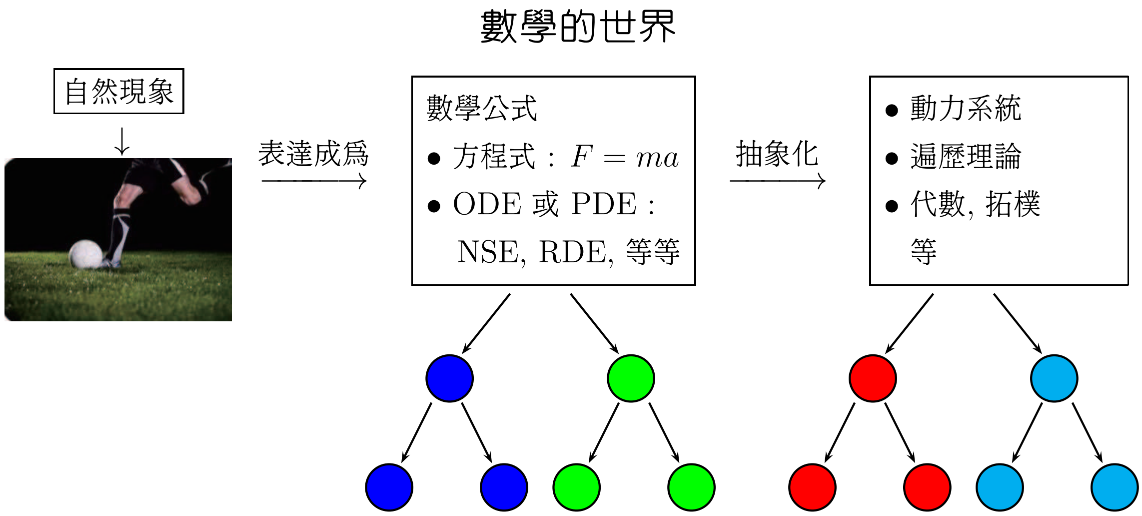
數學傳播　44卷3期, pp. 5-16

爲什麼要研究動力系統?

演講者：Keonhee Lee 教授 (韓國國立中南大學)
時　間：民國 108 年 11 月 21 日
地　點：中研院數學所6樓演講廳

數學無所不在, 它讓我們更深入地了解世界。



根據維基百科, 動力系統 (dynamical system) 可定義如下。

定義: 動力系統是描述相空間 (phase space) X 裡的點如何隨時間變動的系統; X 可以是拓樸空間、平滑流形、測度空間或函數空間等等。

根據選取時間的不同方式, 動力系統可分類爲：離散動力系統、連續動力系統 (或稱流 (flow)), 及群作用 (group action) 動力系統。

動力系統由微分方程驅動, 而微分方程包括常微分方程 ODE 及偏微分方程 PDE。考慮 $\mathbb{R}^n$ 上的微分方程組:

$$(A)\ x = X(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = X_1(x) \\ \quad\vdots \\ x_n = X_n(x), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

要找到給定之方程組的精確解 (exact solution) 並不容易。即使能找到精確解, 要推導解曲線的週期性、遞迴性等長期行爲 (long time behavior) 仍極其困難。

19世紀末, Poincaré 引介新方法, 在無法找到方程組的精確解的情況下, 仍可獲致解曲線的定性資訊; 亦即, 設向量場 X 夠平滑, 使得方程組的解有存在唯一性:

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \exists!\ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ \text{使得}\ x(0) = x_0,$$

且解連續地依賴於初始值, 則可將方程組 (A) 所有的解寫爲一個函數:

$$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ \phi(x_0, t) = x_0(t),$$

其中 $x_0(t)$ 是通過 x_0 的唯一解。如此的函數 $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 是連續的, 滿足

(1) $\phi(x, 0) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

(2) $\phi(\phi(x, s), t) = \phi(x, s + t), \forall\, s, t \in \mathbb{R}$.

H. Poincaré
(1854.4∼1912.7)

我們稱 ϕ 爲方程組 (A) 所誘發 (induce) 的 $\mathbb{R}^n$ 上的動力系統。將這些想法抽象化後, 可建構出拓樸空間的動力系統。

動力系統的理論被應用到非常廣泛的領域, 涵蓋物理、生物、化學、工程、經濟、醫學等。但這些應用主要侷限於 ODE 誘發的有限維度動力系統。始自 1980 年代初期, 類似的技巧系統地應用到 PDE 誘發的無限維度動力系統。我們希望援用有限維度動力系統的技巧及洞見, 來研究無限維度動力系統。

考慮 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 上的偏微分方程

$$(B)\ \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(x, u), & \text{於 } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{於 } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & \text{於 } \Omega, \end{cases}$$

其中 $u_0 \in L^2(\Omega)$。要找到給定之方程組的解很不容易, 要推斷解曲線的漸進行爲 (asymptotic behavior) 更是困難。我們考慮下列根本性問題:

- 適定性 (well-posedness)
  - 解的存在性
  - 解的唯一性
  - 解連續依賴於初始值
- 解的正則性 (regularity)

假設 PDE (B) 具有適定性, 亦即,

– $\forall\ u_0 \in L^2(\Omega)$, PDE (B) 存在唯一的大域解 $u(t)$ 使得 $u(0) = u_0$

– 弱解 (weak solution) 連續依賴於初始值,

則可將 PDE (B) 所有的解寫成一個函數:

$$S : L^2(\Omega) \times [0, \infty) \to L^2(\Omega), \quad S(u_0, t) = u(t),$$

其中 $u(t)$ 是通過 $u(0) = u_0$ 的 PDE (B) 的唯一解。我們知道

(1) S 對每個變數都爲連續,

(2) $S(t) \circ S(s) = S(t + s), \quad \forall\ t, s \in [0, \infty)$,

(3) $S(0) = id$,

且稱 S 爲 PDE (B) 所誘發的 $L^2(\omega)$ 上的無限維動力系統。將這些想法抽象化, 可建構出 Banach 空間的無限維動力系統。我們有:

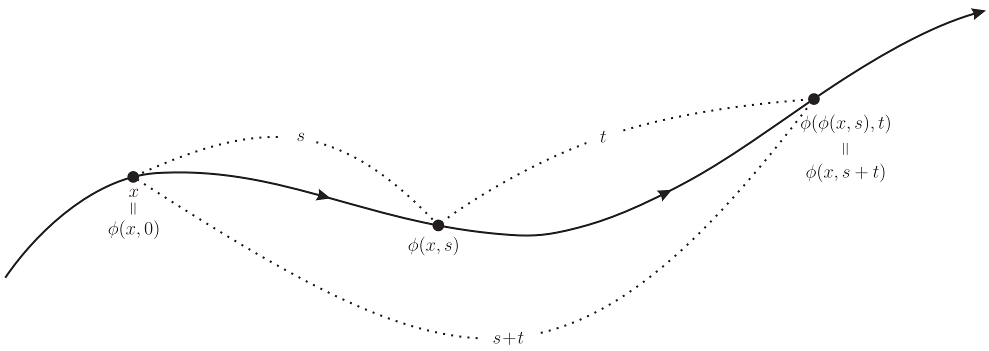
動力系統的抽象定義: 拓樸空間 X 上的動力系統是一個具有下列性質的映射 $\phi : X \times \mathbb{R} \to X$

– ϕ 爲連續,

– $(x, 0) = x, \forall\ x \in X$,

– $\phi(\phi(x, s), t) = \phi(x, s + t), \forall\ s, t \in \mathbb{R}$.

而集合 $\{\phi(x, t), t \in \mathbb{R}\}$ 是 ϕ 通過 $x \in X$ 的軌道 (orbit)。



主要目標、基礎知識

動力系統理論的主要目標, 是由下列觀點了解 ϕ 的軌道的長期行爲

– 拓樸觀點:拓樸動力學,

– 幾何觀點:可微動力學,

– 測度論觀點:可測動力學,

– 數值觀點:數值動力學,

– 統計觀點：統計動力學,
– 保測映射之動力學：遍歷理論。

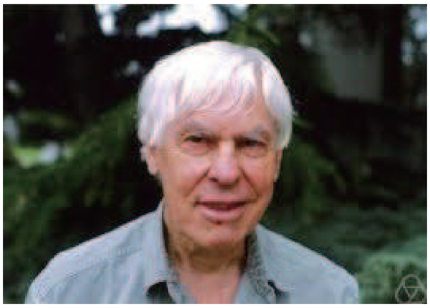
預備知識包括：拓樸、微分方程、線性代數、微分拓樸及微分流形、測度論、泛函分析、偏微分方程、數值分析、統計學。

可微 (differentiable) 動力系統

動力系統的軌道的長期行爲可用多種方式來描述。1960 年代 Steve Smale 提出其中一種方式。他援用微分拓樸的基本知識, 提出可微動力系統的理論。他的想法是：在微積分裡, 若要了解一個函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 往往藉助於 f 的微分 f' 或積分 $\int f$。據此, 他用微分映射 (the derivative map)

$$D\phi_t : TM \to TM$$

來理解動力系統 $\phi: M\times\mathbb{R}\to M$, 其中 M 爲 $\mathcal{C}^\infty$ 流形。

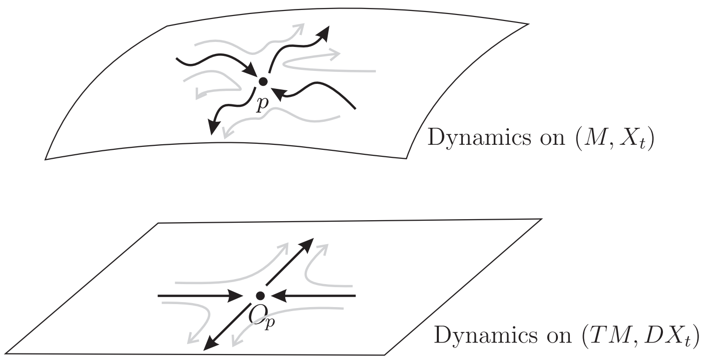


Steve Smale (1930.7.5∼)
1966 年獲費爾茲獎

定義: 設 M 爲 $\mathcal{C}^\infty$ 流形, 且令 $\mathcal{X}^1(M)$ 爲 M 上的所有 $\mathcal{C}^1$ 向量微分場在 $\mathcal{C}^1$ 拓樸下形成的空間, 則向量場 $X\in\mathcal{X}^1(M)$ 的可積曲線誘導出動力系統 ϕ; 這裡 $\phi: M\times\mathbb{R}\to M$ 爲滿足下式的 $\mathcal{C}^1$ 映射:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t) = X(\phi(x,t)), \quad \forall\ (x,t)\in M\times\mathbb{R}.$$

向量場 X 所生成的動力系統, 被稱爲 M 上的可微動力系統, 記爲 X_t。



S. Smale 援用切線叢 TM 上的動力系統, 來了解 M 上的動力系統。就此而言, 切線叢動力學裡的雙曲性 (hyperbolicity) 最爲有用且重要。

切線叢動力學的雙曲性 (hyperbolicity, HYP)

定義: 稱一個緊緻不變集 (invariant set) $\Lambda \subset M$ 對向量場 $X \in \mathcal{X}^1(M)$ 具雙曲性, 若且唯若下述的連續分拆 (continuous splitting) 存在:

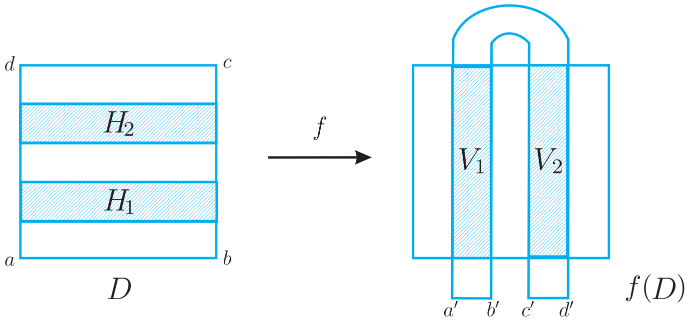
$\forall\ p \in \Lambda$, $T_pM = E_p^s \oplus E_p^u \langle X(p) \rangle$, 其中 $\langle X(p) \rangle$ 是 $X(p)$ 所生成的一維空間,
DX_t 在 E_p^s 是收縮的 (contractive), 亦即, 存在常數 $0 < \lambda < 1$ 及 $C > 0$ 使得

$$\forall\ v \in E_p^s, \quad \|DX_t(v)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v\|, \quad t > 0,$$

DX_t 在 E_p^u 是擴張的 (expansive), 亦即, 存在常數 $0 < \lambda < 1$ 及 $C > 0$ 使得

$$\forall\ v \in E_p^s, \quad \|DX_{-t}(v)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|v\|, \quad t > 0.$$

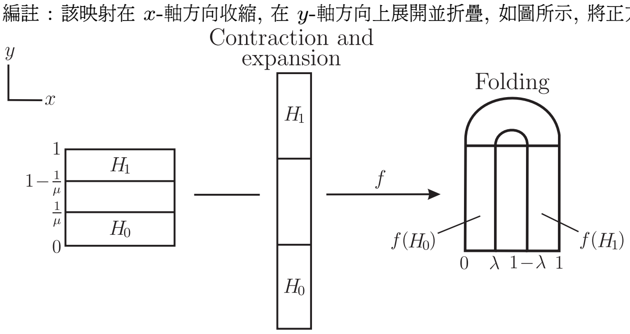
例一: **雙曲環體自同構** (Hyperbolic toral automorphism) 設 $A = (a_{ij}) \in GL_N(\mathbb{Z})$ 有 $\det A = \pm 1$, 且設 A 沒有任何模 1 (modulus 1) 的固有值, 則 A 誘導出環體自同構 (toral automorphism) $L_A : T^n \to T^n$。此 n 維環體 T^n 對 L_A 具雙曲性。



例二: Smale **的馬蹄** (horseshoe)[1] 令 $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ 爲馬蹄微分同胚 (horseshoe diffeomorphism), 且令 $\Lambda = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(D)$, 則 Λ 對 f 是雙曲的。

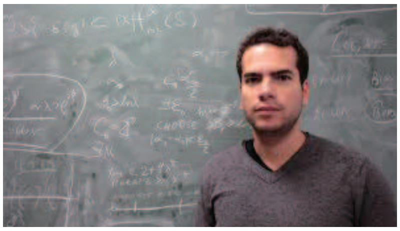
藉由拓樸及遍歷理論的論點, 雙曲型動力系統已被深入理解。

[1]編註：該映射在 x-軸方向收縮, 在 y-軸方向上展開並折疊, 如圖所示, 將正方形映射成馬蹄形:



雙曲性之外的動力學 (dynamics beyond hyperbolicity, BHYP)

雙曲性之外的動力學是近日的新研究題材。此中一位關鍵人物是 Jacob Palis。他是 Steve Smale 的學生, 1999 至 2002 年擔任國際數學聯盟 (IMU) 主席, 現任職於巴西 Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)。另一位關鍵人物 Arthur Avila 師承 J. Palis 及 De Melo, 在 2014 年獲費爾茲獎。



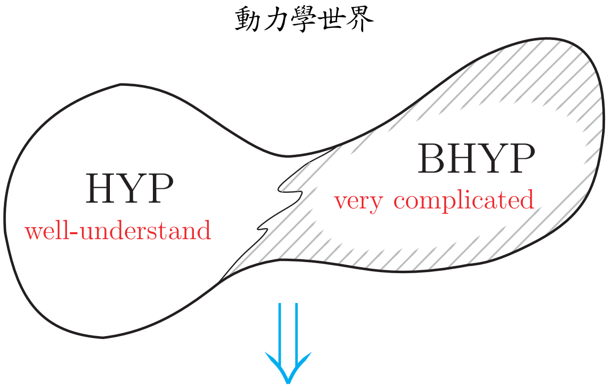
Arthur Avila (1979.6.29∼)

動力系統領域的費爾茲獎得主

動力系統領域的費爾茲獎得主包括:

- 2010 ICM 的 Lindenstrauss : 遍歷理論及數論
- 2014 ICM 的
  - Arthur Avila : 主要研究動力系統
  - Mirzakhani : 黎曼曲面的動力學及幾何學
- 2018 ICM 的 Venkatesh : 遍歷理論、表示論等等。

J. Palis 的猜想



存在稠密集合 $D \subset BHYP$ 使得 $\forall\ \phi \in D$,

– 允許同宿相切[2] (homoclinic tangency)

– 允許異質維度 cycle[3] (hetero dimensional cycle)。

[2]編註 : 具相同雙曲周期的穩定流形及不穩定流形的交點被稱爲「同宿」, 而如果該相交不是橫向的 (transverse), 則稱之爲「同宿相切」。

[3]編註 : 由具有不同 indices 的雙曲周期鞍 (saddle) 組成的 cycle。

可測度動力學

C. A. Morales (IMPA) 於 2013 年提出可擴張測度 (expansive measure) 的想法。他嘗試以測度論的觀點來描述拓樸動力系統, 箇中概念涵蓋可擴張性 (expansiveness)、跟蹤性[4] (shadowing property)、拓樸穩定性 (topological stability)、結構穩定性 (structural stability)、鍊回歸性[5] (chain recurrence) 及傳遞性 (transiveness) 等等。

可擴張流 (expansive flow) 的定義

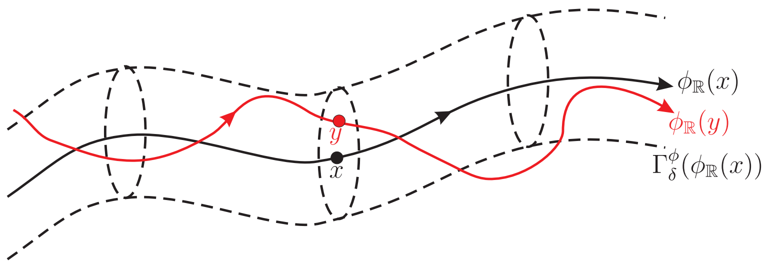
Bowen **及** Walters **的定義** (1972): 稱流 ϕ 是可擴張流, 若且唯若 $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ 使得

$$\Gamma_\delta^\phi(x) \subset \phi_{(-\epsilon,\epsilon)}(x), \qquad \forall\, x \in X,$$

其中 $\Gamma_\delta^\phi(x) = \Big\{ y \in X \mid d\Big(\big(\phi_t(x), \phi_{c(t)}(y)\big)\Big) \leq \delta,\ \forall t \in \mathbb{R} \Big\}$, 而 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 爲連續的且 $c(0) = 0$。

Ruggiero **的定義** (1994): 稱流 ϕ 是 $\mathbb{R}$-可擴張流, 若且唯若 $\exists\, \delta > 0$ 使得

$$\Gamma_\delta^\phi(x) \subset \phi_{\mathbb{R}}(x), \quad \forall\, x \in X.$$



測度可擴張流 (measure expansive flow) 的定義

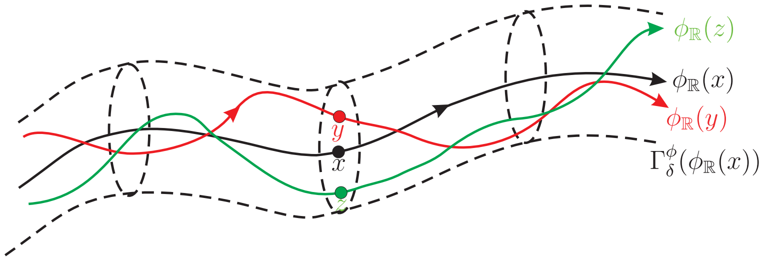
Carasco-Olivera **及** Morales **的定義** (2014): 設 $\mathcal{M}(X)$ 爲 X 上的所有 Borel 機率測度所成的集合, 具弱*拓樸。我們稱流 ϕ 是測度可擴張的, 若且唯若 $\exists\, \delta > 0$, 使得所有使軌道測度爲 0 的 $\mu \in \mathcal{M}(X)$, 亦即 $\mu(\phi_{\mathbb{R}}(x)) = 0, \forall\, x \in X$, 都有 $\mu(\Gamma_\delta^\phi(x)) = 0, \forall\, x \in X$。

注意: 可擴張性 $\Rightarrow$ 測度可擴張性。

---

[4] 編註：設 (X, d) 爲緊緻度量空間, 且設 $f : X \to X$ 爲同胚。序列 $(y_n) \subset X$ 爲 f 的 δ-擬軌道 (δ-pseudo-orbit), 若且唯若 $d(f(y_n), y_{n+1}) \leq \delta, \forall\, n \in \mathbb{Z}$。而 f 具跟蹤性, 若且唯若 $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, 使得任意 f 的 δ-擬軌道都存在軌道 $(x_n) \subset X$ 具 $d(x_n, y_n) < \epsilon, \forall\, n \in \mathbb{Z}$。

[5] 編註：設 (X, d) 爲緊緻度量空間。點 $x \in X$ 具鍊回歸性, 若且唯若 $\forall\, \epsilon, T > 0$, 存在某個以 x 爲起始點的 ϵ-軌跡, 在某個大於 T 的時刻 T_ϵ 返回 x。



$$\mu\big(\Gamma_\delta^\phi(x)\big)=0$$

流的奇異點 (singularities): 測度可擴張流的奇異點爲孤立的 (isolated)。因此, 在緊緻流形上, 測度可擴張流不具奇異點。

我們將介紹另一類型的可擴張性, 使得流在測度觀點下可包含非孤立的奇異點。

擴張測度的 (measure expanding) **流的定義**: 我們稱流 ϕ 是擴張測度的流, 若且唯若 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall\mu\in\mathcal{M}(X)$,

$$\mu\big(\Gamma_\delta^\phi(x)\backslash\phi_{\mathbb{R}}(x)\big)=0,\quad \forall x\in X.$$

擴張不變測度 (invariant measure expanding) **的流**: 我們稱 $\mu\in\mathcal{M}(X,\phi)$, 若且唯若 $\mu\in\mathcal{M}(X)$ 且 μ 與流 ϕ 的弱跟蹤性相容。我們稱流 ϕ 是擴張不變測度的, 若且唯若 $\exists\delta>0$ 使得 $\forall\mu\in\mathcal{M}(X,\phi)$,

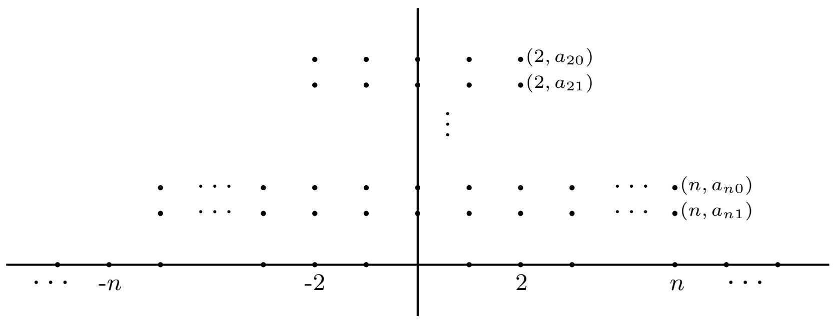
$$\mu(\Gamma_\delta^\phi(x)\backslash\phi_{\mathbb{R}}(x))=0,\quad \forall x\in X.$$

注意: 可擴張性 $\Rightarrow$ 擴張測度的 $\Rightarrow$ 擴張不變測度的。

例 (**擴張測度的 $\not\Rightarrow$ 可擴張性**): 對所有 $n\in\mathbb{N}$, 令 $A_n=\{a_{n_0},a_{n_1}\}$ 爲 $\mathbb{R}^+$ 上的兩點所成的集合, 使得 $n\neq m$ 時, $A_n\cap A_m=\emptyset$, 且在 Hausdorff 度量下 $A_n\to\{0\}$, 令

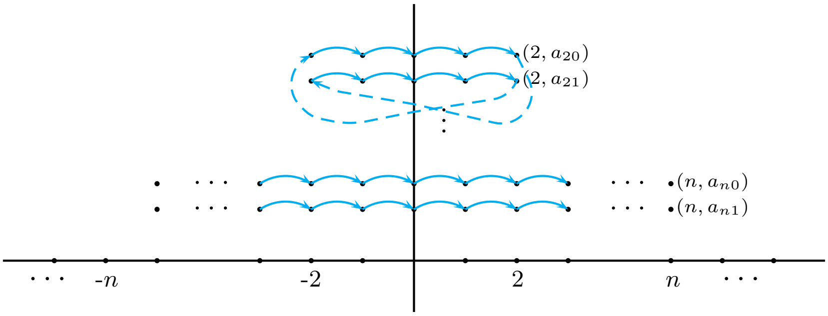
$$X=\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{-n,\ldots,n\}\times A_n\Big)\bigcup(\mathbb{Z}\times\{0\})\bigcup\{\infty\}.$$

則 X 是球 $\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$ 的子空間。



$$X=\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{-n,\ldots,n\}\times A_n\Big)\bigcup(\mathbb{Z}\times\{0\})\bigcup\{\infty\}.$$

設 $f : X \to X$ 爲下圖的位元移動映射 (shift map)



可證明：同胚 f 的懸架流[6] (suspension flow) ϕ 是擴張測度的。但因爲 f 不是擴張的, 所以 ϕ 不是擴張的。

新特點：擴張不變測度的流可包含非孤立的奇異點

例: 令 ϕ 爲球面 S^2 上的流

$$\phi(x, y, z) = (xz, yz, -x^2 - y^2),$$

則對任意 $x \in S^2 \backslash \{p, q\}$, 奇異點集合

$$\text{Sing}(\phi) = \{p, q\}, \quad \omega(x) = \{q\}, \text{ 且 } \alpha(x) = \{p\}.$$

我們注意到：任意 ϕ-不變測度 $\mu \in \mathcal{M}(S^2)$ 都有 $\text{supp}(\mu) = \{p, q\}$。因此,

$$\mathcal{M}(S^2, \phi) = \big\{\lambda\delta_p + (1-\lambda)\delta_q;\ \lambda \in [0, 1]\big\}$$

其中 δ_p 爲位於 p 點的 Dirac 測度。而對任意 $\mu \in \mathcal{M}(X, \phi)$, 我們都有

$$\mu\big(\Gamma_\delta^\phi \backslash \phi_{\mathbb{R}}(x)\big) = 0, \quad x \in S^2.$$

因此流 ϕ 是擴張不變測度的流。

[6]編註：設 X 爲度量空間, $f : X \to X$ 爲連續函數, $r : X \to \mathbb{R}^+$ 取值遠離 0。考慮商空間 $X_r := \{(x, t), 0 \le t \le r(x), x \in X\}/(x, r(x)) \sim (f(x), 0)$。懸架流 (X, f) 是時間位移 $T_t : (x, s) \to (x, s + t)$ 誘導出的半流 (semiflow) $f_t : X_r \to X_r$。

近期的研究主題

我們近期的研究主題, 首先是要經由測度論的觀點, 來了解及發展拓樸動力系統或可微動力系統的結構。其次是藉由所謂的大域吸子 (global attractor) 或慣性流形 (inertial manifold), 來了解無限維動力系統的軌跡之長期漸進行爲。

回顧下述定理。

Smale 的譜分解定理 (1967): 設 f 是緊緻 $\mathcal{C}^\infty$ 流形上的公設 A 微分同胚 (Axion A diffeomorphism), 亦即, 非遊蕩集[7] (nonwandering set) $\Omega(f)$ 具雙曲性且 $\Omega(f)=\overline{\{f\text{的週期點}\}}$, 則存在 f 的譜分解 $\Omega(f)=$ 互斥聯集 $\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_n$, 其中 Ω_i, $1\le i\le n$, 爲封閉且的不變集, 且 f 在拓樸上傳遞 Ω_i, $1\le i\le n$。

注意: 若 f 是公設 A 微分同胚, 則 f 是可擴張的且在 $\Omega(f)$ 具跟蹤性。

我們將對流提出上述定理的測度論版本。拓樸上, 我們有如下的推廣:

Akoi **的定理** (1983): 若 $f:X\to X$ 是可擴張的且在 $\Omega(f)$ 具跟蹤性, 則存在 f 的譜分解。

Komuro **的定理** (1984): 若 $\phi:X\times\mathbb{R}\to X$ 是可擴張的且在 $\Omega(\phi)$ 具跟蹤性, 則存在 ϕ 的譜分解。

這兩個定理的證明有疏失; 若圖補救, 可用鍊回歸集 $CR(\phi)$ 來取代非遊蕩集 $\Omega(\phi)$。事實上, 我們有

$$\mathrm{Sing}\,(\phi)\subset\{\phi\text{的週期點}\}\subset\Omega(\phi)\subset CR(\phi).$$

主要定理 (Lee-Nguyen): 若流 ϕ 是擴張不變測度的且在 $CR(\phi)$ 具跟蹤性, 則存在 ϕ 的譜分解。

系理: 若 ϕ 是可擴張的且在 $CR(\phi)$ 具跟蹤性, 則存在 ϕ 的譜分解。

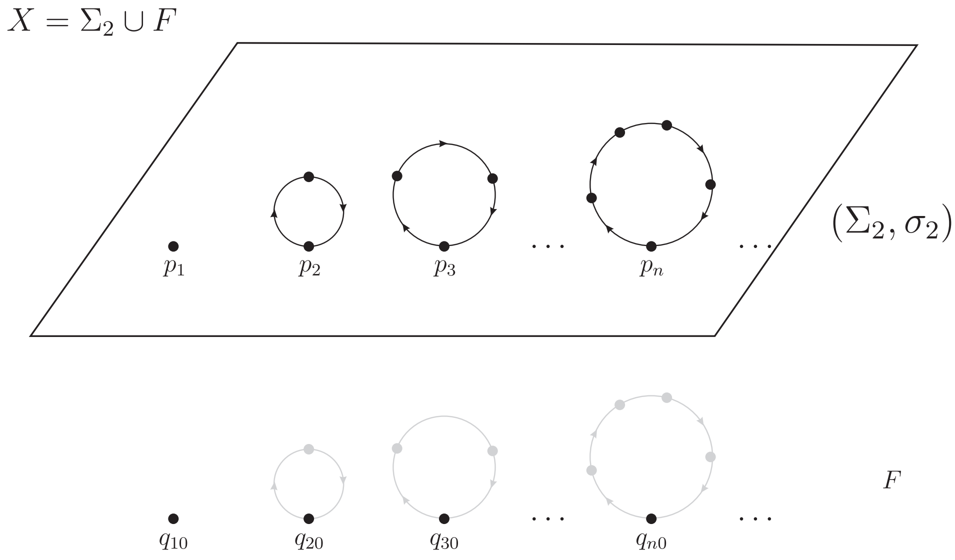
注意: 測度可擴張性 $+CR(\phi)$ 的跟蹤性 $\not\Rightarrow$ 譜分解。

例: 令 $\Sigma_2=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, 且 $\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 爲位元移動映射。對任意 $n\in\mathbb{N}$, 選取週期爲 n 的週期點 p_n, 記其軌道爲 $O_\sigma(p_n)$。令

$$E=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}O_\sigma(p_n).$$

複製 E 得到副本 F 使得 $\Sigma_2\cap F=\emptyset$, 令 $X=\Sigma_2\cup F$。

[7] 編註：設 (X,Σ,μ) 爲測度空間。點 $x\in X$ 被稱爲非遊蕩點 (nonwandering point), 若且唯若對所有包含 x 的開集合 U 及所有正整數 N, 存在 $n>N$ 使得 $\mu(f^n(U),U)>0$。



定義 X 上的度量 D 爲

$$D = \begin{cases} d_0(x,y) & 若\ x, y \in \Sigma_2, \\ \dfrac{1}{n} + d_0\big(x, \sigma^k(p_n)\big) & 若\ x \in \Sigma_2,\ y \in q_{n,k}, \\ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} + d_0\big(\sigma^k(p_n), \sigma^\ell(p_m)\big) & 若\ x \in q_{n,k},\ y \in q_{m,\ell}, \end{cases}$$

在此度量之下, 度量空間 (X, D) 爲緊緻的且 $f : X \to X$ 爲同胚。可證明 f 可跟蹤, f 的懸架流是測度可擴張且可跟蹤的, 但不存在 f 的譜分解。

若要證明主要定理, 需要下述結果。

命題 1: 若 ϕ 在 $CR(\phi)$ 上是擴張不變測度的, 則它在 X 上是擴張不變測度的。

命題 2: 若 ϕ 在 $CR(\phi)$ 上是擴張不變測度的且可跟蹤的, 則 ϕ 的奇異點在 $CR(\phi)$ 上俱爲孤立; 亦即,

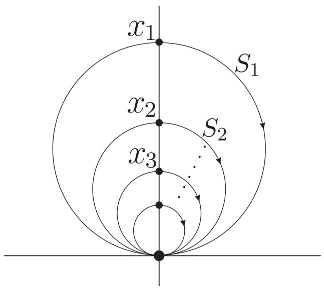
$$\forall\ p \in \mathrm{Sing}(\phi), \quad \exists \epsilon > 0,\ 使得\ B(p,\epsilon) \cap CR(\phi) = \{p\}.$$

備註: ϕ 在 $\Omega(\phi)$ 上爲擴張不變測度的 $\not\Rightarrow$ 在 X 上爲擴張不變測度的。

例: 對任意 $n \in \mathbb{N}$, 令 S_n 爲 $\mathbb{R}^2$ 上以 $(0, 1/n)$ 爲圓心、半徑爲 $1/n$ 的圓, 且令 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, 令 ϕ 爲滿足下列條件的流:

$$\mathrm{Sing}(\phi) = \{0\},\ 且\ \omega(x) = \alpha(x) = \{0\}, \quad \forall\ x \in X\backslash\{0\}.$$

則 ϕ 在 $\Omega(\phi)$ 上是擴張不變測度的, 但在 X 上不是擴張不變測度的。(證明 : 令 $x_n = (0, 1/n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 則 $\forall \delta > 0$, $\exists$ 夠大的 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathbf{0} \in \Gamma_\delta^\phi(x_n)$, 則 $\delta_0\big(\Gamma_\delta^\phi(x_n)\backslash\phi_{\mathbb{R}}(x_n)\big) > 0$, 其中 δ_0 是 ϕ-不變的 Dirac 測度。)



在可微動力系統的應用

令 M 爲緊緻 $\mathcal{C}^\infty$ 黎曼流形, 且令

$$\mathfrak{X}^1(M) = \{M \text{ 上的 } \mathcal{C}^1 \text{ 向量場}\}, \text{ 具 } \mathcal{C}^1\text{-拓樸},$$
$$\mathfrak{X}^1_*(M) = \{X \in \mathfrak{X}^1(M) : \mathrm{Sing}(X) = \emptyset\},$$
$$X_t \text{ 爲 } X \in \mathfrak{X}^1 \text{ 的積分流。}$$

我們稱 X_t 爲 $\mathcal{C}^1$- 穩定地擴張測度 ($\mathcal{C}^1$-stably measure expanding), 若且唯若存在 $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ 的 $\mathcal{C}^1$- 鄰域 $\mathcal{U}(X)$ 使得所有 $Y \in \mathcal{U}(X)$ 都有擴張測度的 Y_t。

定理 2: $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ 的積分流 X_t 爲 C^1- 穩定且不變地擴張測度, 若且唯若 X 爲 Ω- 穩定。

定理 3: $\mathcal{C}^1$ 下一般來說, $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ 的積分流 X_t 不變地擴張測度, 若且唯若 X 爲 Ω- 穩定。

相關工作

1. (with J. Oh), Weak measure expansive flows, *J. of Differential Equations*, 260 (1016), 1078-1090.
2. (with C. A. Morales) Topological stability and expansive measures, *J. of Differential Equations*, 262 (2017), 3467-3487.
3. (with Morales and Nguyen) Various expansive measures for flows, *J. of Differential Equations*, 265 (2018), 2280-2295.
4. (with C. A. Morales and B. Martin), *J. of Differential Equations*, 267 (2019), 2053-2082.
5. (with N. Nguyen) Spectral decomposition and Ω-stability of flows with expanding measures, preprint.

—本文演講者任教韓國國立中南大學—