - c_1 a_0)z + (a_2 - c_1 a_1 - c_2 a_0)z^2 + \cdots \\ &\quad + (a_{d-1} - c_1 a_{d-2} - c_2 a_{d-3} - c_{d-1} a_0)z^{d-1}, \\ Q(z) &= 1 - c_1 z - c_2 z^2 - \cdots - c_d z^d. \end{aligned}$$

推導如前:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ &= \sum_{n=d}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{d-1} a_n z^n \\ &= \sum_{n=d}^{\infty} (c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_d a_{n-d}) z^n + \sum_{n=0}^{d-1} a_n z^n \\ &= c_1 z \Big(\sum_{n=d}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} \Big) + c_2 z^2 \Big(\sum_{n=d}^{\infty} a_{n-2} z^{n-2} \Big) + \cdots + c_d z^d \Big(\sum_{n=d}^{\infty} a_{n-d} z^{n-d} \Big) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{d-1} a_n z^n \\ &= c_1 z \Big(G(z) - \sum_{n=0}^{d-2} a_n z^n \Big) + c_2 z^2 \Big(G(z) - \sum_{n=0}^{d-3} a_n z^n \Big) + \cdots + c_d z^d G(z) + \sum_{n=0}^{d-1} a_n z^n \\ &= (c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_d z^d) G(z) + \sum_{n=0}^{d-1} a_n z^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\Big[c_1z\Big(\sum_{n=0}^{d-2}a_nz^n\Big)+c_2z^2\Big(\sum_{n=0}^{d-3}a_nz^n\Big)+\cdots+c_{d-1}z^{d-1}a_0\Big]\\
&=(c_1z+c_2z^2+\cdots+c_dz^d)G(z)+[a_0+(a_1-c_1a_0)z+(a_2-c_1a_1-c_2a_0)z^2+\cdots\\
&\quad+(a_{d-1}-c_1a_{d-2}-c_2a_{d-3}-c_{d-1}a_0)z^{d-1}]
\end{aligned}
$$

從而我們有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=&\{a_0+(a_1-c_1a_0)z+(a_2-c_1a_1-c_2a_0)z^2+\cdots\\
&+(a_{d-1}-c_1a_{d-2}-c_2a_{d-3}-c_{d-1}a_0)z^{d-1}\}/\{1-c_1z-c_2z^2-\cdots-c_dz^d\}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

而且可以確定出使得 (16) 成立的 z 的一個範圍爲

$$|z|<R, \tag{17}$$

其中 R 可以如下確定。設 $d(x)$ 是 $P(x),Q(x)$ 的最大公因式, 則

$$R=\text{多項式 }\frac{Q(x)}{d(x)}\text{ 各個根模長之最小者}. \tag{18}$$

級數 (14) 對滿足 $|z|>R$ 的 z 發散, 對 $|z|=R$ 上的點則需具體分析 [我們在附記中以更簡明的方式證明了, 級數 (14) 的收斂域恰好是 $|z|<R$]。

我們相信, 這一結果不是新的, 但絕不是人人都瞭解。值得注意的是, 以上結果包含了 a_n 是一個 $d-1(d\geq 1)$ 次多項式的特殊情形, 此時結果更簡單。考慮到這一問題張進安老師曾在另一篇文章 [18] 提及, 我們特別介紹一下。有下述結果:

定理 3: 設 $f(x)$ 是 x 的 d 次多項式, 則

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^n\text{ 收斂 }\iff |z|<1,\text{ 且此時有 }\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^n=\sum_{k=0}^{d}\Delta^kf(0)\frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}, \tag{19}$$

其中 $\Delta^kf(0)$ 是 f 在 0 處的 k 階差分。特別地, 當 $z=\frac{1}{2}$ 時, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(n)}{2^n}=2\sum_{k=0}^{d}\Delta^kf(0). \tag{20}$$

考慮到這個情形特別簡單, 我們給出一個直接的證明。

證明: 根據級數收斂的必要條件, 我們推出, 當 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(n)z^n$ 對某 z 收斂時有

$$\lim_{n\to\infty}f(n)z^n=0.$$

由此容易推出

$$\lim_{n\to\infty} |z|^n = 0,$$

從而 $|z| < 1$。

另一方面, 當 $|z| < 1$ 時, 爲證明級數收斂並求出其無窮和, 注意到, 根據朱世傑招差公式(參見 [11, p. 67] 定理 3), 有

$$f(n) = \sum_{k=0}^{d} \Delta^k f(0) \binom{n}{k}. \tag{21}$$

從而我們有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\sum_{k=0}^{d} \Delta^k f(0) \binom{n}{k}\Big] z^n \\ &= \sum_{k=0}^{d} \Delta^k f(0) \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^n\Big] \\ &= \sum_{k=0}^{d} \Delta^k f(0) \Big[\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z^n\Big] \\ &= \sum_{k=0}^{d} \Delta^k f(0) z^k \Big[\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z^{n-k}\Big]. \end{aligned} \tag{22}$$

對冪級數等式

$$(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{23}$$

在收斂圓 $|z| < 1$ 內求 k 階導, 我們有

$$k!(1-z)^{-1-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k-1) z^{n-k},$$

變形即得

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} z^{n-k} = (1-z)^{-1-k}, \tag{24}$$

代入 (22) 式即得 (19)。在 (19) 式中令 $z = \dfrac{1}{2}$, 即得 (20), 證畢。 □

注2: 我們特別要指明, 定理2可以使我們冪級數 (23) 的收斂範圍是 $|z| < 1$ 獲得更深刻的理解。事實上, 從複變函數的觀點來看, 根本的原因就在於複變函數 $\dfrac{1}{1-z}$ 對 $z = 1$ 恰好無定義且不解析, 從而其冪級數收斂半徑 $R = 1$。講到這裡, 我要與讀者分享自學成才的數學家 I. M. Gelfand (1913～2009) 在 16 歲期間自學數學分析的一段經歷 [16]:

> 我開始參加大學的研討班, 在那裡我發現自己壓力很大。我做數學的方式不合適宜。當時, 數學界掀起了一股風氣 : 對嚴謹的證明的要求、對實變函數論的濃厚興趣。(今天看來, 這種嚴格性和這個特殊理論已陳腐過時, 但在那時 $\cdots$)
>
> 直到那時, 我才認識到, 很重要的是 : 函數未必是連續的, 連續的函數未必是可微的, 一階可微的函數未必是二階可微的, 如此等等; 甚至一個無窮次可微的函數, 其 Taylor 級數也未必是收斂的; 即便收斂, 也未必收斂到函數本身。如果函數的 Taylor 級數剛巧收斂到它本身, 這個函數就稱爲解析的。(實變函數論愛好者認爲) 這類函數是如此狹窄, 以至於它被排除在主流數學之外。而在此之前, 我就只見過這類函數。
>
> 在這種觀點的影響下, 我讀了 de la Vallée-Poussin 的 "現代化的、嚴格化的" 分析教材 (*Cours d'analyse*)。它類似於目前莫斯科大學數學力學系用的教材, 但更好一些。因此我很同情那些大一學生, 他們只有在歷經長達一年的強調 "嚴格基礎" 的痛苦考驗之後, 才能體會到數學分析的美妙。
>
> 即便如此, 我也是幸運的, 我讀了 I. I. Privalov 關於單複變函數的卓越教材 (指 1927 年出版的《複變函數引論》), 有閔嗣鶴等譯的中譯本)。讀這本書時, 我理解了, 爲什麼函數 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 Taylor 級數在 $x=1$發散, 雖然它的圖像是連續的。(這根源於下述事實 : 它所對應的複函數 $\dfrac{1}{1+z^2}$在$z=i$有奇性。)
>
> 讀完前 100 頁, 我感到一陣清風拂過。我發現, 如果一個複變函數有一階導數, 那麼就自動有任意階的導數, 並且其 Taylor 級數在某個區域內收斂到函數本身。每樣東西都找到了自己的位置, 又恢復了和諧。

張老師 [18, 19] 提出的這類問題, 恰好可以利用複變函數的結果(定理2) 獲得近乎圓滿的解決。已故享譽全球之大數學家陳省身先生 (1911~2004) 多次強調複數的美妙與重要。比如, 他曾在美國數學會的 Notices 訪談中 [5] 提到 : "My main idea is that you should do topology or global geometry in the complex case. The complex case has more structure and is in many ways simpler than the real case. So I introduced the complex Chern classes." 相信讀者已從本文之討論對複數之美妙有所體會。

注3: 最後, 我要指出, 在上文寫成後, 爲給讀者指引一個關於討論 Fibonacci 數列通項公式的文獻, 我從《數學傳播》通過關鍵字搜索, 得到意外收穫, 即發現本刊刊登了幾篇與張老師所論問題相關的文獻, 見 [8, 9, 14], 特別是 [14]。這些作者的討論正是基於 Fibonacci 數列的通項公式, 而且只考慮實數。其結果均可用此處的概念性方法而非計算得到。本文的重點不在於重

新推導, 而在於從複變函數的眼光來理解其本質。正如德國大數學家 Kronecker (1823∼1891) 所說：“Analysis does not owe its really significant successes of the last century to any mysterious use of $\sqrt{-1}$, but to the quite natural circumstances that one has infinitely more freedom of mathematical movement if he lets quantities vary in a plane instead of only on a line.”

附記

本文投稿之後, 作者進一步思考了級數 (14) 在 $|z|=R$ 上的收斂性問題。蒙昔日恩師指點, 解決了這一問題。結論是：在 $|z|=R$ 上, 級數 (14) 總是發散的[1]。我們表述成以下定理 (相信它不是新的)。

定理 4: 設多項式 $P(z), Q(z)$ 互素, $P(z)$ 的次數小於 $Q(z)$ 的次數, 且 $Q(0)\neq 0$。設有理函數 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $z=0$ 處有冪級數展開

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n. \tag{25}$$

令 $Q(z)$ 的所有根的模長之最小值爲 r, 則我們有下述結論:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \text{ 收斂 } \iff |z|<r,\ \text{且此時有 } \sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\frac{P(z)}{Q(z)}. \tag{26}$$

令人驚訝的是, 以下的證明完全避開了冪級數的收斂半徑(Abel 定理), 也不需要複變函數的 Riemann 定理, 只需要一個巧妙的引理 (下面的引理 1) 和關於有理生成函數的一般展開定理 (我們有推導)。

證明: 不妨設 $Q(0)=1$, 假設 $Q(z)$ 的相異根分別爲 $r_1,\ldots,r_s$, 重數爲 $m_1,\ldots,m_s$, 則有

$$Q(z)=(1-r_1^{-1}z)^{m_1}\cdots(1-r_s^{-1}z)^{m_s}. \tag{27}$$

爲求出 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $z=0$ 處的冪級數, 我們注意到, 由於多項式

$$Q_i(z)=\frac{Q(z)}{(1-r_i^{-1}z)^{m_i}}\qquad (i=1,\ldots,s)$$

互素, 從而存在多項式 $U_1(z),\ldots,U_s(z)$ 使得

$$U_1(z)Q_1(z)+\cdots+U_s(z)Q_s(z)=1. \tag{28}$$

[1]它恰好對李克大、李尹裕 [7, p. 166] 註腳中提及的問題給出一個回答。

對每個 $1 \le i \le s$, 令

$$P(z)U_i(z) = q_i(z)(1 - r_i^{-1}z)^{m_i} + R_i(z), \tag{29}$$

其中 $q_i(z)$, $R_i(z)$ 是多項式, 且 $R_i(z)$ 的次數小於 m_i。(29) 式兩邊同乘以 $Q_i(z)$ 就有

$$P(z)U_i(z)Q_i(z) = q_i(z)Q(z) + Q_i(z)R_i(z),$$

求和就得到

$$P(z)\left(\sum_{i=1}^{s} U_i(z)Q_i(z)\right) = \left(\sum_{i=1}^{s} q_i(z)\right)Q(z) + \sum_{i=1}^{s} Q_i(z)R_i(z),$$

即

$$P(z) = \left(\sum_{i=1}^{s} q_i(z)\right)Q(z) + \sum_{i=1}^{s} Q_i(z)R_i(z). \tag{30}$$

注意每個 $Q_i(z)R_i(z)$ 次數小於 Q 的次數, 從而後一項和式次數小於 Q 的次數。由於 P 的次數小於 Q 的次數, 我們有

$$\sum_{i=1}^{s} q_i(z) = 0,$$

且

$$P(z) = \sum_{i=1}^{s} Q_i(z)R_i(z). \tag{31}$$

進而

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{i=1}^{s} Q_i(z)R_i(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{R_i(z)}{(1 - r_i^{-1}z)^{m_i}}. \tag{32}$$

設

$$R_i(z) = c_0^i + c_1^i(1 - r_i^{-1}z) + \cdots + c_{m_i-1}^i(1 - r_i^{-1}z)^{m_i-1}. \tag{33}$$

注意, 由上式有

$$c_0^i = R_i(r_i), \tag{34}$$

在 (32) 式兩邊同乘以 $(1 - r_i^{-1}z)^{m_i}$ 並令 $z = r_i$, 我們就得到

$$\frac{P(r_i)}{Q_i(r_i)} = R_i(r_i). \tag{35}$$

從而 (注意 $P(z)$, $Q(z)$ 互素蘊含 $P(r_i) \neq 0$)

$$c_0^i = \frac{P(r_i)}{Q_i(r_i)} \neq 0. \tag{36}$$

注意到, 對正整數 m 與非零複數 ρ, 我們有冪級數展開 (參見 [1, p. 338])

$$\frac{1}{(1-\rho z)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{m-1}\rho^n z^n, \qquad \left(|z|<\frac{1}{|\rho|}\right). \tag{37}$$

於是, 對 $|z|<r_i$ 有

$$\begin{aligned}\frac{R_i(z)}{(1-r_i^{-1}z)^{m_i}} &= \sum_{j=0}^{m_i-1}\frac{c_j^i(1-r_i^{-1}z)^j}{(1-r_i^{-1}z)^{m_i}}\\ &= \sum_{j=0}^{m_i-1}c_j^i\frac{1}{(1-r_i^{-1}z)^{m_i-j}}\\ &= \sum_{j=0}^{m_i-1}c_j^i\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m_i-j+n-1}{m_i-j-1}r_i^{-n}z^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\underline{\sum_{j=0}^{m_i-1}c_j^i\binom{m_i-j+n-1}{m_i-j-1}r_i^{-n}}\right)z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(f_i(n)r_i^{-n}\right)z^n, \quad 其中f_i(n)是次數爲m_i-1的多項式, 此處用到c_0^i\neq 0.\end{aligned}$$

從而當 $|z|<r=\min\{|r_1|,\ldots,|r_s|\}$ 時, 將這些式子代入 (32) 式, 就有

$$\begin{aligned}\frac{P(z)}{Q(z)} &= \sum_{i=1}^{s}\frac{R_i(z)}{(1-r_i^{-1}z)^{m_i}}\\ &= \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(f_i(n)r_i^{-n}\right)z^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{s}f_i(n)r_i^{-n}\right)z^n.\end{aligned} \tag{38}$$

根據冪級數展開的唯一性, 這就意味著

$$a_n=\sum_{i=1}^{s}f_i(n)r_i^{-n}, \tag{39}$$

其中 $f_i(n)$ 是次數爲 m_i-1 的多項式(這一結果在 [1, p. 341] 中被稱爲 有理生成函數的一般展開定理, 作者在那裡並未給出詳細證明)。因此, 我們只要討論冪級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{s}f_i(n)r_i^{-n}\right)z^n, \qquad 其中f_i(n) 是次數爲 m_i-1 的多項式 \tag{40}$$

的收斂範圍。(38) 式表明, 當 $|z|<r$ 時, 級數 (40) 收斂到 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$。下面將證明, 當 $|z|\geq r$ 時級數 (40) 發散。爲此, 只要證明, 級數 (40) 的通項

$$a_n=\sum_{i=1}^{s} f_i(n)\left(\frac{z}{r_i}\right)^n \tag{41}$$

不趨於零。這是下述引理的直接推論。

引理1: 設 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$ 兩兩互異, $f_1(x),\ldots,f_s(x)\in\mathbb{C}[x]$ 且都不等於 0, 令

$$a_n=f_1(n)\lambda_1^n+\cdots+c_s(n)\lambda_s^n,\qquad n=0,1,\ldots. \tag{42}$$

以下三條等價:

(i) a_n 以 0 爲極限。

(ii) 對每個 $i=1,\ldots,s$, $f_i(n)\lambda_i^n$ 以 0 爲極限。

(iii) 對每個 $i=1,\ldots,s$, $|\lambda_i|<1$。

證明: 令 T 是作用在數列上的右平移算子, $Ta_n=a_{n+1}$。注意到, 若 f_i 的次數爲 m_i-1, 則有 (參見 [12, p.73] 定理 $2'$)

$$(T-\lambda_i)^{m_i}f_i(n)\lambda_i^n=0. \tag{43}$$

現在對每個 $i=1,\ldots,s$, 根據中國剩餘定理, 存在多項式 $U_i(x)$ 使得

$$\begin{cases} U_i(x)\equiv 0 \pmod{(x-\lambda_j)^{m_j}}, & j\neq i\\ U_i(x)\equiv 1 \pmod{(x-\lambda_i)^{m_i}} \end{cases} \tag{44}$$

於是將 $U_i(T)$ 作用於數列 a_n 就得到 ($f_i(n)\lambda_i^n$ 這一項不變, 而其它項 $f_j(n)\lambda_j^n$ 變成零)

$$U_i(T)a_n=f_i(n)\lambda_i^n. \tag{45}$$

注意到, 若 $a_n\to 0$, 則對 T 的任意多項式 $P(T)$, 都有 $P(T)a_n\to 0$。特別地, 令 $P=U_i$ 就得到

$$f_i(n)\lambda_i^n=U_i(T)a_n\to 0,\qquad i=1,\ldots,s.$$

從而有

$$|f_i(n)|\cdot|\lambda_i|^n\to 0. \tag{46}$$

這就推出 $|\lambda_i|<1$, $i=1,\ldots,n$。這就完成了 (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) 的證明, 而 (iii) $\Longrightarrow$ (i) 是顯然的, 因爲對每個 $i=1,\ldots,n$ 有 $f_i(n)\lambda_i^n$ 以 0 爲極限。證畢。 □

再附記

作者在 2020 年 8 月 8 日瞭解到, 有理函數之冪級數在收斂圓周上不收斂 (定理4) 這一結果確實不是新的, 它蘊含於 Pólya 和 Szegö 的名著《分析中的問題與定理》[15, p. 152] 的問題 246:

命題1: 設冪級數在收斂圓周上有一個極點, 則冪級數在收斂圓周的每一點都不收斂。

其證明用到了 E. Cesàro 的一個結果 ([15, p. 20] 問題 85), 如下:

命題2: 設數列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 滿足以下條件:

(i) 對 $n=0,1,2,\ldots$ 有 $b_n>0$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 對 $|z|<1$ 收斂而對 $z=1$ 發散;

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=s$。

則 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 對 $|z|<1$ 收斂, 並且有

$$\lim_{z\to 1-0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n}=s.$$

最後, 作者還想補充一個從 Fibonacci 數列可能衍出的問題 (最初將我引向這個問題的, 是河南大學的陳敏茹博士與學友楊凡)。衆所周知, Fibonacci 數列 F_n 前後兩項之比的極限恰好爲黃金分割數 (參見[13]), 即我們有:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{47}$$

所以, 我們也許會問:

命題2: 對由一般的常係數線性遞推關係 (13) 所定義的數列 $\{a_n\}$, 其前後兩項之比的極限是否存在; 如果存在, 如何確定?

林鳳美老師在發表於《數學傳播》2019 年第 4 期的文章 [10] 中考慮了這一問題, 但遺憾的是, 其結果有瑕疵 (原因在於, [10, p. 103] 倒數第二行公式中 α_1^n 的係數 d_1 可能等於 0)。例如, 根據該頁定理 3, 只要數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\,(n\geq 2)$, 就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{48}$$

成立。然而, 若取初值 $a_0=1$, $a_1=\omega$, 其中 $\omega=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 則根據 ω 所滿足的方程 $\omega^2-\omega-1=0$, 容易求出 a_n 的通項公式爲 $a_n=\omega^n$。從而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\neq\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{49}$$

事實上, 問題2已蘊含於 Pólya–Szegö[15, p. 152] 的問題 242, 而且那裡的結果更一般:

命題3: 設冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在收斂圓周上有唯一的奇點 z_0, 而且它還是極點, 則有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=z_0. \tag{50}$$

在常係數線性遞推關係所定義的數列的特殊情形, 命題3可以表述爲以下形式:

定理5: 設多項式 $P(z)$, $Q(z)$ 互素, $P(z)$ 的次數小於 $Q(z)$ 的次數, 且 $Q(0)\neq 0$。設有理函數 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $z=0$ 處有冪級數展開

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

若 $Q(z)$ 的模長最小的根是唯一的, 記爲 z_0, 則 (50) 成立。

實際上, 無需借助命題 3, 從 (39) 式不難推出定理 5, 我們留給有興趣的讀者。

注意, 若 $Q(z)$ 最小模長的根不止一個, 那麼 (50) 不一定成立。例如, 任取非零複數 a, 對由

$$1,a,1,a,\ldots \tag{51}$$

構成的數列 a_n, 容易算出, 其生成函數爲

$$\frac{1+az}{1-z^2}.$$

注意, 當 $a\neq\pm1$ 時, 這個有理函數的分子與分母互素, 而分母的兩個根模長相等。由前後兩項之比構成的數列爲

$$\frac{1}{a},a,\frac{1}{a},a,\ldots,$$

它存在極限當且僅當 $\dfrac{1}{a}=a$, 即 $a=\pm1$。因此, 若 $a\neq 0,\pm1$, 則數列 (51) 的前後兩項之比就無極限。

從另一種角度看, 等式 (50) 意味著, 這給出了求多項式 $Q(z)$ 的最小模長零點 (假定它唯一) 的一個近似方法, 這本質上就是線性代數中求矩陣的占優特徵值與特徵向量 (dominant eigenvalue and eigenvector) 的冪法 (power method), 參見 [17] 6.2 節或 [4, p. 81] 1.4 節問題 7。

致謝

作者感謝高雄市中正高中張進安老師和《數學傳播》諸位編輯老師的鼓勵推動! 感謝復旦大學邵美悅博士指正初稿的一處誤拼並指引文獻 [17], 並建議我們改用生成函數而非母函數的稱謂。感謝審稿人對初稿提出寶貴建議。

參考文獻

1. Ronald Graham, Donald Knuth, Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*, (2nd ed.). Reading, MA: Addison-Wesley. 1994. 中譯本《具體數學》, 張明堯、張凡 譯。人民郵電出版社, 2013。
2. 龔昇、張德健。複分析五講–第一講。數學傳播季刊, 34(2), 52–75, 2010。
3. 龔昇、張德健。複分析五講–第三講。數學傳播季刊, 34(4), 50–76, 2010。
4. Roger A. Horn and Charles R. Johnson, Matrix Analysis(second edition), Cambridge University Press, 2013. 有中譯本 :《矩陣分析》, 楊奇譯。機械工業出版社, 2005年;《矩陣分析》, 張明堯、張凡譯。機械工業出版社, 2014年。
5. Allyn Jackson, Interview with Shiing Shen Chern, *Notices of the AMS*, 45(7), 860–865, 1998.
6. D. Laugwitz, E. Neuenschwander, Riemann and the Cauchy–Hadamard formula for the convergence of power series. *Historia Mathematica*, 21(1), 64–70, 1994.
7. 李克大、李尹裕。《有趣的差分方程》(第2版)。合肥 : 中國科學技術大學出版社, 2019 年。
8. 林炳炎。奇妙的費氏數列之一。數學傳播季刊, 6(2), 34–38, 1982。
9. 林炳炎。有關費氏數之無窮級數的分數和。數學傳播季刊, 7(1), 27–33, 1983。
10. 林鳳美。高階線性遞迴數列的一般化費氏螺線。數學傳播季刊, 43(4), 99–109, 2019。
11. 林開亮。微積分之前奏 (或變奏) : 高階等差數列的求和。數學傳播季刊, 41(1), 61–79, 2017。
12. 林開亮。解常係數線性微分方程和遞推關係的新方法 — 秦九韶和亥維賽的遺產。數學傳播季刊, 43 (2), 63–79, 2019。
13. 林開亮。從咸道老師夢得的數學題談起。好玩的數學, 2020 年 3 月 24 日。
14. 林智勇、易正明、許天維。以費氏數列表示的無窮級數和與收斂半徑。數學傳播季刊, 30(3), 53–65, 2006。
15. George Pólya and Gabor Szegö, Problems and Theorems in Analysis I, Springer, 1978. 有中譯本,《數學分析中的問題和定理》, 張奠宙、宋國棟等譯。上海 : 上海科學技術出版社, 1981。
16. V. S. Retakh and A. B. Sosinsky, A talk with I. M. Gelfand, *Quantum*, Jan-Feb, 1989. 有中譯文, 數學譯林, 第 4 期, 李錕譯, 340–347, 1990.
17. 徐樹方、高立、張平文。《數值線性代數》(第二版)。北京 : 北京大學出版社, 2013。
18. 張進安。2^n 在分母的級數收斂性質。數學傳播季刊, 43(3), 56–59, 2019。
19. 張進安。$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{F_i}{10^i}=\frac{10}{89}$ 的探源與推廣。數學傳播季刊, 44(1), 89–93, 2020。
20. 張鎮華。費氏數列與等比數列的交會處。數學傳播季刊, 44(2), 58–61, 2020。

—本文作者任教中國西北農林科技大學—