

# 希臘真的是數學的誕生地？

Charlotte-V. Pollet (博佳佳)

## 引論

我們在學校都學過泰利斯定理與畢達哥拉斯定理，我們也認為歐幾里德就是幾何學的奠基者。在胡賽爾 (Husserl) 看來，數學在希臘如同奇蹟般的誕生，正是西方科學理性的出發點。這是個將世界當作數學，並且以抽象工具掌握世界的計畫，今天的我們則是這一切的繼承人。在這部關於理性進展的大書中，伽利略（「自然是一本用數學語言寫成的書」）與笛卡兒是其中的重要主角。這樣的理性觀也延續到漢娜鄂蘭 (Hannah Arendt)，在《人的境況》一書中，她將現代性定義為從宇宙的觀點、從觀念的天空去看地球的嘗試，並且透過觀念的體系去掌握世界。亞歷山大夸黑 (Alexandre Koyré)，這個翻轉了科學史研究的人，也為這個理性的出生證明背書：「因此，並不是埃及的測地員（希臘文為 *harpedonaptês*，意思是手持繩尺者），也就是負責測量尼羅河谷田地的這些人發明了幾何學：而是希臘人，雖然他們沒有什麼值得測量的東西；而測地員滿足的是找到公式。同樣地，並不是巴比倫這些相信星象學的人 [……] 建構出行星運動的系統；而是，還是他們，這些不相信星象學的希臘人；巴比倫人滿足於發明計算方法，同樣是公式，不過是極為精巧的。按照這樣的觀點，我認為，我們可以很好地解釋為什麼科學沒有在波斯或中國誕生與發展 [……]，也可以解釋為什麼科學能夠在希臘誕生與發展 [……]」<sup>1</sup> 不過他還是做了點讓步，他說，沒有人能掌握完全的說明。

如果這樣的說法是錯的呢？今天已有不少古代科學史的專家，正專注於數學「誕生」的歷史書寫。他們發現數學並不是只有一個，而是有很多搖籃。甚至認為，根本就沒有數學「誕生」這回事，因為「誕生」這樣的概念並不適用於數學。此外，希臘的數學也與我們以往所想像的有所不同 …

科學史家克莉絲汀·普魯斯特 (Christine Proust) 注意到：「在圖侯-東將 (François Thureau-Dangin) 與諾伊格鮑爾 (Otto Neugebauer) 於 1934 到 1949 年這段時間所彙整出版的楔形文字數學的第一個重要版本後，古代科學史的研究應該會面臨一個真正的革命。這些年代久遠的文獻，大部分能追溯到西元前第二個千年。這些讓科學研究者看到，早在歐幾里德的

<sup>1</sup>《科學思想史研究論文集》，法文版第 397-8 頁。

幾何原本一千年前,就有了高度發展的數學。」但我們不能不說,這些文獻的影響是有限的。儘管有華道安 (Donald B. Wagner)、霍伊魯普 (Jens Høyrup)、普魯斯特 (Christine Proust)、吳文俊、林力娜 (Karine Chemla)、克羅茲 (Pascal Crozet)、帕特 (François Patte)、史尼瓦 (M.D. Srinivas)、阿嘉特·凱勒 (Agathe Keller) 這些人的研究 (僅僅是名單中的一部分),人們還是認為數學起自於泰利斯與畢達哥拉斯。為什麼會對此堅信不移?

歷史學家林力娜 (Karine Chemla) 認為,許多人仍然認為數學源自於泰利斯與畢達哥拉斯,是因為他們認為數學證明是希臘人發明的,而只有依照公理 — 演繹程序所呈現的步驟,才能夠當作是數學證明。也就是說,演繹法與計算公式被當作兩種完全不同的東西,而只有建立在公理 — 演繹框架下的演繹證明,才是唯一可能的數學證明。一個很普遍的觀念是,計算公式僅適用於個例,並且沒有重要的理論價值;數學證明才是真正重要的課題。正如哈金 (Hacking) 所強調,數學證明深刻啟發了歐洲的哲學與神學。他看出數學證明的經驗「感染」了哲學的許多核心領域,而這些與數學並不見得有什麼關聯。問題在於,他所說的證明僅止於公理 — 演繹式的,對他來說這也是唯一可能的方法。

另一個原因是,儘管有巴什拉 (Bachelard) 的警戒,科學史的研究仍然帶有神學色彩:科學的發展是進步的、有目的的,而這個目的就是現代科學。科學史就是這個進步的軌跡,無論是直線或螺旋式的進步。康德的歷史哲學很清楚是一種目的論的學說,他同樣認為泰利斯是數學證明與幾何之父。在法國高中三年級的教材中,我們讀到:「數學,從人類理性史上所能追溯到的最早時期起,就在令人欽佩的希臘民族中走上了科學的可靠道路。[……] 第一個論證等腰三角形的人他可以叫泰利斯,也可以叫隨便那個名字,他的心中肯定閃現過一道亮光,開創過一種新見」<sup>2</sup>。康德的想像是建立在他那個時代所能發現的最早文獻,而這些是來自希臘化時代的。對他而言,數學的誕生與科學史的奠基是重合的。

十九世紀的史學家並沒有真的主張,數學證明絕對是希臘的。但正如夏雷特 (François Charette) 所說,他們也堅持「東方」數學的個例性與零散性。數學史的內容就因此被區分為東方/西方,或是西方/非西方,一邊是公理 — 演繹法,另一邊則是直覺、歸納、計算公式等等。這樣的區別一開始是在文藝復興時代,到十九世紀殖民政治的脈絡下達到高峰。另一方面,這也和科學的體制化與專業化有關。科學家,尤其是從事數學相關工作的,找到自己的定位、方法,並且在更強的意義下形成了「科學社群」。科學社群的意義、對相異性的排斥、標準化歷史的建立,這些是同時並行的。

資料來源的先時性成了問題的關鍵。能到找到的最早文獻是希臘的……因此數學就應該是希臘產物。事實上,必須要考慮文獻的來源以及文獻傳遞的可能形式。既然談到了「文獻」,就必須進一步探討「什麼是文獻」這個問題。「沒有明顯的證據並不是明顯沒有證據」。而另一方

<sup>2</sup>康德《純粹理性批判》第二版序言,王玖興譯。

面，科學史研究所使用的文獻資料，是經過選擇與解讀的結果，夸黑早已弔詭地提出這個看法。

我們還能看到另一個現象：學校教材或科普著作在談到科學史的時候，容易將不同的時空位置貼上同一個地理標籤，讓這些不同時空位置看來有某種同一性。舉例來說，當我們談到巴比倫數學的時候，很容易忽略「古巴比倫」（約在西元前1600~2000年）與塞琉古王朝（西元前311~141年）之間的區別，也不會去考慮巴比倫的不同地區是否有各自具有特色。而在談論中國的「傳統數學」時，我們則把漢朝與宋朝並列，彷彿在一千年中不曾發生過任何變化。我們可能不會去想，從跨越了兩千年、並且地域極為廣袤的文明中，摘取出一些內容，籠統地放入諸如「古代文明」、「非西方科學」的簡短章節中，能夠告訴我們多少歷史的內容。而另外一些書籍，則是把古代文獻中的內容，拆散分開在「計算操作」、「初階幾何」、「線性方程」等等標題下，讀者看不到每個時空的數學多樣性，也看不到這學與社會歷史的關連。關於這點，我們有許多東西可以學。我們不認為兩千年間沒有發生任何變化，也不認為把一切簡化為短短幾頁。我們通常所說的「文明」或「文化」，實際上是工作、語言、尤其是實踐等各個領域文化的組合。這裡要注意的是，我們所說的「實踐」指的是進行某個活動的具體方式，而不是將某些想法付諸應用。數學首先是人們所做與所談的東西，這正是〈古代世界的科學〉(Sciences in Ancient World) 這個歐洲研究計畫所致力於呈現的。

在進一步觀察其他地理區域時，我們可以提出這些問題：是否有不同的方式去做數學？換句話說，如果結果是相同的，為什麼在不同的「傳統」之間，解題、幾何圖形、證明、一般性這些東西會有不同的方式，並且占有不同的位置？如果是這樣，我們能不能以另外的方式重新閱讀希臘文獻？多少希臘文獻如實呈現了當時希臘人所做的證明？這些文獻是什麼時候，並且如何來到我們的教材中？「畢氏定理」會不會有其他的形式？歷史學家重新閱讀了以往所忽略的計量與學院文獻，以數學實踐的觀點重新解讀數學史，同時也反對在演繹法與計算公式之間畫出鴻溝。

## 美索不達米亞：不懂幾何者，也不得入此門

要讀到目前所能找到最古老的文獻，就必須前往美索不達米亞。這裡有兩千多片來自不同地方與不同年代的黏土板。大部分的數學黏土板來自於古巴比倫時期（西元前第二個千年的前幾個世紀），另一組黏土板則是西元前第一個千年，內容也有所不同。許多黏土板記載的是計算方法，因此對非專家而言可能是重複的內容。不過我們可以找到一些重大發現，例如進位法、勾股數的一般化，或是二次方程式的解。這些黏土板能告訴我們不少另一個歷史的事情……

科普書籍與學校教材把巴比倫的六十進位法，當作是這個文明最具代表性的最高產物。不過六十進位法並不是從天上掉下來的。某些書籍將這個系統當作是「發明」，也有不少人堅持這些數學記數方法的同一性。將數學上的發現當作是因應現實生活所需的結果，在數學史中是很常見的觀點。

有不少問題在這裡集結。第一個是，在計算方法的文獻中，僅僅看到一個個的數字表，而完全無法得知相關的社會文化脈絡。而這些數字表完全不能告訴我們任何事，可能是因為這裡只有一個實用目的。另一個問題是，將這些數字表所用的記數系統，當作是一個地理區域或「文明」的呈現。

目前所能獲得的最早文獻，可以上溯至西元前第四個千年的烏魯克城 (Uruk)，這些資料讓我們看到社會階層的產生以及政治與行政組織的複雜化。我們也看到依照事物性質 (穀物、油、動物、時間等等) 而制定的各種計數與計量系統，這些伴隨著一個試圖呈現語言字彙的書寫系統而出現。黏土板所記載的內容最主要的部分是計數資料。最古老的記數方法是用不同符號來代表 1, 10, 60, 600, 3600 et 36000 這些數字。我們所說的六十進位法，是以 10 和 6 為進位單位的替換記數系統 (羅馬記數法則是以 2 與 5 作為進位單位的替換記數系統，但通常被認為是十進位法)。計算方法的系統並不是六十進位，而是與六十進位相容。由此我們能看到，當時的情形比想像中要更為複雜。

西元前第三個千年，烏魯克僅僅是能為我們提供研究資料的衆多城邦之一，不過考古學家卻找不到這個時代的黏土板。黏土板在西元前 2250 年重新出現，當時的城邦的書記員，將自己定位為社會的菁英分子。我們在這個年代發現了以應用題來呈現數學知識的最早樣本。不過這裡有的卻是一些不切實際的運算。例如：把穀倉裡面 115 萬 2 千「升」的大麥，以每人 7「升」的方式分給工人，得到的答案是可以分給 164,571 人，這個數字卻遠遠超過當時的城邦人口。這裡並沒有出任何差錯，解答問題的技術性，是書記員有意建立起來的寫作文化：透過記載一個不會在現實生活所用到的技術，來展現他們工作的半自主與獨立性。廟宇的大祭司可以為自己的職位感到驕傲，書記員也能如此：他們無懈可擊地掌握了 (也就是能夠處理龐大的數量) 廟宇的各項會計工作。這裡我們要將文化 — 文明的概念分解為認知文化的諸多概念，並且避免將數學的實用的功能簡化為單純的實用主義。一個計算公式其實能給歷史學家帶來更多社會史方面的資訊。也就是說，數字會說話！

許多記載行政與經濟資料的黏土板，討論的是計算地理區域的問題。但這裡比較少關於數學演算程序的記載。這裡的文本是一個用以進入數學工作的媒介，如同一個實用的知識，並且與書記員的培訓相關。這裡並不是描述性的文字，用來保存與教授數學演算程序。能看到的是一些問題：告訴你直角三角形的面積與一個直角邊長，讓你算出另一個直角邊長。這看起來是個很實用的問題，但問題是，沒有土地的測量員或徵稅者會在工作中碰到直角三角形。

霍伊魯普 (Jens Høyrup) 發現到，如果從幾何與代數的實用眼光來看，就可以重新解讀黏土板上以楔形文字記載的數學問題。這類型的問題有點像代數，也就是得以讓我們解決正方形或長方形的長度或面積的技術，方法則是表面積的剪貼以及比例運算。

這些問題在過去不為人所注意，因為已經有了現代化的表現方式。我們使用二十世紀的代

數語言去「翻譯」古代數學，得到的結果就是以同一性的眼光去看古代數學。文化與語言學的面向也因此被現代符號系統解消。

例如，古巴比倫黏土板 BM 13901 的第一個問題，包含了 24 個關於長方形與正方形的問題。在不同的解釋下，也會有不同的翻譯。

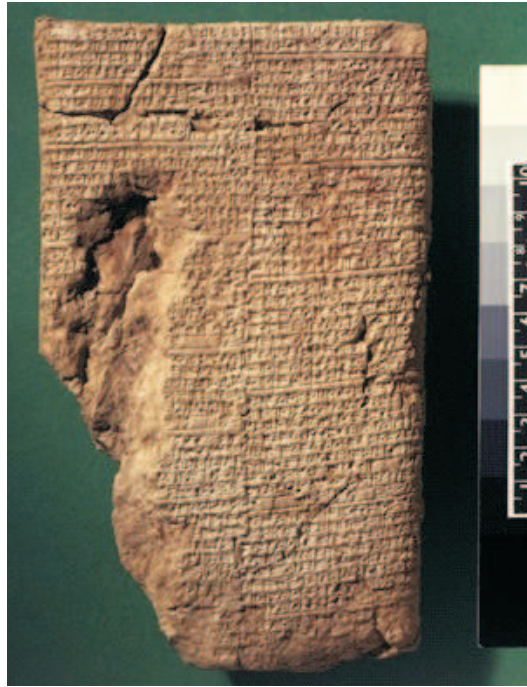


圖 1. 黏土板編號 BM 13901。來源：大英博物館。

黏土板 BM 13901 號，問題 1，圖侯 — 東將的翻譯 (1936 :1)：

我把正方塊的面積與邊長相加：45'。

你給出一，這是單位。

你將一分為二：(30)'。

你交乘 [30'] 與 30'：15'。

你將 15' 加到 45'：一。

這是一的方塊。

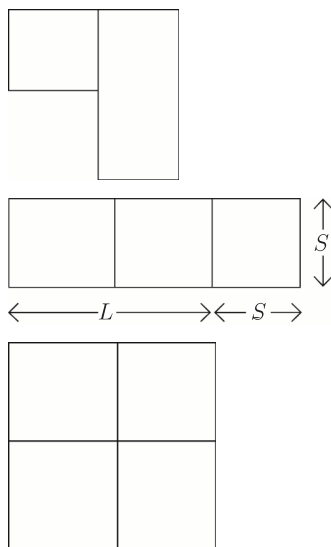
你從一減去你交叉的 30'：30'，這是邊長。

$$x^2 + x = 45'$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 45'} - \frac{1}{2} = 30'$$

黏土板 BM 13901 號, 問題 1, 霍伊魯普的翻譯 (2010 : 39) :

1. The surface and my confrontation I have accumulated: 45' is it. 1, the projection ( $L$ ),  
此平面與我的對接, 我累積得: 45' 是它。一, 投射 ( $L$ )。
2. You posit. The moiety of 1 ( $L$ ) you break, 30' and 30' you make hold each other.  
你放置。一 ( $L$ ) 的部分你截斷, 30' 與 30' 你使它們互相把握。
3. 15' to 45' you append: by 1, 1 is the equalside. 30' which you have made hold.  
15' 到 45' 你附加: 由一, 一是其等邊。30' 是你已使其把握。
4. In the inside of 1 you tear out: 30' the confrontation ( $S$ ).  
從一的內部你扯出: 30' 即對接 ( $S$ )。



普魯斯特注意到, 第一個翻譯著重的是現代讀者所熟悉的優雅與清晰, 第二個翻譯則著重對原文的忠實。兩個翻譯都呈現隱藏其中並且指引演算程序的推理。在霍伊魯普的譯文中, 演算程序包含了對該程序的證明。這些問題並不含有幾何學, 至於基礎代數的技術似乎是熟知並且普遍的, 不過只有在解決複雜的問題時才會出現在作品中。依照霍伊魯普的說法, 這些文獻多半以謎語的方式開始。我們還能看到不同的職業傳統, 例如土地測量員或是流動商人。

這裡許多的幾何問題可以用幾何語言去重新解讀。此外我們也在不同的黏土板上發現畢達哥拉斯數<sup>3</sup>。這讓我們難以肯定幾何學是誕生於希臘。

<sup>3</sup>在 IM 55357 號的黏土板中, 有一個切割直角三角形的問題。三角形三邊的比例是畢達哥拉斯數 3 : 4 : 5, 儘管沒有被用在幾何計算的剪貼程序中, 也呈現在比例運算的程序中。在 Tell Dhība'i 發現的 Db-146 文獻, 以及 1775 的其他文字, 包含了畢氏定理抽象詞彙的片段。一般規則 (亦即不僅僅是 3 : 4 : 5) 應該是很通常的。YBC 7289 號黏土版, 是我們所知最早的關於平方根的近似值的記載, 現代數學用  $\sqrt{2}$  表示, 包含了一個從對角線切割的正方形圖形。這很可能是由巴比倫第一王朝的書記員所記載, 大約在西元前 1900 至 1600 年之間。

## 希臘：翻譯即背叛

以公理——演繹法將數學呈現為一門學科，毫無疑問是希臘人的發明。1975年，溫古魯 (Sabetai Unguru) 建議歷史學家用這樣的觀點去重寫希臘數學史。他認為希臘人所做的並不是我們所謂的「數學」，同時必須以不同方式去重新解釋歐幾里德那本巨著的標題：「元素」(Les éléments, 中譯書名為《幾何原本》)。閱讀希臘文獻將會是年代錯置的。從唐內里 (Tannery) 與佐伊登 (Zeuthen) 開始，人們將希臘人視為具有代數形式的幾何學之父。這是因為代數演算一直隱藏在幾何學的背影。

這是以現代的符號語言去翻譯希臘文獻所造成的影響。符號語言將原本證明的邏輯結構表現得更清楚也更有說服力，但也讓古代的幾何學家說了一些他們沒過說的東西。這樣的現象並不是最近才有的。例如，對希臘人的抽象能力產生誤解的一個主要原因就在於，十六世紀的法國數學家韋達 (François Viète) 將 arithmos (事物的數目) 翻譯為 nombre (數字)。事物的數目並不是抽象而符號化的東西。數目必須與幾何的觀念相互結合，而不是外在於一切事物的抽象獨立存在。對歐幾里德而言，數字是給定的幾何單位，用來測量一些定量的單位，而不是有關抽象大小的概念。文字的使用意味著 arithmos 並不是用來指稱一般範疇的符號。

因此必須注意，希臘文獻中的一般性，是歷史上一連串的翻譯工作所後製出來的。歐幾里德固然是希臘人，但他的著作也同時存在於阿拉伯文、拉丁文、希伯來文以及歐洲各地的文字，並且是這些地方的數學教學的核心。然而在這些地方流傳的各種語言版本中，歐幾里德也獲得不同的生命。原始的文字在不同的時空下做出了不同的改變。事實上，我們能掌握的都只是二手文獻，幾乎沒有任何資料能被確認為出自歐幾里德或其他希臘人之手。在柏拉圖、亞里士多德、歐幾里德之前的希臘數學家，他們的工作幾乎沒有任何人知道。除了前蘇格拉底時期的某些殘篇片段，我們對希臘學術的認識都是出自晚期註釋者的編寫，之後再經由後世的翻譯工作流傳下來。

我們現在要問，波羅尼烏斯 (Apollonius)、歐幾里德、亞里士多德或普羅克洛 (Proclus) 使用「元素」這個字的時候，有什麼用意。「元素」首先是一個單一、簡單、不可分，因此是普遍的與內在的東西。在認識「元素」之前，必須先認識整體。因此談論「元素」是一個哲學歷程，目的在於認識自然的核心。幾何學是什麼？難道不是關於空間與其性質的思考？溫古魯提醒我們，希臘數學嚴格說來是一門幾何學，其發展是要接近畢達哥拉斯所謂的和諧，也就是算術、幾何、音樂與天文形成一個由比例與和諧所支配的整體。這樣的數學與西方的現代數學是完全不相同的。在把泰利斯與畢達哥拉斯當作現代數學之父時，我們失去了他們所要表達的哲學面向。數學是文化的一種映射，而不是獨立存在於讓它們得以發展的時空背景外。

這裡有些東西看起來有點弔詭：希臘數學的文獻幾乎是不含有幾何圖形的，而幾何卻在這門最早出現的學科中，占有最重要的地位。



圖 2. 幾何原本第二卷命題 5。手抄本的年代在西元後若干年。這裡含有一個最原始的完整圖形。來源：美國賓州大學。

直到目前，數學史的編纂者總是傾向於協助抄寫者去改進原有的幾何圖形：修訂角度、畫上直線，或是修改他們眼中的錯誤，因為他們認為只有自己的東西才是正確的。如果用古代語言學家的方法去研究這些幾何圖形，也就是將這些嚴格視為文獻的一部分，而不是原文以外的東西，歷史學家就能重新調整我們從科學史中所讀到的東西。齋藤憲 (Ken Saito) 注意到，這些文獻中的三角形都是等邊的。我們也注意到，歐幾里德幾何的現代版本以及我們的數學教材，會選擇任意的三角形來呈現三角形的一般性質。我們並不認為這些是抄寫者所犯的錯誤，而把這些當作一般性的實踐在歷史中經歷到的改變。

1999 年，內茲 (Reviel Netz) 以古代語言學的方法研究了古代的數學文獻，認為圖形的實作並不是記錄在文本上，而是畫在其他地方 (黏土板，沙塚)，用來輔助幾何的討論。這解釋了為什麼在文獻中幾乎看不到圖形。在內茲看來，希臘演繹思想的根源在於對幾何圖形的討論。公理 — 演繹法這種證明的發展，首先是用來說明圖形本身的性質以及圖形之間的關係。甚至在不使用圖形也能解題的情形下，也會用上圖形。圖形是多餘的，有時候甚至是不可能的。

事實上，我們所畫的幾何圖形，不可能讓我們在歸謬證明中畫出其中的荒謬之處。如果照著歐幾里德幾何原本的命題 III.10，要證明一個圓與另一個圓不能相交多於兩點，就必須畫出這個明顯錯誤的圖：



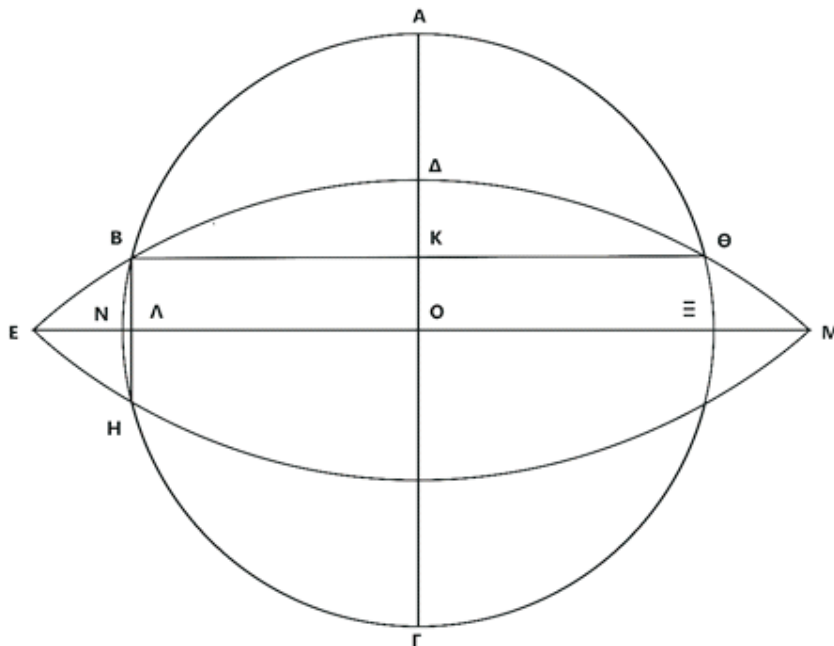


圖 3. 幾何原本命題 III.10 的插圖。

我們假設兩個圓可以交會於多於兩點 (此處是四點), 就會得到一個荒謬的結果。證明的進行是建立在幾何圖形上的。這個奇怪的圖形, 正好證明了這樣的圖形並不存在。呈現在我們眼前的圖形是一種障眼法、錯覺, 僅僅存在於證明的過程中。這能讓我們重新討論數學對象的本體論, 並且指出一個解讀這類圖形的特定認知脈絡。內茲認為, 在希臘一般性的實踐, 就是必然性的重複。一般性與必然性被鑄鑄在一個特別的認知脈絡中 (並不是一個數學理論)。這些認知是由圖形解說文字的出現以及用來談論文字段落的特別語言所形塑出來。中國或美索不達米亞的圖形並沒有以同樣的方式註記上文字、命名、編碼, 而這些圖形呈現了其他形式的認知。我先前談論過, 要解讀中國中世紀的幾何圖形, 需要一個變形的視覺化的實踐。一個十世紀的中國數學家必須能夠想像圖形是可動的, 並且可以和其他圖形結合。這種要求展現另一種認知能力的實踐, 這在當時的時空脈絡有其特殊意義。

## 中國：證明的圖形

將亞洲大陸排除在科學史的線性發展外, 原因之一在於, 人們認為美索不達米亞、埃及或中國的文獻中所有的「僅僅」是計算公式: 也就是說, 針對一些實用目的所開的數學處方, 沒有啟迪思考的目的, 而這一切都能夠被現代的數學重新改寫。我們也能經常讀到, 中國數學既沒有證明, 也沒有對一般性的認識。林力娜的工作, 為我們翻轉了這樣的刻板印象。我們再一次看到, 幾何圖形在這個重新解讀中扮演了重要角色。

《九章算術》是中國數學的經典著作，成書於西元前後一世紀之間，含有這個問題的豐富資訊。這本書的主要內容，很難不讓我們想到小時候學的那些有關火車與浴缸的應用題，以及這本書的標題所說的「數學計算」。這本書有許多重要的註釋者，最有名的是西元三世紀的劉徽。《周髀算經》則是另一本成書於漢朝的著作，該書的註釋也是在西元三世紀。在教學方面很重要的一點是，這本書含有我們所能獲得最早的圖形。事實上我們所能讀到的中國文獻比較少，因為這些文獻的保存與傳遞並不像在希臘那麼受重視。關於這點有許多不同假設。

根據琅元 (Alexei Volkov) 的研究，中國有很長一段時間，將天文學當作皇帝獨享的知識，並且在民間進行嚴厲審查。祭儀也同樣是國家機密，因此與之相關的數學知識也極可能受到審查。宋朝 (十二至十三世紀) 的數學著作只有四本流傳到今日，這還是靠著清朝 (十八至十九世紀) 古文學者的研究才獲得。這些文獻見證了一個極為密集的活動，地理上的範圍很廣，並且數學的等級很高。只有十餘本宋朝以前的數學著作能保存至今，還是拜考試制度所賜。這些年代當然不是沒有別的東西，只是這些其他的文獻無法流傳到後世。至於幾何圖形，在宋朝以前的版本則是付諸闕如。有可能是因為這些圖形是另外做成附冊，從而沒有逃過查禁的命運。或者是如林力娜所說，這些圖形可以讓讀者進行著色與裁切，沒有保存下來。



圖 4. 宋朝出版的周髀算經 (成書於漢代) 中的一圖。

林力娜指出，一個關於一般性的陳述，在九章算術與周髀算經中都與圖形有內在緊密的關聯。她發現對於同一個圖形，可以有不同的計算公式。也就是說，同一個圖形可以被不同的方式解讀。一個圖形能夠呈現為不同的計算公式，表示圖形本身就可以是一種一般性的表述。但要掌握這個一般性的表述，就必須求助於文獻中非文字的部分：幾何圖形，而這正是通常最容易缺少的部分。這樣的觀點顯示出，美索不達米亞以及中國的文獻中，擁有幾何學的其他形式與使用，以及一般性的另一種實踐。

中國古代文獻的解讀，促使我們重新思考現有的解釋模式。呈現給我們的文字元素，表面上看起來僅僅是我們所熟悉的應用題求解，實際上卻有與西方數學傳統不同的實踐功能。把這些實踐從那些使其得以發生的工作文化脈絡重建出來，能夠讓我們進行新的詮釋。這裡並不只是能在幾何圖形中看到的東西，也有在計算公式中看到的。林力娜認為九章算術所提出的，是一些結合具體情境（例如販馬）與數值的問題。解答就在提出問題之後給出，隨後則是解題步驟。不過她也看到，註釋者透過解題步驟要做的，並不是僅僅解決一個問題，而是要解決一個類型的問題。也就是說，劉徽對問題與解題的呈現，表面上看起來是個別性的，實際上卻有一般性的意義：一般性可以用個別性的方式去書寫。這種方式結合了問題的實踐與一般性的實踐，與學校中僅僅把解題當作是一種特殊技巧截然不同。

林力娜還注意到，劉徽也致力於證明計算公式的正確無誤。她指出儘管有各個不同的問題脈絡，運算的意義也千差萬別，但都有使計算公式得以正確運作的策略。在劉徽的工作文化脈絡中，證明的目的是要探討計算公式之所以正確無誤的原因，並進一步發現適用於最多計算公式的基本運算。這些基本運算得以在表面上看起來零散的計算公式背後，發現能夠解決最多樣化的問題各種工作方式，並闡釋其中的深層關係。證明的實踐，是要優先給予一般性的價值，但這樣的實踐並不是建立在公理與定義上。

## 歐亞大陸/印度/非洲：世界網路的0.1版

這讓我們想畫出一道分隔線，一邊是希臘/歐幾里德式的數學，另一邊則是以計算公式來呈現的數學。儘管我們對計算公式做了重新評價，還是要抗拒這種分立主義的誘惑。兩個地理區域各自隱藏了形形色色的實踐、不同的文獻文化，以及一個對非常不同的素材進行重建的年代表。並不存在一個在數學上是始終如一的中國，也沒有一個體系統一的希臘數學。各處存在的都是不同的認知文化。一個天文學家與一個統計學家，他們可以同樣是中國人或希臘人，並且在工作上都會用到數學，但兩者之間在實踐上與信仰上的差異卻可能天差地別。這點是很重要的，因為最近幾年，我們看到了「印度」、「伊斯蘭」、「傳統中國」等等數學史研究的蓬勃發展。在日本，伊藤憲二 (Kenji Ito) 揭開了「武士科學」(“samurai sciences”) 的想法，也就是各個文化的與社群化的科學史。科學史完全沒有因為國家主義而完全結束。事實上必須構想出複雜的以及通

常是局部的錯綜關聯。

中國並沒有被隔離在世界數學史的發展之外。中國古代的許多數學實踐，一部分發現在中世紀，以阿拉伯文重新寫成。阿拉伯文應該是世界史上第一個數學傳播的國際語言。SAW (Science, Art and Writing, 科學、藝術與書寫) 的團隊指出，伊斯蘭國家透過資訊流通所產生的綜合研究，仍然是科學史上最有發展潛力的一塊地。這些數學無疑是經由印度轉譯為阿拉伯語言的。最有名的例子就是我們現在所用的十進位記數系統。這極可能是印度的，或是花拉子米 (Al-Khwarizmi) 創制出來而傳遞給我們。我們把這些稱作「阿拉伯」數字，是因為阿拉伯人讓這個系統遠航至歐洲。

儘管缺少足夠而深入的比較研究，我們還是能看到中國與印度之間的諸多共同點。中國所使用的計算工具，與印度〈算數〉(Ganita-Pada) 所描繪的，具有許多相似之處 (〈算數〉是西元五至六世紀由阿爺波多 (Aryabhata) 撰寫的阿爺波多曆數書的數學章節，婆什迦羅第一 (Bhaskara I) 於七世紀做了這本書的註釋)。我們看到這兩個記數系統都是以數的位置與十進位為基礎。求平方根的系統，分數的概念，二次無理數的量，所謂「畢達哥拉斯的」定理，關於圓與球的討論，交叉相乘等等，這些由阿嘉特·凱勒 (Agathe Keller) 以及我本人所進行的研究，指出了其中的相似性。這並不是一種數學的「必然性」，因為我們看到在美索不達米亞或是埃及，這些數學對象也同時是其他研究工作的對象。我們可以設想，在當時的中國與印度之間，有一些工作社群，可能是佛教尤其是天文學的傳播者。我們也注意到，在這兩種地方，證明與註釋這兩種實踐是融合在一起的。劉徽或婆什迦羅第一引進了說明、驗證以及證明的詞彙，用來指稱他們註釋工作背後的知識論觀念。某種一般程序的基本詞彙可以用來解釋不同程序，就是一種展示各種計算公式之間關係的方法。這也是詮釋者的共同的特點。在印度與中國，有某種東西在證明之間流傳。



圖 5. 《楊輝算法》中所討論的折竹問題 (十三世紀)。

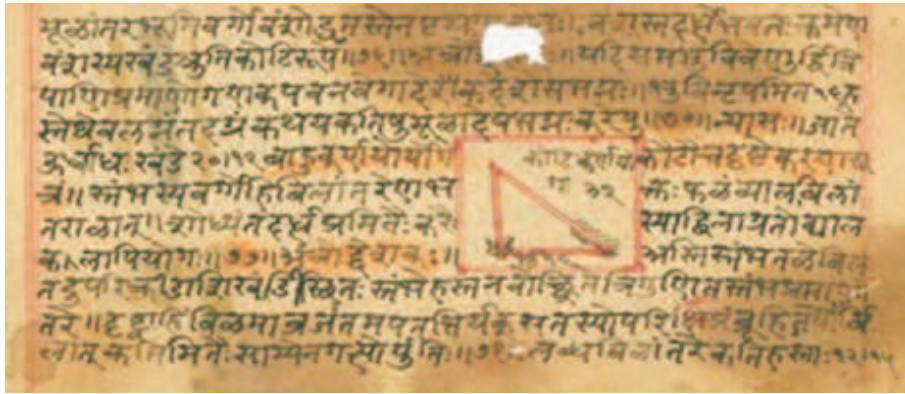


圖 6. 印度婆什伽羅 (Bhāskara, (1114~1185)) 的《麗羅娃蒂》(Lilāvati) 中談論的折箭問題。1650 年的手抄本。

在中國，如同在印度與美索不達米亞，最重要的證明工作在於計算公式的正確性。阿拉伯數學也同時展現出對於這種證明工作的興趣。我們在這裡觀察到，必須重新探討我們對於數學知識傳播的看法。有人可能會認為，知識的傳播是一種由學者到學者，並且以文字作為媒介的傳播。就像是有一本寫好的論文，直接且完整地由一個專家交付給另一個專家。但實際上的情形絕對是更複雜的。工具、策略、秘訣、謎題、不同文獻資料的紀錄在各地流傳，並且為書記員、祭司、天文學家、會計、學生、教師、商人、業餘愛好者重拾其中的片段……流通的模式與其說是在地圖上明晰標畫出來的道路，更毋寧是一個運作不停的神經網路。

這個現象顯然發生在絲路之前，也是在佛教的天文學流通之前。例如，美索不達米亞 IM 53957 號黏土板所談到的穀粒問題，就與埃及的萊因德莎草紙中第 37 號問題有相似之處。另一個例子是六世紀時印度人希薩 (Sissa) 提出的象棋問題，據說他是印度象棋的發明者，想要國王用小麥來買他的發明。象棋問題的第一個形式出現在美索不達米亞，是要將一粒大麥連續加倍三十次。在印度的傳說中，則是希薩要國王放一粒小麥在第一個棋盒，放兩粒在第二個棋盒，四粒在第三個，八粒在第四個，依此類推到六十四個盒子，每個盒子的小麥數目都是前一個的兩倍。這個要求看起來很容易滿足，但國王後來才發覺他完全做不到。這裡需要 18,446,744,073,709,551,615 粒麥子，也就是接近地球上 5000 年所能生產的小麥！這個問題有不同版本，而這些問題的傳遞，與歐亞大陸的商旅網路是同時發展的。由此，霍伊魯普做出這樣的結論：美索不達米亞的書記員，應該從商人那邊學到不少知識，並且比從「土地丈量員」那兒獲得的更多。

這讓我們再度思考，「兩個世界」的「相遇」這樣的說法是否妥當。我們應該設想，有一種數學實踐的網路，交織在歐亞大陸/印度/非洲之間，其中有各種不同的工作文化，或是借用林力娜與福克斯凱勒 (Evelyn Fox-Keller) 所提出的概念：不同的認知文化 (epistemological cultures)。這讓我們看到，還有一整片大陸要去開拓。

## 結論

當我們閱讀美索不達米亞或是中國的文獻時，我們發現這些是由一系列的問題與計算公式所構成。如果我們用目的論的稜鏡以及現代數學的符號系統去解讀這些，就會以為這些與中小學數學與應用數學沒什麼兩樣。但如果我們更換觀看的稜鏡，就會發現隱藏在計算公式後面的，是另一個形式的數學證明與數學一般性，而一系列的求解問題也不僅是學校作業。這樣的理解必須要走出「文本」。文本僅僅是實踐工作的一個面向、一個例證、一個支撐。數學並不是我們所讀的東西，而是我們所做的東西。挑戰就在於重建這些數學實踐，也就是重新展現文本之外的東西。使用幾何圖形（文獻中非言說的部分）是非常有啟發性的：一個圖形可以成爲一個證明。因此即使沒有希臘數學中的公理，也可以有數學證明、一般性以及演繹推理。

數學，尤其是幾何學誕生於希臘，這樣的觀念其實是兩個觀點的結合：一方面是歷史目的論的觀點，另一個觀點則是認爲可以將數學區分爲純數學與應用數學。依照某種觀念史的看法，數學是唯一可以用來表現普遍真理的語言。而當前流傳得最廣的通俗科學史，仍然帶有濃厚的目的論的色彩：科學史的發展目的就是成爲現代科學，而現代科學則是以進步爲指標而持續發展。但如果我們去看藝術史，可能會覺得這樣的進步並沒有任何意義。不會有人認爲畢卡索的作品相較於林布蘭而言是一種「進步」，也不會有人認爲畢卡索就是藝術史的發展目的。透過這樣的借鏡我們或許也能認爲，並沒有一種唯一正確的發展道路，是數學實踐所必須遵循的。

再回到我們的問題：「數學是否真的誕生於希臘？」阻礙我們思考的其實是「誕生」、「萌芽」、「家園」、「搖籃」這樣的字眼。事實上，數學是無處不在的。民族學數學的研究已經告訴我們，世界上不存在沒有數學的社會，只不過並不是所有的數學都是制度化的。在哲學上，這裡有所謂「人類的普遍理性」這樣的問題，不過我們也能有一些更有趣的理論，例如哈金（以及在他之前的克隆比（Crombie）與在他之後的內茲），所說的一種認知的演化理論。有一些思想的模組（空間、時間……）在人類的歷史上逐步成形（「空間」的模組成爲幾何），數學史的研究則讓我們隱約看到其中的發展。在這裡，數學史、認知心理學與教學哲學者的工作匯集在一起，這讓我們想要重讀皮亞傑的作品，用一種不同的方式，並讀出一些不同的東西。

### 更進一步的讀物

1. Karine Chemla and Guo Shuchun, *Les Neuf Chaptitres sur les Procédures Mathématiques*, Dunod, Paris, 2004.
2. Høyrup, Jens (2017). *Algebra in Cuneiform: Introduction to an Old Babylonian Geometrical Technique*, Edition Open Access. ISBN 978-3-945561-15-7.
3. Reviel Netz. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
4. Agathe Keller, *Expounding the Mathematical Seed*, Vol. 1-2. Birkhäuser Basel, 2006.
5. Florence Bretelle-Estabet (Ed.), *Looking at it from Asia: the Processes that Shaped the Sources of History of Science*. Springer Netherlands, 2010.
6. Charlotte Pollet, *The Empty and the Full: Li Ye and the Way of Mathematics*, World Scientific, Singapore, 2020.