編 者 的 話

本期摘錄丘成桐教授去年演講中關於規範理論的部分。1929 年 Hermann Weyl 重新詮釋自己 1918 年的工作, 在切向量場的圓群變換下, 闡述電動力學如何保持不變, 開啟了規範理論的先河。該理論隨即推廣至非阿貝爾規範群, 其後並納入特徵類的理論。

弦論約於 1970 年發軔, 弦對稱性引發出坐標不變性及規範不變性。1974 年, 學者斷定額外維度必然存在。這些額外維度讓學者十分困擾, 而半世紀前的 Kaluza-Klein 理論提示他們：額外維度或可縮到極小的尺寸。他們因此引入緊緻化 (compactification) 的想法, 讓額外維度微小至難以檢測。早期的嘗試無法保持左、右旋粒子的宇稱性 (parity)。1985 年, Horowitz 及 Strominger 證實：Calabi-Yau 流形不僅可緊緻化額外 6 個維度, 且可保持粒子宇稱性, 更甚者, 其所保持的超對稱性足以複製標準模型的某些特質, Calabi-Yau 流形的 genus 也可預測標準模型應有的粒子家族個數。

話說 Calabi-Yau 流形, 緣起自丘成桐教授在 70 年代初思考的問題：是否存在曲率非零 (因此重力非零) 的真空 (vacuum) 時空? 他知道這其實就是 Calabi 稍早提出的問題：物體的拓樸性質可否決定其幾何性質? 物理上, Ricci 曲率描述物質引發的時空彎曲, Ricci 曲率到處爲零意味真空。而陳省身先生於 40 年代證明：Ricci 曲率到處爲零的流形只能具有某種拓樸；具有這些拓樸之流形, 謂之第一陳氏類爲零。Calabi 反問：若某緊緻 Kähler 流形的第一陳氏類爲零, 能否將其變形, 使其 Ricci 曲率到處爲零? 丘成桐教授在 1976 年證明該問題的答案是肯定的, 而這類流形也就是所謂的 Calabi-Yau 流形。

1989 年 Poincaré 研究三體問題, 揭示混沌性的存在。1960 年 Smale 考慮馬蹄映射, 將正方形壓縮、伸長、摺疊形成馬蹄, 而後重覆操作, 得到股數漸增的蛇形馬蹄。馬蹄映射是混沌系統的經典模型, 具三特性：週期性軌道的稠密性、對初始條件的敏感依賴性, 及拓樸混合性。而若動力系統包含橫向同宿 (transverse homoclinic) 點, 必定具有馬蹄映射的全部動力性質; 三體系統即爲一例。

我們稱動力系統具雙曲性, 若且唯若其漸進相空間之切空間可分解成兩個部分, 系統在其中分別收縮及擴張。馬蹄映射具雙曲性。而不具雙曲性的系統又會是如何? Keonhee Lee 教授介紹了一些前沿結果, 嘗試以測度論來描述系統的可擴張性, 力圖使擴張流得以包含奇異點, 進而推廣 Smale 的譜分解定理。

薛昭雄教授及劉又中先生探討形如 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{nk}}{r^{n+1}}$ 的級數, 其中 $\{a_n\}$ 爲二階線性遞迴數列。他們著眼於特徵方程式的根, 見解獨到。173 期張進安先生考慮的是 a_n 爲 Fibonacci 數列的特殊情況。林開亮教授以生成函數理解此情況。

數學傳播電子版網址:

https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/

梁惠禎
2020 年 9 月