數學傳播 44卷3期, pp. 31-41

含二階線性遞迴數列之收斂級數

劉又中 · 薛昭雄

1. 前言

在數學傳播 2019 年第 3 期刊登的「2^n 在分母的級數收斂性質」中 (見文獻 [11]), 張進安老師給出了 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 的結果。例如當 $a_n=n^k$ 以及 $\{a_n\}$ 爲 Fibonacci 數列 $\{F_n\}$ 時的情況。他又在 2020 年第 1 期刊登了 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^n}=\frac{10}{89}$ 的推廣 (見文獻 [12]), 也給出了 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^{kn}}=\frac{10^k}{10^{2k}-10^k-1}$。同時張鎮華教授也在 2020 年第二期刊登了「費氏數列與等比數列的交會處」(見文獻 [13])。

在本文中, 我們將考慮 $\{a_n\}$ 爲二階線性遞迴數列的情形, 也同樣地用等比級數的方法, 將分母的 2^n 及 10^n 改爲更一般的 r^n。我們將給出級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{nk}}{r^{n+1}}$ 的公式以及這個級數收斂的條件, 其中 k 爲正整數且 $r\neq 0$ 爲實數。

2. 二階線性遞迴數列

定義 1. 二階線性遞迴數列$\{a_n\}_{n\geq 0}$是滿足

$$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2},\quad n\geq 2 \tag{1}$$

的數列, 其中 p 和 q 是固定的常數, $q\neq 0$。

只要給定初始條件 a_0、a_1 及遞迴關係式 (1), 即可決定整個數列, 很多常見的數列, 如等

差數列、等比數列、費氏數列都是二階線性遞迴數列的例子 (如下表, 參閱 [4])。

二階線性遞迴數列$\{a_n\}$	a_0	a_1	p	q
整數 $0,1,2,3,\ldots$	0	1	2	-1
等差數列 (首項爲a, 公差爲d)	a	$a+d$	2	-1
等比數列 (首項爲a, 公比爲r)	a	ar	$r+1$	$-r$
Fibonacci 數列	0	1	1	1
Lucas 數列	2	1	1	1
Fermat 第一型數列	1	3	3	-2
Fermat 第二型數列	2	3	3	-2
Pell 第一型數列	1	2	2	1
Pell 第二型數列	2	2	2	1

定理 1. 令 $\{a_n\}$ 爲滿足遞迴關係式 (1) 的二階線性遞迴數列。若 α 與 β 爲特徵方程式 $x^2-px-q=0$ 的兩根, 則

$$a_n=\begin{cases}(\dfrac{a_1-\beta a_0}{\alpha-\beta})\alpha^n-\Big(\dfrac{a_1-\alpha a_0}{\alpha-\beta}\Big)\beta^n, & \alpha\neq\beta;\\ na_1\alpha^{n-1}-(n-1)a_0\alpha^n, & \alpha=\beta。\end{cases}$$

定理 1 的詳細證明, 見文獻 [3] 或 [9]。

例 1. 令 $\{L_n\}$ 爲 Lucas 數列, 即 $L_0=2$, $L_1=1$, 且滿足遞迴關係式

$$L_n=L_{n-1}+L_{n-2},\ n\geq 2。$$

令 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 爲方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根, 直接計算定理 1 公式中的係數, 得

$$\frac{L_1-\beta L_0}{\alpha-\beta}=1,\qquad \frac{L_1-\alpha L_0}{\alpha-\beta}=-1。$$

因此我們有

$$L_n=\alpha^n+\beta^n,\qquad n\geq 0。$$

用同樣的方法, 也可以計算出 *Fibonacci* 數列 $\{F_n\}$ 的一般式

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},\qquad n\geq 0。$$ □

3. 主要定理

在我們的主要定理中, 會用到以下這個已知的結果:

引理 1. 若 $|t| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}。$$

定理 2. 令 $\{a_n\}$ 爲滿足遞迴關係式 (1) 的二階線性遞迴數列。若 α 與 β 爲 $x^2-px-q=0$ 的兩相異根, 且滿足

$$\max\left\{\left|\frac{\alpha^k}{r}\right|,\left|\frac{\beta^k}{r}\right|\right\} < 1。 \tag{2}$$

則

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{nk}}{r^{n+1}} = \frac{a_0 r - a_0\cdot\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta} + a_1\cdot\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}}{(r-\alpha^k)(r-\beta^k)}, \tag{3}$$

其中 k 爲正整數, $r \neq 0$ 爲實數。

證明: 由定理 1 及引理 1,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{nk}}{r^{n+1}} &= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(\frac{a_1-\beta a_0}{\alpha-\beta})\frac{\alpha^{nk}}{r^n} - (\frac{a_1-\alpha a_0}{\alpha-\beta})\frac{\beta^{nk}}{r^n}\Big] \\
&= \frac{1}{r}\Big[(\frac{a_1-\beta a_0}{\alpha-\beta})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{nk}}{r^n} - (\frac{a_1-\alpha a_0}{\alpha-\beta})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^{nk}}{r^n}\Big] \\
&= \frac{1}{r}\Big[\frac{a_1-\beta a_0}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha^k}{r}} - \frac{a_1-\alpha a_0}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{1-\frac{\beta^k}{r}}\Big] \\
&= \frac{1}{r}\Big[\frac{a_1-\beta a_0}{\alpha-\beta}\cdot\frac{r}{r-\alpha^k} - \frac{a_1-\alpha a_0}{\alpha-\beta}\cdot\frac{r}{r-\beta^k}\Big] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\Big[\frac{(a_1-\beta a_0)(r-\beta^k)-(a_1-\alpha a_0)(r-\alpha^k)}{(r-\alpha^k)(r-\beta^k)}\Big] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\Big[\frac{(\alpha-\beta)a_0 r - a_0(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}) + a_1(\alpha^k-\beta^k)}{(r-\alpha^k)(r-\beta^k)}\Big] \\
&= \frac{a_0 r - a_0\cdot\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta} + a_1\cdot\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}}{(r-\alpha^k)(r-\beta^k)},
\end{aligned} \tag{4}$$

故得證。 □

以上的情況是 $x^2-px-q=0$ 有兩相異根的情形, 若 $x^2-px-q=0$ 有重根, 也可以求出類似的結果。

引理 2. 若 $|t| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nt^n = \frac{t}{(1-t)^2}。$$

這個引理也可以用微積分證明, 不過以下的證明採用的是與文獻 [11] 中類似的方法。

證明: 令

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} nt^n = t+2t^2+\cdots+nt^n+\cdots,$$

則

$$tS=t^2+\cdots+(n-1)t^n+\cdots,$$

將以上兩式相減, 並將右方 t 的冪次相同的項合併, 可得到

$$(1-t)S=t+t^2+\cdots+t^n+\cdots=\frac{t}{1-t}。$$

以上的最後一個等式即是無窮等比級數的公式, 因此我們有

$$S=\frac{t}{(1-t)^2}。 \qquad \square$$

定理 3. 令 $\{a_n\}$ 爲滿足遞迴關係式 (1) 的二階線性遞迴數列。若 α 爲 $x^2-px-q=0$ 的重根, 且 $\left|\frac{\alpha^k}{r}\right|<1$, 則

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{nk}}{r^{n+1}}=\frac{a_0r-(k+1)a_0\alpha^k+ka_1\alpha^{k-1}}{(r-\alpha^k)^2}, \tag{5}$$

其中 k 爲正整數 $r\neq 0$ 爲實數。

證明: 由定理 1 及引理 2,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{nk}}{r^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nka_1\alpha^{nk-1}}{r^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(nk-1)a_0\alpha^{nk}}{r^{n+1}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nka_1\alpha^{nk-1}}{r^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nka_0\alpha^{nk}}{r^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0\alpha^{nk}}{r^{n+1}}\\
&= \frac{ka_1}{\alpha r}\sum_{n=1}^{\infty}n\Big(\frac{\alpha^k}{r}\Big)^n-\frac{ka_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}n\Big(\frac{\alpha^k}{r}\Big)^n+\frac{a_0}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\alpha^k}{r}\Big)^n\\
&= \frac{ka_1}{\alpha r}\cdot\frac{\frac{\alpha^k}{r}}{(1-\frac{\alpha^k}{r})^2}-\frac{ka_0}{r}\cdot\frac{\frac{\alpha^k}{r}}{(1-\frac{\alpha^k}{r})^2}+\frac{a_0}{r}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha^k}{r}} \qquad (6)\\
&= \frac{ka_1\alpha^{k-1}}{(r-\alpha^k)^2}-\frac{ka_0\alpha^k}{(r-\alpha^k)^2}+\frac{a_0}{r-\alpha^k}\\
&= \frac{ka_1\alpha^{k-1}-ka_0\alpha^k+a_0(r-\alpha^k)}{(r-\alpha^k)^2}\\
&= \frac{a_0r-(k+1)a_0\alpha^k+ka_1\alpha^{k-1}}{(r-\alpha^k)^2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

備註: 在 (3) 式右邊, 若固定 α, 並令 $\beta \to \alpha$, 由於

$$\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}=\lim_{\beta\to\alpha}\sum_{j=0}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j-1}=k\alpha^{k-1},$$

(3) 式右邊的極限值就會與 (5) 式相符。

例 2. 當 $a_n=n$ 時 $(n\geq 0)$, 即 $\{a_n\}$ 滿足

$$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2},\quad n\geq 2$$

以及初始條件 $a_0=0$, $a_1=1$, 此時特徵方程式 $x^2-2x+1=0$ 有兩重根 1。由定理 3, 我們可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nk}{r^{n+1}}=\frac{k}{(r-1)^2},\quad 當\ |r|>1。$$

例如代入 $k=1$, $r=2$, 就會得到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}=1$, 也因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$, 這就是文獻 [11] 的結果。 □

例 3. 當 $\{a_n\}$ 爲等差數列時, 假定首項爲 $a_0=a$, 公差爲 d, 即 $a_n=a+nd$。因爲 $\{a_n\}$ 滿足

$$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2},\quad n\geq 2。$$

同樣地根據定理 3 的公式, 我們有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a+nkd}{r^{n+1}}=\frac{a(r-1)+kd}{(r-1)^2},\quad |r|>1。$$

若代入 $r=2$ 時, 就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+nkd}{2^{n+1}}=a+kd。$$

當 $k=d=1$, $a=0$, 這就是例 2 的結果。 □

當 $k=1$ 時, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{r^{n+1}}$ 的公式可以再簡化:

推論 1. 令 $\{a_n\}$ 爲滿足遞迴關係式 (1) 的二階線性遞迴數列。若 $r\neq 0$ 爲實數, α 與 β 爲 $x^2-px-q=0$ 的兩根, 且滿足

$$\max\left\{\left|\frac{\alpha}{r}\right|,\left|\frac{\beta}{r}\right|\right\}<1,$$

則

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{r^{n+1}}=\frac{a_0(r-p)+a_1}{r^2-pr-q}。$$

證明: 由前面的定理 2 及定理 3, 不論 $x^2-px-q=0$ 有沒有重根, 即 $\alpha\neq\beta$ 或 $\alpha=\beta$, 我們都有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{r^{n+1}}=\frac{a_0r-a_0(\alpha+\beta)+a_1}{(r-\alpha)(r-\beta)},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{r^{n+1}}=\frac{a_0r-a_0(\alpha+\beta)+a_1}{r^2-(\alpha+\beta)r+\alpha\beta}。$$

再由二次方程式根與係數的關係

$$\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=-q,$$

可推得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{r^{n+1}}=\frac{a_0(r-p)+a_1}{r^2-pr-q}。$$ □

定義 2. 一個二階線性遞迴數列 $\{a_n\}$ 如果滿足 $a_0=0$ 以及 $a_1=1$, 則我們稱之爲廣義 Fibonacci 數列。

推論 2. 若 $\{a_n\}$ 爲滿足 (1) 的廣義 Fibonacci 數列, 其中 $x^2-px-q=0$ 的兩根爲 α,β, $r\neq 0$ 爲實數, 且滿足

$$\max\left\{\left|\frac{\alpha^k}{r}\right|,\left|\frac{\beta^k}{r}\right|\right\}<1。$$

則

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{nk}}{r^{n+1}}=\frac{a_k}{(r-\alpha^k)(r-\beta^k)},$$

其中 k 爲正整數。

證明: 當 $\alpha\neq\beta$, 由定理 1, $a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$。在第 (3) 式代入 $a_0=0$, $a_1=1$, 可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{nk}}{r^{n+1}}=\frac{\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}}{(r-\alpha^k)(r-\beta^k)}=\frac{a_k}{(r-\alpha^k)(r-\beta^k)}。$$

如果 $\alpha=\beta$, 由定理 1, 我們有 $a_n=n\alpha^{n-1}$, 在第 (5) 式中代入 $a_0=0$, $a_1=1$, 可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{nk}}{r^{n+1}}=\frac{k\alpha^{k-1}}{(r-\alpha^k)^2}=\frac{a_k}{(r-\alpha^k)^2},$$

故得證。 □

例 4. 令 $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$, $n \geq 0$, 即 $\{u_n\} = \{0, 1, 4, 15, 56, \ldots\}$。$x^2 - 4x + 1 = 0$ 的兩根爲 $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ 及 $\beta = 2 - \sqrt{3}$, α 與 β 滿足根與係數關係式 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 1$。因此由推論 2 我們有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{nk}}{r^{n+1}} = \frac{u_k}{r^2 - (\alpha^k + \beta^k)r + 1}, \tag{7}$$

其中收斂的條件爲 $|r| > (2 + \sqrt{3})^k$, r 爲實數。經由一些計算, 可得到

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 14, \\ \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha + \beta) = 52, \\ \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = 194。 \end{aligned} \tag{8}$$

事實上由 Girard-Waring 公式 (見文獻 [2]; 以及文獻 [6], 第 454 頁, 定理 279), 我們也可以直接對較大的 k 值, 算出 $\alpha^k + \beta^k$:

$$\begin{aligned} \alpha^k + \beta^k &= \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(k-m-1)!k}{(k-2m)!m!} (-1)^m (\alpha + \beta)^{k-2m} (\alpha\beta)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{k}{k-m} \binom{k-m}{m} (-1)^m 4^{k-2m}。 \end{aligned} \tag{9}$$

對於 $k = 1, 2, 3, 4$, 我們可將 (7) 式更明確地寫下來:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r^{n+1}} &= \frac{1}{r^2 - 4r + 1}, & \text{當 } |r| > 2 + \sqrt{3}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{2n}}{r^{n+1}} &= \frac{4}{r^2 - 14r + 1}, & \text{當 } |r| > 7 + 4\sqrt{3}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{3n}}{r^{n+1}} &= \frac{15}{r^2 - 52r + 1}, & \text{當 } |r| > 26 + 15\sqrt{3}; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{4n}}{r^{n+1}} &= \frac{56}{r^2 - 194r + 1}, & \text{當 } |r| > 97 + 56\sqrt{3}。 \end{aligned}$$

□

例 5. 令 $\{a_n\}$ 爲滿足遞迴關係式 (1) 的二階線性遞迴數列。若 $a_1 = \alpha a_0 \neq 0$, 其中 α 爲 $x^2 - px - q = 0$ 的根, 則代入定理 1 的公式, 可推得 (不論 $x^2 - px - q = 0$ 有沒有重根) $a_n = a_0\alpha^n$, 因此 $\{a_n\}$ 爲等比數列。若 k 爲正整數, $\left\{\dfrac{a_{nk}}{r^{n+1}}\right\}$ 亦爲等比數列, 其公比爲 $\dfrac{\alpha^k}{r}$, 所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{nk}}{r^{n+1}}$ 收斂若且唯若 $\left|\dfrac{\alpha^k}{r}\right| < 1$。

反過來說, 如果已經知道 $\{a_n\}$ 是等比數列, 同時滿足遞迴關係式 (1) 的二階線性遞迴數列, 設其公比爲 d, 在 (1) 式中令 $n=2$, 可推得

$$a_0d^2 = p(a_0d) + qa_0。$$

兩邊除以 a_0 之後, 即得 $d^2 = pd + q$, 因此 d 爲 $x^2 - px - q = 0$ 的根。 □

4. 結語

本文的定理不僅可以推導出以前作者們的工作, 只要將 $\{a_n\}$ 代入不同的二階線性遞迴數列, 也可以得到新的收斂級數。例如令 $a_n = F_n$ 爲 Fibonacci 數列時, 我們有

推論 3. 當 $|r| > \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$, r 爲實數, k 爲正整數,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{nk}}{r^{n+1}} = \frac{F_k}{r^2 - L_k r + (-1)^k}, \tag{10}$$

其中 $\{L_n\}$ 爲 Lucas 數列。

證明: 令 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 爲 $x^2 - x - 1 = 0$ 之兩根, 已知 $\alpha\beta = -1$, 另外在例 1, 我們已經算出

$$L_k = \alpha^k + \beta^k。$$

再由推論 2,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{nk}}{r^{n+1}} &= \frac{F_k}{(r-\alpha^k)(r-\beta^k)} \\ &= \frac{F_k}{r^2 - (\alpha^k + \beta^k) r + (\alpha\beta)^k} \\ &= \frac{F_k}{r^2 - L_k r + (-1)^k}, \end{aligned} \tag{11}$$

故得證。 □

文獻 [5] 及 [16] 的結果, 就是這個推論的情形。事實上, 我們的主要定理推廣了這兩篇文獻的結果。

給定實數 r 及二階線性遞迴數列 $\{a_n\}$, 由定理 2 (或定理 3) 的條件, 我們可以確定哪些 k 值會使級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{nk}}{r^{n+1}}$ 收斂[1]。例如在 (10) 式中, 若 $r=2$, 則只有 $k=1$ 能使級數收斂, 此

[1]在定理 2 及定理 3 未涵蓋的情況中, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{nk}}{r^{n+1}}$ 大多都會發散, 基於篇幅考量, 這部份我們留給讀者自行驗證。

時 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=1$, 因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^n}=2$, 這即是文獻 [11] 當中的結果。

而當 $r=10$, 則在 (10) 式中, 級數收斂若且唯若 $k\leq 4$。若代入 $r=10$, 以及 $k=1,2,3,4$, 可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^{n+1}}=\frac{1}{89},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{2n}}{10^{n+1}}=\frac{1}{71},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{3n}}{10^{n+1}}=\frac{2}{59},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{4n}}{10^{n+1}}=\frac{3}{31}。$$

這些等式與文獻 [5] 中所得到的一致, 其中 $k=1$ 的情形也是在文獻 [10]、[12] 中都有的結果, 而 $k=2$ 的等式也是文獻 [16] 的結果。

另外我們可以計算出

$$\frac{1}{89}=0.0112359\cdots$$

可以看到 $\frac{1}{89}$ 的前六位小數恰好就是 F_0 至 F_5, 這是因爲 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^{n+1}}=\frac{1}{89}$, 然而從小數點後第七位開始, 會受到進位的影響而與 F_n 的值不同 (參閱文獻 [1]、[8]、[12]、[14])。同樣地, 若考慮 $r=100$, 我們會看到更多的 F_n 排列成小數:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{100^{n+1}}=\frac{1}{9899}=0.0001010203050813213455590\cdots,$$

其中對於 $0\leq n\leq 9$, $\frac{1}{9899}$ 的小數點後第 $2n+1$ 及第 $2n+2$ 位組成的二位數恰好就是 F_n (參閱文獻 [5]、[12])。

我們也可以考慮 $\{a_n\}$ 爲其他二階線性遞迴數列的情形, 以 Lucas 數列 $\{L_n\}$ 爲例:

推論 4. 當 $|r|>\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$, k 是正整數,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{nk}}{r^{n+1}}=\frac{2r-L_k}{r^2-L_kr+(-1)^k}。\tag{12}$$

證明: 令 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 爲 $x^2-x-1=0$ 之兩根, 由定理 2 之結果,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{nk}}{r^{n+1}}=\frac{2r-2\cdot\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}}{(r-\alpha^k)(r-\beta^k)},$$

又因爲 $L_k=\alpha^k+\beta^k$, $F_k=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}$, $\alpha\beta=-1$, 前面這個式子可改寫成

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{nk}}{r^{n+1}}=\frac{2r-2F_{k+1}+F_k}{r^2-L_kr+(-1)^k},$$

最後由

$$2F_{k+1}-F_k=L_k,\ k\geq 0$$

得證。最後的這個恆等式可以由數學歸納法證明, 或由例 1 之中 L_n 與 F_n 的公式證明。 □

例 6. 在 (12) 中, 令 $r=2$, 可得到 $k=1$ 時, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{2^{n+1}}=3$, 而當 $k\geq 2$ 時, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{nk}}{2^{n+1}}$ 發散。

如果令 $r=10,\ k=1,2,3,4$, 會得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{10^{n+1}}=\frac{19}{89},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{2n}}{10^{n+1}}=\frac{17}{71},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{3n}}{10^{n+1}}=\frac{16}{59},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{4n}}{10^{n+1}}=\frac{13}{31}。$$

而當 $k\geq 5$ 時, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{nk}}{10^{n+1}}$ 發散。

若令 $r=10^m$, 其中 m 爲正整數, 我們有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{nk}}{10^{m(n+1)}}=\frac{2\cdot 10^m-L_k}{10^{2m}-L_k\cdot 10^m+(-1)^k}, \tag{13}$$

這也是文獻 [7] 及 [15] 提到的結果。若在 (13) 式中令 $m=2,\ k=1$ 我們會得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{100^{n+1}}=\frac{199}{9899}=0.020103040711118294777\cdots, \tag{14}$$

而 $L_n=\{2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,\ldots\}$, (14) 式中小數的前 18 位就是將 L_0 至 L_8 分別寫成二位數再依序排列的樣子。 □

參考文獻

1. B. M. M. de Weger, A curious property of the eleventh Fibonacci number, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 25(1995), no. 3, 977-994.
2. H. W. Gould, The Girard-Waring power sum formulas for symmetric functions and Fibonacci sequences, *The Fibonacci Quarterly*, 37(1999), no. 2, 135-140.
3. T-X He and Peter J-S Shiue, On sequences of numbers and polynomials defined by linear recurrence relations of order 2, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2009, Articles ID 709386.
4. A. F. Horadam, *Special properties of the sequences* $W_n(a,b;p,q)$, *The Fibonacci Quarterly*, 5(1967), no. 5, 424-434.
5. Richard H. Hudson and C. F. Winans, A complete characterization of the decimal fractions that can be represented as $\sum 10^{-k(i+1)}F_{\alpha i}$, where $F_{\alpha i}$ is the αith Fibonacci number, *The Fibonacci Quarterly*, 19(1982), no. 5, 414-421.

6. Rudolf Lidl and Harald Niederreiter, *Finite Fields.* volume 20 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1997. With a forward by P. M. Cohn.
7. Pin-Yen Lin, *The general solution to the decimal fraction of the Fibonacci series*, *The Fibonacci Quarterly*, 22(1984), no. 3, 229-234.
8. Calvin T. Long, The decimal expansion of 1/89 and related results, *The Fibonacci Quarterly*, 19(1981), no. 1, 53-55.
9. I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 5th edition, 1991.
10. Fenton Stancliff, *A curiosity property of* a_{ii}, *Scripta Mathematica*, 19(1953), 126.
11. 張進安。2^n在分母的級數收斂性質。數學傳播季刊, 43(3), 56-59, 2019。
12. 張進安。$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{F_i}{10^i}=\dfrac{10}{89}$ 的探源與推廣。數學傳播季刊, 44(1), 89-93, 2020。
13. 張鎮華。費氏數列與等比數列的交會處。數學傳播季刊, 44(2), 58-61, 2020。
14. 林炳炎。$\dfrac{1}{89}$ 奇妙的費氏數列之一。數學傳播季刊, 6(2), 34-38, 1982。
15. 林炳炎。有關費氏數列之無窮級數的分數和。數學傳播季刊, 7(1), 27-33, 1983。
16. 林智勇, 易正明, 許天維。以費氏數列表示的無窮級數和與收斂半徑。數學傳播季刊, 30(3), 53-65, 2006。

—本文作者劉又中爲美國克萊門森大學(Clemson University) 博士生, 薛昭雄爲美國內華達大學數學系教授—