

規範理論的緣起

演講者：丘成桐院士

時間：民國 108 年 7 月 9 日

地點：中研院數學所6樓演講廳

1915年，愛因斯坦方程的重大成功在科學界廣為流傳。在寫下最終的方程前，愛因斯坦曾與多位數學家進行交流，因此數學界對他的成就倍感興奮。幾位重要的數學家隨即著手結合重力與電磁力。迄今，他們的工作盡皆影響了理論物理學，卻都未獲物理學家認同！

平行性、Weyl 規範理論

除了 Grossmann、Hilbert 及 Noether 之外，愛因斯坦還曾與 Levi-Civita 和 Cartan 進行了廣泛交流。1917 年，Levi-Civita 意識到：度量創建了切向量的平行性 (parallelism) 概念，且單是平行性的概念就涵蓋了我們感興趣的大多數性質，諸如曲率。由於 Christoffel 符號完全決定了平行性，因此可將它們用作獨立變量。

這個看法深具啟發性。隔年，Hermann Weyl 藉由非緊緻的乘法實數群，開創了他的 (阿貝爾 (abelian)) 規範理論。愛因斯坦非常重視 Weyl 的理論，但他認為這並非物理理論，因為其中的平移未能讓長度保持恆定。

在量子力學漸次發展之後，Weyl 改寫 Fritz London 等人的工作，以「圓群 (circle group)」取代「實數的乘法群」，從而使他的理論符合物理性質，讓長度保持不變。Maxwell 方程被完美地納入其中，成為 Weyl 規範理論的一部分。

1926 年出現了另一項發展。Élie Cartan 推廣 Levi-Civita 的觀點，主張平移理論的發展對象，不應僅限於切向量，而該擴及纖維束 (fiber bundle) 中的向量。據此，Weyl 的理論迅即推廣為非阿貝爾規範理論；(1954 年該理論被重新發現，亦即 Yang-Mills 理論，用以解釋高能物理中的同位旋 (isospin)。)

陳氏類、Calabi-Yau 空間

1926 年至 1945 年間，由於 Hassler Whitney、Eduard Stiefel、Lev Pontryagin、陳省身及 Charles Ehresmann 的工作，非阿貝爾規範理論有了廣泛的發展。他們率先開發了特

微類的概念，賦予每個規範體 (gauge field) 一些整數上同調類 (integer cohomology class)。這些整數類最終成為規範理論物理中最基本的大域不變量。它們出現在高能物理、凝態物質和許多相關領域。

早在 1947 年，Weil 就認為：這些整數類應該是量子化量子場理論的基本工具。之後證實 Weil 的建議是準確且饒富成果的。

大約在 Weyl 對規範理論感興趣的同時，另一位名為 Kaluza 的數學家提出了極富原創性的想法，意圖將重力與電磁力相結合。

他主張對具圓對稱的五維純重力做研究。令人驚嘆地，他發現：有效的四維理論其實是重力外加電磁學。因此，藉由五維空間的重力，我們創造了四維的物質。愛因斯坦對此理論深感驚訝和讚賞。但很快地，學者發現它產生一個額外的純量場。但該純量場不存在於大自然，因此該理論被擱置了一段時日。但它是如此美好，因此總不時重現復出。

該理論的現代版本，就是所謂的 Calabi-Yau 緊緻化理論；原理論中的「圓」被「六維緊緻流形」取代，而該流形允許超對稱性。這類空間的存在性並不明顯，是我在 1976 年證明的。這類空間的幾何性質，可以決定宇宙中粒子的相互作用。1984 年以來，許多數學和物理都被納入這一理論。它可能是數學和理論物理學的一個最活躍的領域。

1950 年哈佛大學舉辦國際數學家大會。陳省身給了題為「纖維束幾何」的演講，詳細闡述他與 Cartan 合作開發的非阿貝爾規範理論。較之物理學家晚近提出的理論，這個理論完整許多。陳氏類 (Chern class) 的想法成為量子場論的量子化基石。第一陳氏類的曲率表現促發了 Calabi 猜想，進而促發了 Calabi-Yau 空間的構建，成為弦論的根基。

瞬子(instanton)、物理與數學

規範理論在 1970 年代更受青睞，主因是 't Hooft 在規範理論的工作，成功將其量子化。在研究過程中，他需對名為瞬子 (instanton) 的規範體進行了解。它們是幾何學的美好研究對象；物理學家首先創建了其中一部分，Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Mannin 將它們完全分類。幾何學家就此開始廣泛地與物理學家合作。Donaldson 及 Uhlenbeck-Yau 揭示大量的方程解，它們成為數學中的重要工具。

幾何中許多美好的特性，其實是可以觀察到的；洞悉此事真是饒富趣味。著名的 Aharonov-Bohm 實驗，證明了規範理論的可積分 (holonomic) 現象。可積分行為的概念是說：如果我們攜帶一把尺，沿著彎曲空間中的圓行進，則其角度隨空間的曲率而改變。